గణితం

ఏడవ తరగతి

ఉపాధ్యాయ విద్యా నిర్దేశాలయం
మరియు రాష్ట్ర విద్యా పరిశోధన
శిక్షణ సంస్థ
ఒడిస్సా, భువనేశ్వర్

రాష్ట్ర విద్యాకార్యక్రమ యాజమాన్య బోర్డు
ఒడిస్సా, భువనేశ్వర్

గణితం

ఏడవ తరగతి

రచయిత బృందం :

శ్రీ మదన్ మోహన్ మహంతి

డా. నళినీకాంత మిశ్రా

డా. నివేదిత నాయక్

శ్రీ తాపస్ కుమార్ నాయక్

శ్రీ దిలిప్ కుమార్ సాహు

సమన్వయకర్తలు:

డా. ప్రీతిలత జెన్నా

డా. తిలోత్తమ జెన్నా

డా. సబితా సాహు

సమీక్షక బృందం:

శ్రీ మదన్ మోహన్ మహంతి

శ్రీ తాపస్ కుమార్ నాయక్

డా. బామదేవ త్రిపాఠి

అనువాదక బృందం:

శ్రీ యర్ర ధర్మారావు (అనువాదకులు)

శ్రీ కె. రామారావు (సమీక్షకులు)

శ్రీ యుకెడివి ప్రసాదరావు

శ్రీ కె. రామినాయుడు

శ్రీ ఆర్. మధుకుమార్

ప్రచురణకర్త -

విద్యాలయ మరియు గణశిక్షా విభాగము, ఒడిషా ప్రభుత్వము

ముద్రణా సంవత్సరం- 2022

తయారీ - ఉపాధ్యాయ శిక్షణ నిర్దేశాలయం మరియు రాష్ట్ర విద్యాపరిశోధనా మరియు శిక్షణ పరిశత్ ఒడిషా, భువనేశ్వర్

మరియు ఒడిషా పాఠ్య పుస్తక తయారీ మరియు ముద్రణాలయ సంస్థ, భువనేశ్వర్

ముద్రణ - పాఠ్యపుస్తక ఉత్పాదన మరియు మిక్రయం ఒడిషా, భువనేశ్వర్

జగన్మాత యొక్క చరణాలపై ఇప్పటి వరకు ఏవేమి సమర్పిస్తున్నానో, వాటిలో ప్రాధమిక విద్య నాకు అన్నిటి కంటే అధిక విప్లవాత్మకమైనది మరియు మహోన్నత మైనది. వీటి కన్నా అధిక మహోన్నతము మరియు అధిక విలువైన నా యొక్క సమర్పణ జగత్తులో ఉంచగలుగుతానో దీని కంటే ప్రత్యమ్నాయం మరిలేదు. ఇదియే నా సమగ్ర రచనాత్మక కార్యక్రమమునకు ప్రయోగాత్మకంగా చేయు తాళం చెవి. ఏ నూతన ప్రపంచము గూర్చి నేను పరితపిస్తున్నానో, అది దీని నుండియే ఉద్భవించును. ఇది నా ఆఖరి అభిలాష అని చెప్పవచ్చును.

మహాత్మా గాంధీ

భారత రాజ్యాంగం

ప్రవేశిక స్వరూపం

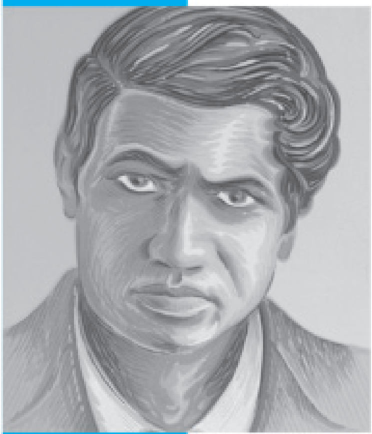
భారత ప్రజలమైన మేము ఈ భారతదేశాన్ని సార్వభౌమ, సామ్యవాద, లౌకిక, (ప్రజాస్వామ్య, గణతంత్ర) రాజ్యంగా రూపొందించడానికి భారత పౌరులందరికి సాంఘిక, ఆర్థిక రాజకీయ న్యాయాన్ని, ఆలోచనలోనూ, భావ ప్రకటనలోనూ, మత విశ్వాసంలోనూ, ఆరాధనలోనూ, స్వేచ్ఛను జీవిత అవకాశాలలో సామాజిక విషయాలలోనూ సమానత్వాన్ని, వ్యక్తి గౌరవాన్ని, జాతీయ ఐక్యతను, సమగ్రతను పెంపొందించుకోవడానికి విధంగా సౌభ్రాతృత్వాన్ని కల్పించి ఈ రాజ్యాంగ పరిషత్తులో చర్చించి, తీర్మానించి, పరిగ్రహించి చిట్టరూపంలో మాకు మేము 26 నవంబరు 1949 నాడు సమర్పించుకుంటున్నాము.

విషయ సూచిక

Srinivasa Ramanujan

(1887 A.D. – 1920 A.D.)

One of the greatest mathematicians of India, Ramanujan's contribution to the theory of numbers has been profound. He was indeed a mathematical phenomenon of the twentieth century. This legendary genius of India ranks among the all time greats like Euler and Jacobi.



Ramanujan lived just for 32 years but during this short span he produced such theorems and formulae which even today remain unfathomable in the present age of super computers. He left behind him about 4000 formulae and theorems.

It is believed that these were the beginning of some great theory that he had at conceptual stage which failed to develop because of his premature and untimely demise. His personal life was as mysterious as his theorems and formulae.

Srinivas RamanujanRamanujan was deeply religious and united spirituality and mathematics. For him the zero represented the Absolute Reality. Researchers are still struggling to understand the source of his remarkable genius in mathematics.

It is believed that he was a great devotee of the Hindu goddess of creativity and that the goddess used to visit him in dreams and she wrote equations on his tongue. Ramanujan was the first Indian to be elected to the Royal Society of London.

Ramanujan was born to poor parents on December 22, 1887 at Erode in Tamil Nadu. His father was employed as a clerk in a cloth merchant's shop. However, his mother had a sharp intellect and was known for making astrological predictions.

Not much is known about his early life and schooling except that he was a solitary child by nature. It is believed that he was born as a result of ardent prayers to the goddess Namgiri. Later Ramanujan attributed his mathematical power to this goddess of creation and wisdom. For him nothing was useful unless it expressed the essence of spirituality.

Ramanujan found mathematics as a profound manifestation of the Reality. He was such a great mathematician and genius as transcends all thoughts and imagination. He was an expert in the interpretation of dreams and astrology. These qualities he had inherited from his mother.

His interest and devotion to mathematics was to the point of obsession. He ignored everything else and would play with numbers day and night on a slate and in his mind. One day he came to possess G.S Carr's "Synopsis of Pure Mathematics", which contained over 6,000 formulae in Algebra, Trigonometry and Calculus but contained no proofs.

Ramanujan made it his constant companion and improved it further on his own. His obsession and preoccupation with mathematics did not allow him to pass his intermediate examination in spite of three attempts. He could not get even the minimum pass marks in other subjects.

Ramanujan was married to a nine year old girl called lauaki and it added more to his family responsibilities. With the recommendation of the Collector of Nellore, who was very much impressed by his mathematical genius, Ramanujan sound a clerk's job at Madras Fort Trust. In 1913 he came across an article written by Professor Hardy.

Ramanujan stayed at Cambridge for four years and during this period he produced many papers of great mathematical significance in collaboration with his mentor Professor Hardy. His phenomenal and exceptional genius was recognized all over the academic world.

He was elected Fellow of the Royal Society, London in 1918. He was then 30 years of age. His mastery of certain areas of mathematics was really fantastic and unbelievable. But soon his hard work began to affect his health and he fell seriously ill in April, 1917.

Ramanujan had contracted tuberculosis. And it was decided to send him back to India for some time. He reached India on March 27, 1919. He breathed his last on April 26, 1920 at Kumbakonam at the age of 32 years. His death shocked Professor Hardy and others beyond words.

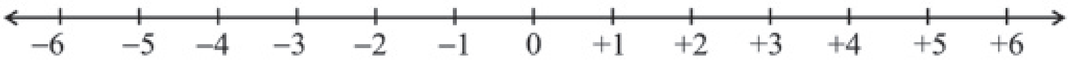
1వ అధ్యాయము

పూర్ణ సంఖ్యలు

సహజసంఖ్యలు, పూర్ణాంకాలు (సున్నాను కలిగియున్న సహజసంఖ్యలు) పూర్ణ సంఖ్యలు గూరించి కింది తరగతిలో నేర్చుకున్నాం. ఋణాత్మక సంఖ్యలను సంఖ్యరేఖపై గుర్తించుట. మరియు పూర్ణ సంఖ్యలను వరుసక్రమంలో వ్రాయుట నేర్చుకున్నాం. పూర్ణసంఖ్యల సంకలనము మరియు వ్యవకలనంలను నేర్చుకున్నాం.

మరళ వాటిని గుర్తు చేసుకుందాం రాండి.

1. క్రింది సంఖ్యరేఖనుపయోగించి దిగువ ఇవ్వబడిన ప్రశ్నలకు సమాదానాలు వ్రాయండి.



క) +2 కంటే 3 పెద్దదిగాగల సంఖ్య ఏది?

ఖ) -3 కంటె 7 పెద్దతిగా గల సంఖ్య ఏది?

గ) ఏ సంఖ్య +4 కంటె 7 తక్కువ?

ఘ) సున్నా కంటె 5 పెద్దదిగా గల సంఖ్య ఏది?

ఙ) ఏ సంఖ్య 0 కంటె 4 తక్కువ?

చ) +5 కంటె చిన్న సంఖ్యను సూచించే బిందువు +5 నకు ఏ ప్రక్కన ఉంటుంది?

ఛ) ఏవేని రెండు సంఖ్యల మధ్య భేదం 8 వచ్చునట్లు రెండు సంఖ్యలను గుర్తించుము.

జ) -3 మరియు +2 మధ్య భేధము ఎంత?

ఝ) సంఖ్య రేఖపై -4 నుండి 3 వరకు గల అంకెలు ఎన్ని?

ఞ) సంఖ్య రేఖపై +4 నుండి -3 వరకు గల అంకెలు ఎన్ని?

మీకు తెలుసా?

-4 నుండి +3 వరకు గల అంకెలేన్నో తెలుసుకొనుటకై సంఖ్యారేఖపై -4 నుండి 3 వరకు గల గదులను లెక్కించులెను. ఎన్ని గదులను వచ్చునో అన్ని అంకెలు అగును.

2. క్రింది ప్రశ్నలకు సమాదానాలు వ్రాయండి.

క) +5 మరియు +8 ల మొత్తం ఎంత?

ఖ) -3 మరియు +8 ల మొత్తం ఎంత?

గ) -7 మరియు +5 ల మొత్తం ఎంత?

ఘ) -4 మరియు -7 ల మొత్తం ఎంత?

మీకు తెలుసా ?

- సంఖ్యారేఖపై ఒక సంఖ్యలో ధనాత్మక సంఖ్యను కలుపునప్పుడు కుడిప్రక్కకు వెళ్ళవలెను.
- సంఖ్యారేఖ సహాయంతో ఒక సంఖ్యనుండి ఒక ధనాత్మక సంఖ్యను తీసివేయునపుడు ఎడమ ప్రక్కకు వెళ్ళ వలెను.

ఙ) +8 నుండి +3 ను తీసివేయుము.

చ) +5 నుండి +7 ను తీసివేయుము.

ఛ) +7 నుండి +12 ను తీసివేయుము.

జ) +5 నుండి +3 ను తీసివేయుము.

ఝ) -4 నుండి +8 ను తీసివేయుము.

ఞ) -5 నుండి -4 ను తీసివేయుము.

ట) ఒక పూర్ణ సంఖ్య నుండి దాని కంటె పెద్దదైన పూర్ణ సంఖ్యను తీసి వేయ గలమా ?

ఠ) సున్నా నుండి +8 ను తీసివేయగలమా ! తీసివేయగలిగినచో వచ్చె సంఖ్య ఎంత?

డ) +8 కు -3 కూడిన ఎంత వచ్చునో అదేసంఖ్య రావలెనన్న +8 నుండి ఎంత తీసివెయవలెను.

ఢ) -3 నుండి -4 ను తీసివేసినచో ఎంత వచ్చునో -3 నకు ఎంత కలిపితే అంతే వస్తుంది.

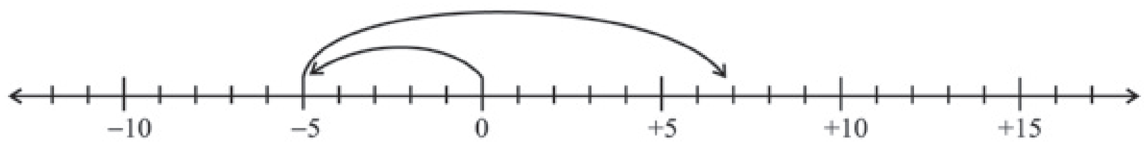
మనకు తెలియును

సంఖ్యారేఖా సహాయంతో ఒక ఋణాత్మక సంఖ్యను కూడిన ఎడమ వైపుకు వెళ్లవలెను. కాని ఋణాత్మక సంఖ్యను తీసివేసిన కుడిప్రక్కకు వెళ్లవలెను.

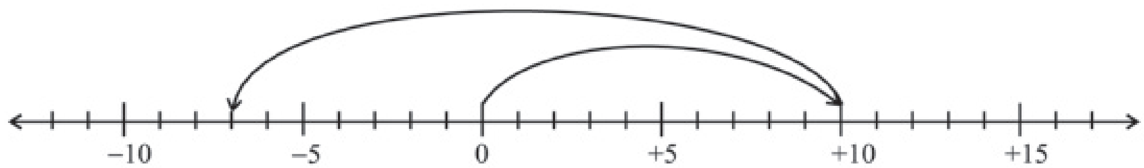
అభ్యాసము 1.1

1) క్రింది సంఖ్యారేఖపై గుర్తించబడిన ప్రక్రియ మరియు వాటి ఫలితాన్ని వ్రాయండి.

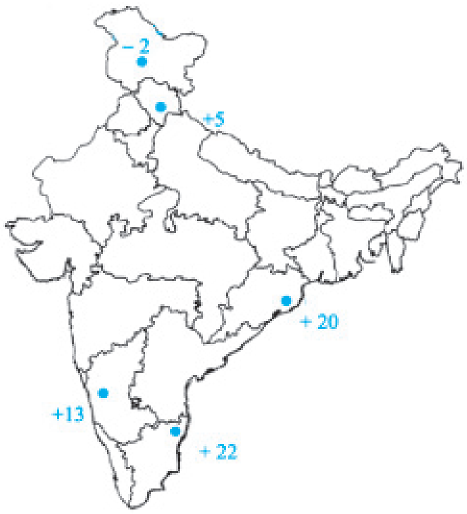
(క)



(ఖ)



2). ప్రక్క పటం నందు వివిధ పట్టణాలలో ఒక దినములో నమోదు అయిన కనిష్ట ఉష్ణోగ్రతలు సెల్సియస్ డిగ్రీ మానంలో ఇవ్వబడినవి. వాటినుండి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయండి.



(క) ఏ స్థానమునందు ఉష్ణోగ్రత అత్యధికం.

(ఖ) ఏ స్థానమునందు ఉష్ణోగ్రత అత్యల్పం.

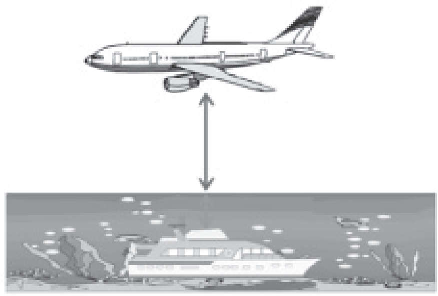
(గ) ఏ స్థానమునందు ఉష్ణోగ్రత బెంగుళూరు ఉష్ణోగ్రత కంటె 8 డిగ్రీలు తక్కువ.

(ఘ) శ్రీనగర్ మరియు ఊటీల మధ్య గలఉష్ణోగ్రత లో తేడా ఎంత !

(జ) ఏ రెండు స్థానముల మధ్యగల ఉష్ణోగ్రత భేదము 16 డిగ్రీలు ఉండును.

3) ఒక పరీక్షలో సరైన జవాబును+1 మార్కు తప్పు జవాబుకు -1 మార్కు ఇవ్వబడును. ప్రతి అభ్యర్థికి నాలుగు సార్లు 25 చొప్పున ప్రశ్నలు అడిగిన అభ్యర్థికి 4 సార్లలో వచ్చిన మార్కులు -1, -3, 5, -5 అయిన అభ్యర్థికి వచ్చు మార్కులు ఎన్ని?

4) ఒకే సారి ఒక విమానం సముద్రమట్టం నుండి 5000 మీటర్ల ఎత్తులోను ఒక సబ్‌మెరిన్ 1500 మీటర్లు లోతులోను ప్రయాణం చేయచున్నాయి. అప్పుడు ఆ రెండింటి మధ్య దూరం ఎంత?



5) ఒక చతుస్రంలోని గదులలో గల అంకెలను ఎడమనుండి కుడికి, పై నుండి క్రిందకి. ఒక మూల నుండి మరోక మూలకు కూడినచో ఒకే సమాదానం వచ్చును. అయినచో క్రింది రెండు చతుర స్రాలలో ఏది సరైనదో తెలియచేయుము.

+2	−8	0
−3	+1	−4
+4	−6	−7

−7	+4	−6
−2	−3	−4
0	−10	+1

6) క) a = 12 b = 5 ఖ) a = 225 b = 321

గ) a = -12 b = 0 ఘ) a = -18 b = +16

7. సూక్ష్మీ కరించండి.

క) +5+(-7)-(-3) ఖ) -18+(-3)-12

గ) +25-(+7)+(-18) ఘ) -35-(-20)+(-14)

8. శ్యామలీ తన ఇంటినుండి 25 మీటర్లు తూర్పువైపునకు వెళ్ళి అచ్చట నుండి 27 మీటర్లు పడమర వైపునకు వచ్చెను. అప్పుడు అమె తన ఇంట నుండి ఏ వైపునకు ఎంత దూరం వెళ్ళెను.

9)క) మొత్తం కనుగొనండి.

-8+7-6+5-4+3-2+1

ఖ) అంకెలను మొదట జతలు జతలుగా తీసుకొని తరువాత వాటి మొత్తంను కనుగొనుము.

గ) మొత్తం కనుగొనండి?

(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+(+1)+(+2)+(+3)+(+4)

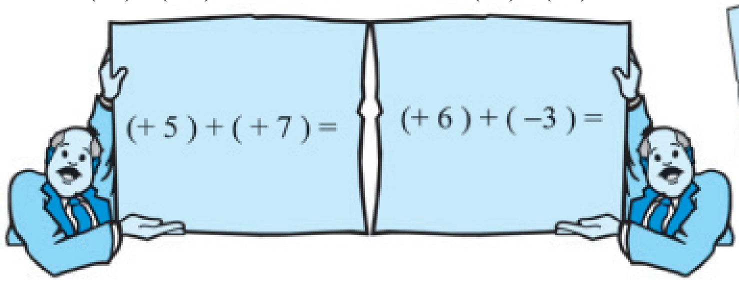
1.2. పూర్ణసంఖ్యల సంకలన ధర్మాలు.

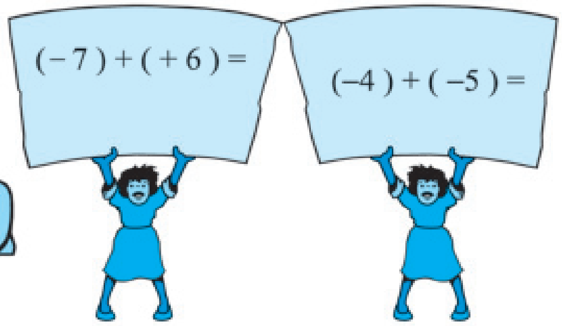
పూర్ణసంఖ్యల మధ్యగల సంకలన ప్రక్రియలను గూర్చి చర్చిద్దాం రండి.

క్రింది ఇవ్వబడిన సంఖ్యలను సంకలనము చేయుము.

క) (+5)+(+7) = ఖ) (+6)+(-3) =

గ) (-7)+(+6) = ఘ) (-4)+(-5) =





పైన లభించిన మొత్తములు ఏ విధమైన సంఖ్యలు.

దీని నుండి మనము ఏమి తెలుసుకున్నా. మీ స్నేహితులతో చర్చించి చెప్పండి.

మనకు తెలుసు.

రెండు పూర్ణ సంఖ్యల మొత్తము ఒక పూర్ణ సంఖ్య

అందువలన పూర్ణ సంఖ్యలు సంవృత ధర్మాన్ని పాటించును.

క్రింది వానిని చేసి చూడండి

కింది వాని మొత్తం కనుగొనండి.

(క) $(+3)+(+5) =$, $(+5)+(+3) =$

(ఖ) $(+8)+(-7) =$, $(-7)+(+8) =$

(గ) $(-3)+(+4) =$, $(+4)+(-3) =$

(ఘ) $(-4)+(-2) =$, $(-2)+(-4) =$

ప్రతీ వరుసలోని రెండింటి మొత్తములు సమనముగా ఉన్నవా?

మనము తెలుసుకున్నది.

$(+3)+(+5)=+8$ మరియు $(+5)+(+3)=+8$

అనగా $+3$ తో $+5$ను కూడగా వచ్చు మొత్తము $+5$ తో 3 ను కూడగా వచ్చు మొత్తం నకు సమనం అని తెలియుచున్నది.
ఈ విధంగా మిగిలిన మూడింటిని కూడా పై విధంగా కూడిక చేసి చూడండి. మీరు ఏమి గమనించారో వ్రాయండి.

పరిశీలించండి -

రెండు పూర్ణ సంఖ్యలను మార్పు చేసి సంకలనము **చేసినప్పటికీ** వాటి మొత్తం మారదు. మనము ఒక పూర్ణసంఖ్యను గాను మరొక పూర్ణ సంఖ్యను గాను తీసుకొని పైన పేర్కొనబడిన దిగయున్ని క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$\boxed{a+b=b+a}$$

అందువలన పూర్ణ సంఖ్యల సంకలనము దృష్ట స్నిత్యంతర ధర్మము (వినిమయ న్యయం)ను పాటించును.

మీరు చేసి చూడండి.

కింది ఇవ్వబడిన మూడు పూర్ణ సఖ్యల మొత్తమును కనుగొందాం రండి.

$(-3)+\{(-5)+(-2)\} =$

$\{(-3)+(-5)\}+(-2) =$

- మొదటి మొత్తం ఎంత?
- రెండవ మొత్తం ఎంత?
- రెండింటి మొత్తంములు సమానముగా మున్నవా!
- పై వాటి నుండి మరు ఏమి గమనించారు?

మూడు సంఖ్యలను సంకలను చేయునపుడు ఏవేని రెండింటిని సంకలనం చేసిన తరువాత వచ్చుమొత్త మనకు మూడవ సంఖ్యను కూడి మొత్తమును కనుగొనవచ్చును.

సహజ సంఖ్యల విషయంలో కూడా మూడు సంఖ్యల మొత్తంను కనుగొనవచ్చును.

a, b, c లను మూడు సంఖ్యలుగా తీసుకొని వాటిని క్రింది విధంగా సూచించవచ్చును.

$$\boxed{\begin{array}{l} a,\ b,\ c \\ \quad a+(b+c)=(a+b)+c \end{array}}$$

పూర్ణ సంఖ్యల సంకలనం సహచర ధర్మాన్ని పాటించును.

- మనకు తెలుసు -

$5+0=5$
$9+0=9$
$74+0=74$

ఇంకా చెప్పాలంటె

$(-3)+0=(-3)$

మీకు తెలుసా ?
సున్నా '0' ను సంకలన తత్సమాంశం అంటారు.

మీరు చెప్పండి -

(i) $(-7)+0 = ?$ (iii) $(-27)+0 = ?$
(ii) $(-12)+0 = ?$ (iv) $0+(-43) = ?$

ఒక పూర్ణ సంఖ్యను a గా తీసుకొని పైన సూచించిన వాటిని క్రింది విధమగా తెలియచేయవచ్చును.

a ఏదైనా ఒక పూర్ణ సంఖ్య ఐన
$$\mathbf{a+0=0+a=a}$$

మీకు తెలుసా -

సున్నా '0' ను సంకలన తత్సమాంశం అంటారు. ఏదైనా ఒక పూర్ణసంఖ్యకు సున్నాను కూడిన అదే పూర్ణసంఖ్య వచ్చును. ఈ ప్రక్రియను సంకలన తత్సమ నియమం అంటారు.

కింది దానిని కూడి మొత్తంను వ్రాయండి.

(i) $(+5)+(-5) =$
(ii) $(+8)+(-8) =$
(iii) $(-12)+(+12) =$
(iv) $(-15)+(+15) =$

చెప్పి చూడండి :
క్రింది వాటిలో ఖాళీస్థలంలో సరైన వాటిని వ్రాయండి.
(i) $(-7)+(*) = -7$
(ii) $(*)+(-4) = -4$
(iii) $(-18)+(*) = -18$
(iv) $(*)+(-28) = -28$

ఒక దనాత్మక సంఖ్యలో అటువంటి ఋణాత్మక సంఖ్యను కూడినచో వాటి మొత్తం సున్నా (0) అగునని పై వాటి నుండి తెలుసుకున్నాం. ఇటువంటి రెండు సంఖ్యలను పరస్పర వ్యతిరేఖ సంఖ్యలు అంటారు. అనగా రెండు పరస్పర సంఖ్యల మొత్తము సున్నా అయినటువంటి రెండు సంఖ్యలను పరస్పర సంకలన విలోమయులు అంటారు.

మీకు తెలుసా?
(+4) యొక్క వ్యతిరేఖ సంఖ్య -4
(-5) యొక్క వ్యతిరేఖ సంఖ్య +5

సంకేతాలను ఉపయోగించి పై విషయాన్ని క్రింది విధంగా సూచించవచ్చును.

చెప్పి చూడండి :
సంకలనం దృష్టా విలోమ నియమలును సహజ సంఖ్యలకు ఎందుకు వర్తించదు ?

a ఒక పూర్ణ సంఖ్య అయిన
$$a+(-a)=(-a)+a=0$$

పూర్ణ సంఖ్యలలో సంకలన ప్రక్రియలోని ఈ గూణమలను విలోమ నియమం అంటారు.

సమాధానాలు వ్రాయండి.

1. రెండు పూర్ణ సంఖ్యలను వ్రాయండి. వాటి మొత్తం ఒక ఋణాత్మక సంఖ్య కావలెను.

(క) రెండు సంఖ్యలలో ఒకటి ధనాత్మకం, మరొకటి ఋణాత్మకం కావలెను.

(ఖ) రెండు ఋణాత్మక సంఖ్యలైయుండవలెను.

(గ) రెండింటిలో ఒకటి సున్నా కావలెను.

2. రెండు పూర్ణ సంఖ్యలను వ్రాయండి. వాటి మొత్తం.

(క) మీరు వ్రాసిన ప్రతి సంఖ్య కంటె చిన్నదిగా ఉండవలెను.

(ఖ) వ్రాసిన రెండు సంఖ్యలలో ఒక దాని కంటె చిన్నదిగాను మరొక దానికంటె పెద్దదిగాను ఉండవలెను.

(గ) రాసిన రెండు సంఖ్యలలో ప్రతి దానికంటె పెద్దదిగా ఉండవలెను.

3. రెండు పూర్ణ సంఖ్యలను వ్రాయండి. వాటిని తీసి వేయగా మిగిలినది.

(క) ఒక ఋణాత్మక సంఖ్య కావలెను.

(ఖ) వ్రాసిన ప్రతి సంఖ్య కంటె చిన్నదిగా ఉండవలెను.

(గ) వ్రాసిన ప్రతిసంఖ్య కంటె పెద్దదిగా ఉండవలెను.

(ఘ) సున్నా కావలెను.

మీకు తెలుసా ?

(-3) + (-5) = -8 ఈ మొత్తం అందులో ప్రతీసంఖ్య కంటె చిన్నది.

1.3. పూర్ణ సంఖ్యలలో వ్యవకలన ధర్మాలు -

(క) రెండు పూర్ణసంఖ్యల వ్యవకులను నిర్ణయించి ఖాళీ స్థలములో రాద్దాం రండి.

(i) $(+5)-(+3) = \boxed{}$ (ii) $(+8)-(-2) = \boxed{}$

(iii) $(+2)-(+5) = \boxed{}$ (iv) $(-3)-(-4) = \boxed{}$

(v) $(-5)-(-2) = \boxed{}$ (vi) $(-4)-(-4) = \boxed{}$

పై వ్యవకలనాల నుండి వచ్చిన ఫలితం కూడా ఒక పూర్ణసంఖ్యయే.

దీనినుండి మనం ఏమి గమనించామో వ్రాయండి. రెండు పూర్ణ సంఖ్యలలో ఒక పూర్ణసంఖ్య నుండి మరొక పూర్ణ సంఖ్యను తీసివేసిన వాటి ఫలితం కూడా పూర్ణసంఖ్య అగును. అనగా పూర్ణసంఖ్యలలో వ్యవకలనానికి సంవృత ధర్మం వర్తించును.

ఒండు పూర్ణ సంఖ్యలను a,b లు అనుకున్నచో సంవృత ధర్మాన్ని క్రింది విధంగా సూచించవచ్చు.

a,b లు రెండు పూర్ణసంఖ్యలు అయినచో
a – b వల్లప్పుడు ఒక పూర్ణ సంఖ్య అగును.

చెప్పి చూడండి :
సహజ సంఖ్యలకు వ్యవకలనం (తీసివేత) దృష్ట్యా సంవృత ధర్మం వర్తించునా? కారణం వ్రాయండి.

గుర్తుంచుకొండి.

$5+(-3) =$ ఎంత అగునో $5-3$ అంతే అగును.

అనగా $5+(-3) = 5-3$

ఇచ్చట $5+(-3)$ అనునది ఒక సంకలన ప్రక్రియ దనిని 5-3 గా వ్రాయబడినది. 5-3 అనునది ఒక వ్యవకలన ప్రక్రియ. పూర్ణసంఖ్యల విషయంలో ప్రతీ సంకలన ప్రక్రియను వ్యవకలన ప్రక్రియగా రాయవచ్చును.

సంకలనం దృష్టా పూర్ణసంఖ్యలకు వినిమయ (స్థిత్యంతర) న్యాయం ఒదియమం సహచర న్యాయం నియమం తత్సమ న్యాయం లు వర్తించునని మనకు తెలియును. వ్యవకలనం దృష్టా ఈ నియమములు పాటించునా లేదా చేసి చూడండి.

అభ్యాసం 1.2

1. క్రింది వాక్యాలను చదివి వాటిలో సరైన వాటికి ( ) గుర్తున తప్పు అయిన వాటికి ( ) గుర్తును వ్రాయండి.

(క) రెండు పూర్ణ సంఖ్యల మొత్తము ఒక పూర్ణ సంఖ్య అగును.

(ఖ) రెండు పూర్ణ సంఖ్యల భేదము ఎల్లప్పుడు ఒక రుణాత్మక సంఖ్య అగును.

(గ) పూర్ణ సంఖ్యల సంకలన తత్సమాంశం '0' అగును.

(ఘ) రెండు పూర్ణ సంఖ్యలలో చిన్న సంఖ్య నుండి పెద్ద సంఖ్యను తీసివేయలేమా.

(ఙ) సున్నానుండి ఏదైనా సంఖ్యను తీసివేసినచో దాని ఫలితము ఎల్లప్పుడు ఋణాత్మకం.

2. క్రింది ఖాళీలను పూరించండి.

(క) $(+3) + (\quad) = 0$

(ఖ) $(+7) + (\quad) = 0$

(గ) -8 యొక్క సంకలన విలోమం ( ) అగును.

(ఘ) '0' యొక్క సంకలన విలోయం ( ) అగును.

(ఙ) పూర్ణ సంఖ్య ( ) దాని కంటే సంకలన విలయము.

3. క్రింది ప్రశ్నలకు బ్రాకెట్లులలో సరైన సమాదానాన్ని ఎంచుకొని ఖాళీలను పూరించండి.

(క) +3 యొక్క సంకలన విలోయము కంటె + 3( ) .... (పెద్దతి, చిన్నది)

(ఖ) +5 యొక్క సంకలన విలోయము కంటె - 5( ) .... (పెద్దతి, చిన్నది)

4. (క) రెండు పూర్ణ సంఖ్యలను వ్రాయండి. వాటి మొత్తము వాటిలో ప్రతీఒకదాని-కంటె ఎక్కువగా ఉండాలి.
(ఖ) రెండు పూర్ణ సంఖ్యలను వ్రాయండి. వాటి మొత్తం వాటిలో ప్రతీ ఒకదానికంటె తక్కువగా ఉండాలి.

5. $>, =, <$ గుర్తులలో సరైన గుర్తును వాటికి ఎదురుగా గల గదులలో వ్రాయండి.

(క) +3 యొక్క సంకలన విలోమము $\boxed{}$ -3 యొక్క సంకలన విలోమము

(ఖ) -5 యొక్క సంకలన విలోమము $\boxed{}$ -7 యొక్క సంకలన విలోమము

(గ) 3 యొక్క సంకలన విలోమము $\boxed{}$ 5 యొక్క సంకలన విలోమము

(ఘ) +9 యొక్క సంకలన విలోమము $\boxed{}$ -4 యొక్క సంకలన విలోమము

(ఙ) -4 యొక్క సంకలన విలోమము $\boxed{}$ 0 యొక్క సంకలన విలోమము

1.4. పూర్ణ సంఖ్యల గుణకార ప్రక్రియలు -

మనం సహజ సంఖ్యల గుణకార ప్రక్రియలను గూర్చి వరకే తెలుసుకున్నా. ఇప్పుడు పూర్ణ సంఖ్యలలో గుణకార ప్రక్రియలను గూర్చి తెలుసుకుందాం.

పూర్ణ సంఖ్యలు మూడు రకములు. అవి ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్యలు, ఋణాత్మక పూర్ణసంఖ్యలు మరియు ధనాత్మకము, ఋణాత్మకము కాని పూర్ణసంఖ్య 0 లకు సంబందించిన ప్రక్రియలను మనము తెలుసుకోవలసినది.

(క) ధనాత్మక సంఖ్యను ధనాత్మక సంఖ్యచే గుణించుట.

(ఖ) ధనాత్మక సంఖ్యను సున్నాతో గుణించుట.

(గ) ధనాత్మక సంఖ్యను ఋణాత్మక సంఖ్యచే గుణించుట.

(ఘ) సున్నాను ను ధనాత్మక సంఖ్యచే గుణించుట.

(ఙ) ఋణాత్మక సంఖ్యను ఋణాత్మక సంఖ్యచే గుణించుట.

(చ) ఋణాత్మక సంఖ్యకు ఋణాత్మక సంఖ్యచే గుణించుట.

(ఛ) ఈ విధంగా ఆరు ప్రక్రియలను చేయవలసి ఉంటింది.

(క) ధనాత్మక సంఖ్యను ధనాత్మక సంఖ్యచే గుణించుట -

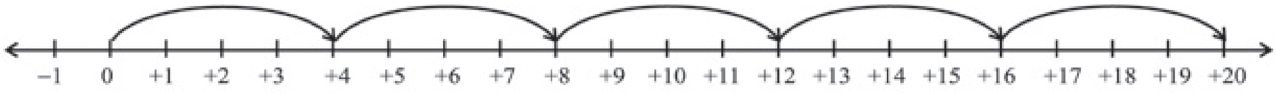
సహజ సంఖ్యల విషయంలో రెండు ధనాత్మక సంఖ్యల గుణకారం గూర్చి మనం తెలుసుకున్నాం. ఇచ్చట గుణకారంలు ఒక నిర్దిష్ట సంఖ్యకు అదే సంఖ్యను క్రమంగా కూడుట వలన దాని లబ్దము (గుణకారం) నిర్ణయించబడినది.

$5\times3=3+3+3+3+3$ లేక $5+5+5$

దీని ఫలితంగా ఒక ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్యకు వేరొక ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్య గుణకారాన్ని కూడ రదే కూడిక క్రమంలో తీసుకోవచ్చును.

$$\begin{aligned}(+5)\times(+4) &= (+4)+(+4)+(+4)+(+4)+(+4)\\ &=(+8)+(+4)+(+4)+(+4)\\ &=(+12)+(+4)+(+4)\\ &=(+16)+(+4)\\ &=+20\end{aligned}$$

ఈ ప్రక్రియను సంఖ్య రేఖకి చూపవచ్చును.



అదే విధంగా $(+6) \times (+3)$, $(+4) \times (+7)$ ల లబ్దన్ని కనుగొనండి.

రెండు ధనాత్మక సంఖ్యల లబ్దం ఒక ధనాత్మక సంఖ్య అగును.

(ఖ) ధనాత్మక సంఖ్యను సున్నాచే గుణించుట.

సహజ సంఖ్యలో సున్నాచే గుణకారం మనం తెలుసుకున్నాం.

$5 \times 0 = 0$ లేక $(+5) \times 0 = 0$

$0 \times 3 = 0$ లేక $0 \times (+3) = 0$

ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్యను ఋణాత్మక పూర్ణసంఖ్యచే గణించుట.

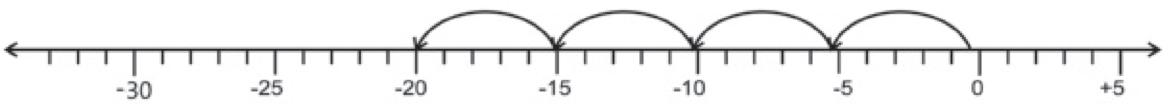
$$
\begin{aligned}
(+4) \times (+5) &= 4 \times 5 \\
&= 5+5+5+5 \\
&= 20
\end{aligned}
$$

4×5 అనగా 5 ను 4 సార్లు వడుట. అదేవిధంగా ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్యను ఋణాత్మక పూర్ణసంఖ్యచే గుణించవలెను. అనగా వరుస క్రమంలో కలపవలెను. మరొక విధంగా చెప్పవలెనంటే $4 \times (-5)$ ను మనం (-5) ను 4 సార్లు కలుపవచ్చును.

అనగా

$$
\begin{aligned}
(+4) \times (-5) &= 4 \times (-5) \\
&= (-5)+(-5)+(-5)+(-5) \\
&= (-10)+(-5)+(-5) \\
&= (-15)+(-5) \\
&= -20
\end{aligned}
$$

ప్రక్రియను సంఖ్యా రేఖపై చూపవచ్చును.



$(-5)+(-5)+(-5)+(-5) = -20$ అని మనం తెలుసుకున్నాం

కావున $4 \times (-5) = -20$

✍ సంఖ్యరేఖ సహాయంతో క్రింది వాని లబ్దాలను కనుగొనండి.

(క) $3 \times (-2)$ (ఖ) $4 \times (-3)$ (గ) $5 \times (-5)$ (ఘ) $5 \times (-8)$

మనకు తెలుసు -

ఒక ధనాత్మక పూర్ణ సంఖ్య × ఒక ఋణాత్మక పూర్ణసంఖ్య = ఋణాత్మక పూర్ణసంఖ్య

అది

రెండుసంఖ్యలు	లబ్ధం	లబ్ధంయొక్క మారొకరూపం
3, (–2)	–6	–(3×2)
4, (–3)	–12	–(4×3)
5, (–5)	–25	–(5×5)

పై గుణకారాన్ని క్రింది విధంగా క్లుప్తంగా చేయవచ్చును.

$4 \times (-5) = -(4\times 5) = -20$

$5\times(-3) = -(5\times 3) = -15$

(ఘ) ఋణ పూర్ణ సంఖ్యను ధన పూర్ణ సంఖ్యచే గుణించుట.

క్రింది లబ్దాలను పరిశీలించండి.

0 x 2 = 0
0 x 1 = 0
0 x 0 = 0
0 x (-1) = 0
0 x (-2) = 0
0 x (-3) = 0

(ఘ) ఋణ పూర్ణ సంఖ్యను ధన పూర్ణ సంఖ్యచే గుణించుట.

క్రింది లబ్దాలను పరిశీలించండి.

$4 \times 3 = 12$

$3 \times 3 = 9 \quad = 12-3$

$2 \times 3 = 6 \quad = 9-3$

$1 \times 3 = 3 \quad = 6-3$

$0 \times 3 = 0 \quad = 3-3$

$-1 \times 3 \quad = 0-(3) = -3$

పై విధంగా క్రింది పదాలను పూర్తి చేయండి.

$-2\times3 = -3-(\quad) =$....... (ముందు లబ్ధానికి 3 తక్కువ)

$-3\times3 = (\quad)-(\quad) =$....... (ముందు లబ్ధానికి 3 తక్కువ)

$-4\times3 = (\quad)-(\quad) =$....... (ముందు లబ్ధానికి 3 తక్కువ)

అని మనకు ఇది వరకే తెలుసు. $3\times(-4) = -12$

అందుచేత $(-3)\times4 = -12 = 4\times(-3)$

ఈ పద్ధతిలో క్రింది లబ్దాన్ని కనుగొనువచ్చును.

$-3 \times 5 = 5\times(-3) = -(5\times3) = -15$

కింది ఖాళీలను పూరించండి.

$-4\times6 = 6\times$(..........) = –(..........×.........) = ...

$-3\times8 =$ ....×(–3) = –(..........×.........) = ...

$-5\times4 =$ ....×(..........) = –(..........×..........) = ...

మనకు తెలుసు -

$3 \times (-5) = -(3 \times 5)$

$3 \times (-5) = -[3 \times (-5$ యొక్క సంకలన విలోయం)]

$= -(3 \times 5) = -15$

ఈ పద్ధతిని సాధారణంగా క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

a,b లురెండు ధనపూర్ణ సంఖ్యలు అయినచో $, \mathbf{a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)}$

మీకు తెలుసా

3 x -5 ను -{3 x(-5)} యొక్క సంకలన విలయం అని వ్రాయవచ్చును.

1. లబ్ధాలను కనుగొనండి.
   (క) $8 \times (-12)$ (ఖ) $14 \times (-9)$ (గ) $(-18) \times 8$ (ఘ) $(-16) \times 12$ (ఙ) $(-15) \times 16$
2. ఖాళీలను పూరించండి.
   (క) $15 \times (-18) = -(15 \times ....) = ...$
   (ఖ) $16 \times (-12) = -(........ \times 12) = ...$
   (గ) $(-18) \times 12 = -(........ \times ....) = ...$
   (ఘ) $(-21) \times 14 = -(........ \times ....) = ...$
   (ఙ) $(........) \times (-18) = (-18) \times 16 = -(........ \times ....) = ...$

3. రెండు రుణపూర్ణ సంఖ్యల గుణకారం -

5x(-4), (-7) x 6 యొక్క లబ్దం కనుగొనుట తెలుసుకున్నారు. ఇప్పుడు (-4) x (-3) లబ్ధన్ని ఎలా కనుగొనాలో తెలుసుకుందాం.

మీకు తెలుసు

$-4 \times 3 = -12$

$-4 \times 2 = -8 = -12 + 4$

$-4 \times 1 = -4 = -8 + 4$

$-4 \times 0 = 0 = -4 + 4$

అదేవిధంగా -

$-4 \times (-1) = 0 + 4 = +4$

చెప్పి చూడండి :
ఈ అరు గుణకారంలోని లబ్దన్ని గుర్చి ఎమైన గ్రహించితిరా! గుణకార (గుణకారంలోని రెండవ సంఖ్యలను తగ్గిందుట వలన లబ్దం ఎంత తగ్గుతుందో చూడండి.

అదేవిధంగా క్రింది వరుసలను చేయండి.

$(-4) \times (-2) = 4 + ... = ...$

$(-4) \times (-3) = ... + ... = ...$

(క) $(-4)x(-3)$ లబ్ధాన్ని కనుగొనిన విధంగాని $(-5)x4$నుండి ప్రారంభించి$(-5)x(-6)$లబ్ధాన్ని కనుగొనుము.

(ఖ) $(-6)x3$ నుండి ప్రారంభించి $(-6)x(-7)$ లబ్ధంను కనుగొనుము.

మీరు గమనించారు

మీరు గమనించారు-

ముందు చేసిన లబ్ధాన్ని పరిశీలించినచో

$(-4)x(-3) = +12$ (అనగా $(-4)x(-3) = (+4)x(+3)$

రెండు రణసంఖ్యల లబ్ధం ఆ సంఖ్యల యొక్క సంకలన ఎలోమాల లబ్ధం.

సంకేతముల ద్వారా దీనిని క్రింది విధంగా తెలియ చేయవచ్చు.

a మరియు bలు రెండు ధన పూర్ణసంఖ్యలు అయిన $(-a) \times (-b) = +(a \times b)$

మీకు తెలుసా ?

-a యొక్క సంకలన విలోమం a

-b యొక్క సంకలన విలోమం b

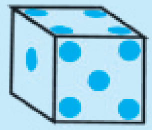
మీరు చేసి చూడండి :

- దిగువన చూపిన విధముగా బోర్డుని తీసుకొని -71 నుండి ప్రారంభించి 71 వరకు సంఖ్యలను వరుసక్రమములో వ్రాయండి.

−71	−70	−69	−68	−67	−66	−65	−64	−63	−62	−61
−50	−51	−52	−53	−54	−55	−56	−57	−58	−59	−60
−49	−48	−47	−46	−45	−44	−43	−42	−41	−40	−39
−28	−29	−30	−31	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−27	−26	−25	−24	−23	−22	−21	−20	−19	−18	−17
−6	−7	−8	−9	−10	−11	−12	−13	−14	−15	−16
−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71

ఒక సంచిలో నాలుగు లుడు పిక్కలను తీసుకొండి. వాటిలో రెండింటికి తెలుపు మరియు మిగిలిన రెండింటికి నలుపు రంగు వేయండి.

తెలుపు లుడు పిక్కపై గల బిందువుల సంఖ్యను ధనాత్మకంగాను. నలుపు లుడు పిక్కల పై గల సంఖ్యలను ఋణాత్మకంగాను తీసుకొనుము.



ప్రతీ ఆటగాడు ఒక్కొక్కసారి పిక్కలను వేస్తూ ఉండాలి. ప్రతి ఆటగాని ప్రారంభం, బోర్డులోని పట్టికలో 0 చే ప్రారంభకుగును. వివిధ ఆటగాళ్ళు వివిధ రంగులు గల ఉపయోగిస్తారు.

ఒక ఆటగాడు సంచిలో గల నాలుగు లుడు పిక్కలను చూడకుండా వాటిలో రెండు పిక్కలను తీసి క్రింద పడ వేయవలెను. ఆ రెండింటిపై ఉన్న బిందువులను లెక్కించి. వాటి లబ్ధంను కనుగొనవలెను. ఆ లబ్ధం అతని సంఖ్య అగును. తరువాత ఆ లుడు పిక్కలను తిరిగి సంచిలో వేయవలెను.

లబ్ధం ధనాత్మకం అయినచో 71 దిశగాను, లబ్దము ఋణాత్మకం అయినచో 71 దిశగాను తీసుకోవలెను. ఎవరు ముందుగా 71 ను చేరుకుంటారో వారు గెలుస్తారు.

ఒక వేల ఇద్దరు కంటె ఎక్కువమంది పిల్లలు ఆడుదురు. అప్పుడు గెలిచిన వారిని విడిచి మిగిలిన వారు ముందుకు వెళుదురు. ఈ విధంగా ఒకరి తరువాత ఒకరు గెలుస్తారు. ఎవరు ముందుగా 71 ను చేరుదురో వారు ప్రథమము, తరువాత వరుసక్రమంలో గెలుస్తు వచ్చిన వారు ద్వితీయం, తృతీయం ఈ విధంగా నిర్ణయించుదురు.

మొదటిగా స్థానాన్ని చేరిన వారుకు 10 పాయింట్లు ద్వితీయ స్థానాన్ని చేరిన వారిక 8 పాయింట్లు, ఈ విధంగా తృతీయ, చతుర్థ స్థానాలను చేరిన వారికి వరుసక్రమంలో 5, 3 పాయింట్స్ పోందురురు.

ఈ విధంగా

1.4.1 మూడు లేక అంతకంటె ఎక్కువ ఋణాత్మక సంఖ్యల.

గుణకార ప్రక్రియ రెండు ఋణపూర్ణ సంఖ్యల లబ్దం ఒక ధనత్మక సంఖ్య అని మనము తెలుసుకున్నాం. ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్యఒక ఋణపూర్ణ సంఖ్యల లబ్దం ఋణపూర్ణ సంఖ్య అని కూడా తెలుసుకున్నాం.

మీకు తెలుసా ?
క్రి.శ 1770 లో ఆయిలర్ అనే గణిత శాస్త్రతీత్త $(-1)\text{x}(-1)=+1$ అని ఋజువుచేసెరు.

ఇప్పుడు మూడు అంతకంటె ఎక్కువ ఋణపూర్ణ సంఖ్యలను తీసుకొని వాటి లబ్ధాన్ని కనుగొందాం రండి. మూడు సహజ సంఖ్యల గుణకారు పరి పరిధంగా కనుగున్నాం.

(క) $$(-5)\times(-3)\times(-4) = \{(-5)\times(-3)\}\times(-4)$$
$$= \{+(5\times3)\}\times(-4)$$
$$= (+15)\times(-4)$$
$$= -(15\times4) = -60$$

మూడు సంఖ్యలలో మొదటి రెండు సంఖ్యల లబ్ధాన్ని కనుగొని వచ్చు లబ్ధనికి మూడవ సంఖ్య చే గుణించాలి.

(ఖ) $(-5)\times(-3)\times(-4)\times(-2) = \{(-5)\times(-3)\times(-4)\}\times -2$

$= \{(-60)\times(-2)$ (క లో వచ్చిన లబ్ధాన్ని తీసుకోబడినది)]

$= +(60\times 2) = +120$

(గ) $(-5)\times(-3)\times(-4)\times(-2)\times(-6) = \{(-5)\times(-3)\times(-4)\times(-2)\}\times(-6)$

$= (+120)\times(-6)$ (ఖ లో వచ్చిన లబ్ధాన్ని తీసుకోబడినది)]

$= -(120\times 6) = -720$

పై లబ్ధాలను పరిశీలించండి. మీరు ఏమి గమనించారు.

- రెండు రూణపూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య
- మూడు ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ఒక ఋణపూర్ణసంఖ్య
- నాలుగు ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్య
- ఐదు ఋణపూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ఒక ఋణపూర్ణ సంఖ్య.

క్రింది పట్టికను పూర్తి చేయండి.

తీసుకొనబడిన ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల సంఖ్య	వచ్చు లబ్ధం (ఏ సంఖ్య)
రెండు	ధనపూర్ణ సంఖ్య
మూడు	
నాలుగు	
ఐదు	
ఆరు	
ఏడు	
ఎనిమిది	
తొమ్మిది	
పది	

పై పట్టిక నుండి మీరు ఏమి గమనించారు.

- సరిసంఖ్యలో రూణపూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య అగును.
- బేసి సంఖ్యలో రూణపూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ఒక ఋణపూర్ణ సంఖ్య అగును.

మీరు చేసి చూడండి

$(-1)\times(-1)=+1$

$(-1)\times(-1)\times(-1)=$.................

$(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)=$.................

$(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)=$.................

$(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)=$.................

(క) (-1) సరిసంఖ్యలు గుణించగా వచ్చు లబ్ధం ఎంత?

(ఖ) (-1) బేసి సంఖ్యలు గుణించగా వచ్చు లబ్ధం ఎంత ?

జవాబులు వ్రాయండి.

(క) లబ్ధం ఏ విధమగు సంఖ్య అగును?

(ఖ) లబ్ధం ఏ విధమగు సంఖ్య అగును?

(గ) పై రెండు లబ్ధాలలో ఏది ఋణపూర్ణ సంఖ్య కాగా. రెండవది ఋణపుర్ణ సంఖ్య అయెను ఎందువలన.

(ఘ) క్రింది సంఖ్యల పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ఏ విధమైన గుర్తును కలిగి ఉంటుందో గుర్తించండి.

(i) ఐదు రుణపూర్ణ సంఖ్యలు, రెండు ధనపూర్ణ సంఖ్యలు

(ii) రెండు ఋణపూర్ణసంఖ్యలు, ఐదు ధనపూర్ణ సంఖ్యలు

(iii) మూడు ఋణపూర్ణ సంఖ్యలు, ఐదు ధనపూర్ణ సంఖ్యలు

(iv) ఏనిమిది ఋణపూర్ణ సంఖ్యలు, ఏడు ధన పూర్ణ సంఖ్యలు.

1.5 పూర్ణ సంఖ్యల గుణకారంలో వివిధ ధర్మాలు

పూర్ణసంఖ్యలలో గుణకార ప్రక్రియలను గుర్చి తెలుసుకుందాం రండి.

(క) గుణకారం దృష్ఠా సంవృత నియమము

క్రింది రెండు పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం కనుగొనండి. లబ్ధం ఏ విధమైన సంఖ్య

ఉదా $(-3)\times(+4) = -12$	ఇది ఒక పూర్ణసంఖ్య
$(+5)\times(+7) =$	....
$(+6)\times(-4) =$	....
$(-5)\times(+8) =$	....
$(-7)\times(-6) =$	....

చెప్పి చూడండి

సంకలనం దృష్ట పూర్ణసంఖ్యల సంవృత నియమం ఏమిటి?

దీనిని బట్టి మీరు ఏమి తెలుసుకున్నారు.

రెండు పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ఒక పూర్ణసంఖ్య

ఈ విధంగా రెండు పూర్ణసంఖ్యలను చెప్పగలరా? వాటి లబ్ధం ఒక పూర్ణసంఖ్య కారాదు.

పిల్లలు అందరు చెప్పితిరి

రెండు పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం పూర్ణసంఖ్య కాని విధంగా రెండు పూర్ణసంఖ్యలను తెలియ చేయగలరా. అని అడిగిన

అటువంటి సంఖ్యలు లేవు అని తెలియచేయగలరు. కావున

రెండు పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ఎల్లప్పుడు ఒక పూర్ణసంఖ్య అగును.

> a మరియు b లు రెండు పూర్ణసంఖ్యలు అయిన
> axb కూడా ఒక పూర్ణసంఖ్య

అవగా

గుణాకారం దృష్ట్యా పూర్ణసంఖ్యలకు సంవృత నియమం (న్యాయం) వర్తించును.

(ఖ) పూర్ణ సంఖ్యలలో గుణకార స్థిత్యంతర న్యాయం.

మీరు చేసి చూడండి.

కింది పట్టికలో మొదటి నిలువ వరుస, రెండవ వరుసలలోని సంఖ్యల లబ్ధాలను కనుగొనండి. ఆ రెండింటి నుండి గ్రహించిన దానిని మూడవ నిలువ వరుసలో వ్రాయండి.

మొదట నిలువ వరుస ప్రవచనం -1	రెండవ నిలువ వరుస ప్రవచనం -2	మూడవ నిలువవరుస ప్రవచనం -3
$(+4)\times(-5) = -20$	$(-5)\times(+4) = -20$	$(+4)\times(-5)=(-5)\times(+4)$
$(+6)\times(+7) =$	$(+7)\times(+6) =$	
$(-8)\times(+9) =$	$(+9)\times(-8) =$	
$(-12)\times(-5) =$	$(-5)\times(-12) =$	
$(+18)\times(-4) =$	$(-4)\times(+18) =$	
$(+16)\times(-12) =$	$(-12)\times(+16) =$	
$(-12)\times 0 =$	$0 \times (-12) =$	

పై పట్టిక నుండి మీరు ఏమి గమనించారో వ్రాయుము.

రెండు పూర్ణసంఖ్యలను గుణించగా వచ్చు లబ్ధము ఆ సంఖ్యలను తారుమారు చేసి గుణించగా వచ్చు లబ్ధమునకు సమానము.

అందువలన పూర్ణసంఖ్యల గుణకారానికి స్థిత్యంతర న్యాయం వస్తుంది.

> a,b లు రెండు పూర్ణసంఖ్యలైన
> axb = bxa

(గ) గుణకార తత్సమాంశం

పూర్ణ సంఖ్యలలో సంకలను దృష్టా తత్సమాంశం గుర్చి తెలుసుకునారు.

$3+0=3, \quad -5+0=-5$ మొదలైన వాటినుండి ఏదైన పూర్ణ సంఖ్యకును కూడితే అదే పూర్ణసంఖ్య వచ్చును. కావున పూర్ణసంఖ్యలలో సంకలన తత్సమాంశం 0 అగును.

అదే విధంగా గుణకారా దృష్టా.

$+5\times1=+5$

$0\times1=0$

$-7\times1=-7$

కావున ఏదైనా ఒక పూర్ణసంఖ్య 1 చే గుణించగా వచ్చు లబ్ధను అదే పూర్ణసంఖ్య అగును.

ఒక పూర్ణసంఖ్య
అయిన ax1 = 1xa=a

దీనిని గుణకార తత్సమ న్యాయం అంటారు. 1 ను గుణకార తత్సమాంశం అంటారు. ఒక పూర్ణసంఖ్యను -1 చే గుణించగా వచ్చు లబ్ధం ఎంత అగునో తెలియజేయడ క్రింది గుణకార ప్రక్రియంలను పరిశీలించి చేయండి.

$(-4)\times(-1) = +(4\times1) = +4$ (-4 యొక్క సంకలన విలోమము +4)

$(+3)\times(-1) = -(3\times1) = -3$ (+3 యొక్క సంకలన విలోము -3)

$(-7)\times(-1) = \boxed{}$

$(-1)\times(+15) = \boxed{}$

$(-1)\times(-8) = \boxed{}$

$(+15)\times(-1) = \boxed{}$

మీకు తెలుసా ?
a యొక్క సంకలన విలోమం -a
-a యొక్క సంకలన విలోమం a

పై వాటి నుండి గ్రహించిన దానిని క్రింది సమకరణం ద్వారా తెలియచేయవచ్చును.

a ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన
$\mathbf{a\times(-1)=(-1)\times a=-}$అవునది యొక్క సంకలన విలోమం

(ఘ) గుణకార సహచర న్యాయం

-3, -2 మరియు 5 మూడు పూర్ణసంఖ్యలను తీసుకొని వాటి గుణకారం చేద్దాం.

$[(-3)\times(-2)]\times5=(+6)\times(+5)=+30$

$(-3)\times[(-2)\times5]=-3\times(-10)=+30$

మొదటిగ (-3), (-2) ల లబ్ధాన్ని కనుగొని లబ్ధానికి 5 చే గుణించగా 30 వచ్చును.

తరువాత -2, 5 లబ్ధాన్ని కనుగొని లబ్ధానికి -3 చే గుణించగా 30 వచ్చును.

కావున

$[(-3)\times(-2)]\times5=-3\times[(-2)\times5]$

3 పూర్ణ సంఖ్యలు గ్రుపుగా చేసి గుణించిపుడు లబ్ధ పూర్ణసంఖ్యలపై మాటి ప్రభరం చూపదు. అనగా పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం అనునది పూర్ణసంఖ్యలు గ్రుపుగా చేసి గుణించడంపై ఆధారవడురు. కావున
దానిని క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

a, b, c లు మూడు పూర్ణసంఖ్యలు
ఐన $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

పూర్ణసంఖ్యలో గుణకారం దృష్ఠా సహచర న్యాయం వర్తిస్తుంది. మనం ఈ విధంగా కేవలం రెండు సంఖ్యలను గుణకారం చేయగలము. కావున మూడు సంఖ్యల గుణకార చేయనపుడు తరువాత గుణకారం సులభమగును.

కావున మనం సహచర న్యాయాన్ని ఉపయోగించి గుణకారం చేయగలం.

ఉదాహరణ - 1 -8, -7 మరియు -5 ల లబ్ధాన్ని కనుగొనుము.

దీనిని ఎన్ని విధములుగా గుణించగలమో చూద్దాం.

మొదటి రకం: $[(-8) \times (-7)] \times (-5) =$

రెండవ రకం: $(-8) \times [(-7) \times (-5)] =$

మూడవ రకం: $[(-8) \times (-5)] \times (-7) =$

చెప్పగలరేమో చూడండి.
ఈ మూడు రకాంలో ఏరకపు గుణకారం మనం సులభంగా ఉండును - ఎందువలన !

(జ) సంకలనం పై గుణకార విభాగన్నాయం.

సహజ సంఖ్యలలో సంకలనంపై గుణకార విభాగ న్యాయం మనం తెలుసుకున్నాం. క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా వాటిని మనము చేసుకుందాం రండి.

ఉదా : $4 \times (5+3) = (4 \times 5) + (4 \times 3)$

[(సంకలనంపై గుణకారం విభాజనం)]

పూర్ణసంఖ్యలలో దీనిని పరిశీలిద్దాం రండి.

(i) $(-2) \times (3+5) = (-2) \times 8 = -16$

$[(-2) \times 3] + [(-2) \times 5] = (-6) + (-10) = -16$

ఏవడి నుండి

$$(-2) \times (3+5) = [(-2) \times 3] + [(-2) \times 5]$$

క్రింది దానిని పరీక్షించి చూడండి.

(i) $3 \times [(-4) + (-5)] = [3 \times (-4)] + [3 \times (-5)]$

(ii) $-4 \times [(-3) + 2] = [(-4) \times (-3)] + [(-4) \times 2]$

పై రెండు సందర్భాలలో ఎడమపైపు విలువ, కుడిపై వు విలువకు సమానమా?

పూర్ణ సంఖ్యలలో సంకలను పై గుణకార విభాగ న్యాయం పాటించుననిరు తెలుసుకున్నాం దీనిని గుర్తుల ద్వారా క్రింది విధముగా సూచించవచ్చును.

a, b ଓ **c** లు ఏపైనా మూడు పూర్ణ సంఖ్యలు ఐన
$\mathbf{a \times (b + c) = a \times b + a \times c}$

దీనినే సంకలనంపై గుణకార విభాగ న్యాయం అంటారు.

క్రింది దానిని పరిశీలిద్ధాం.

$$4\times(3-8)=4\times3-4\times8$$

దీనిని చూడుము

$$4\times(3-8)=4\times(-5)=-20$$

మరియు $4\times3-4\times5=12-32=-20$

$$\therefore\ 4(3-8)=4\times3-4\times8$$

- $4\times[5+(-3)]=4\times5+4\times(-3)$
- $(-5)\times[(-4)+(-2)]=(-5)\times(-4)+(-5)\times(-2)$

మరొక ఉదాహరణ చుద్దాం.

$$(-5)\times[(-4)-(-6)]=(-5)\times[(-4)+6]$$
$$=(-5)\times(+2)=-10$$

మరియు $[(-5)\times(-4)]-[(-5)\times(-6)]=20-30=-10$

$$\therefore\ (-5)\times[(-4)-(-6)]=[(-5)\times(-4)]-[(-5)\times(-6)]$$

తిరిగి $(-9)\times[10-(-3)]$ ଏବଂ $[(-9)\times10]-[(-9)\times(-3)]$ ను తీసుకొని చేసిచూడండి.

మీరు ఏమి గమనించిదిరి.

వ్యవకలం పై గుణకార విభగ న్యాయమును ఉపయోగించవచ్చునో చూద్దాం రండి.

వ్యవకలనంపై గుణకార విభాగ న్యాయాన్ని వినియోగించు కోవచ్చును. అనగా వ్యవకలనంపై గుణకార విభగ న్యాయం పాటిస్తుంది.

గుర్తులను ఉపయోగించి క్రింది ఖరంగా సుచించుచ్చును.

a, b , c లు ఏపైన మూడు పూర్ణ సంఖ్యలు అయినచో
$\mathbf{a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)}$

దీనిని వ్యవకలనంపై గుణకార విభాగ న్యాయం అంటారు.

సమాదానలను కనుగొనండి.

(i) $10\times[6-(-2)]=10\times6-10\times(-2)$; సరైనదేనా?

(ii) $(-15)\times[(-7)-(-1)]=(-15)\times(-7)-(-15)\times(-1)$; సరైనదేనా?

(చ) సూన్నా చె పూర్ణ సంఖ్యల గుణకారం?

సంకలనం పై గుణకార విభాగ న్యాయన్ని అనుసరించి. క్రింది ప్రవచనాలు సరియైనవి.

(i) $(+3)\times[5+(-5)]=[(+3)\times5+(+3)\times(-5)]$

అనగా $(+3)\times0=(+15)+(-15)=0$

(ii) $(-5)\times[(-4)+4]=[(-5)\times(-4)+(-5)\times4]$

అనగా $(-5)\times0=(+20)+(-20)=0$

అదే విధంగా గుణకార విభాగ న్యాయన్ని అనుసరించి $0\text{x}[(-7)+(+7)$ యొక్క విలువను కనుగొనండి.

ప్రవచనం (i) లో ఒకధనపూర్ణసంఖ్య x0=0

ప్రవచనం (ii) లో ఒక ఋణపూర్ణ సంఖ్య x 0 = 0

పూర్ణసంఖ్యలలో స్థిత్యంతర న్యాయాన్ని అమసరించినచో

ధన పూర్ణ సంఖ్య x 0 = 0 x అదే ధన పూర్ణసంఖ్య = 0

ఋణపూర్ణ సంఖ్య x 0 = 0 x ఋణపూర్ణసంఖ్య = 0

పై ఉదాహరణల నుండి

ఒక పూర్ణసంఖ్య x 0 = 0

సంకేతముల ద్వారా పై తెలియజేయబడిన దానిని క్రింది విధముగా వ్రాయుచ్చున్న

a ఒక పూర్ణసంఖ్య అయినచో $\mathbf{a\times0=0\times a=0}$

మీకు తెలుసా?

3-5, 3+(-5) విలువలు ఒకటె అని తెలుసుకొండి (+2)x(3-5) మరియు (+2)x[3+)-5) ల విలువ వేరు వేరు కాదు. (+2)(3-5)=(+2)x3-(+2)x5 మరియు (+2)[3+(-5)=(+2)x3-(+2)x(-5)

మద్య ఎటువంటి తేడాలేదు. కావున పూర్ణసంఖ్యలలో సంకలన, వ్యవకలనులపై విభాగ న్యాయములు ఒకటే.

1.5.1 సులభంగా గుణకారం చేయుట ?

(-25)x37x4 ల రెండు విధములుగా గుణకారం చేయవచ్చును.

మొదటి పద్ధతి	రెండవ పద్ధతి
$(-25)\times37\times4=[(-25)\times37]\times4$ $=(-925)\times4=-3700$	$(-25)\times37\times4=[(-25)\times4]\times37$ $=(-100)\times37=-3700$

పై రెండు పద్ధతులలో సులభమైన పద్ధతి ఏది? ఎందువలన?

రెండవ పద్ధతిలో స్థిత్యంతర న్యాయం, విభాగన్యాయంలు ఉపయోగించడమయినది. స్థిత్యంతర న్యాయం, విభాగ న్యాయలను పయోగించి ఏ విధంగా గుణకారం చేయవచ్చునో క్రింది ఉదాహరణలను చూడండి.

(క) 16x12 లబ్ధాన్ని కనుగొనండి !

(క) 16×12 లబ్ధాన్ని కనుగొనండి !

16×12 ను $16\times(10+2)$ గా వ్రాయవచ్చును.

కావున $16\times12=16\times(10+2)=16\times10+16\times2=160+32=192$

(ఖ) $(-23)\times 48 = (-23)(50-2) = (-23)\times 50 - (-23)\times 2 = (-1150) - (-46)$

$= -1150 + 46 = -1104$

విభాగ న్యాయం ఉపయోగించి గుణకారం చేయండి.

(క) $(-49)\times 18$; (ఖ) $(-25)\times(-31)$ (గ) $70\times(-19)+(-1)\times 70$

ఉదాహరణ

లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

(i) $(-18)\times(-10)\times 9$ (ii) $(-20)\times(-2)\times(-5)\times 7$

సమాదానం

(i) $(-18)\times(-10)\times 9 = [(-18)\times(-10)]\times 9 = 180\times 9 = 1620$

(ii) $(-20)\times(-2)\times(-5)\times 7 = (-20)\times[(-2)\times(-5)]\times 7$

$= [(-20)\times 10]\times 7 = (-200)\times 7 = -1400$

ఉదాహరణ

ఒక తరగతికి ఇవ్వబడిన పరీక్షాపత్రంలో 15 ప్రశ్నలున్నవి. ప్రతి సరైన జవాబుకు 4 మార్కులు. ప్రతి తప్పు జవాబుకు (-2) మార్కులు కాటియిస్తారు.

సీమ అన్ని ప్రశ్నలకు జవాబులు రాస్తే 9 మాత్రకు సరైనవి. అయిన ఆమెకు వచ్చిన మార్కులు ఎన్ని.

సమాధానం - ప్రశ్న పత్రంలో ఇవ్వబడిన ప్రశ్నలు 15

ప్రతి సరైన జవాబుకు గల మార్కులు 4 మార్కులు

సీమ వ్రాసిన సరైన ప్రశ్నలు 9

9 సరైన సమాదానాలకు వచ్చిన మార్కులు = 9x4=36 మరియు

తప్పు సమాధానాలు = 15-9 = 6

ప్రతి తపు సమాధానానికి గల మార్కులు -2 మరియు

6 తప్పు సమాదానంలకు గల మార్కులు = 6x(-2)=-12 మరియు

కావున సీమకు వచ్చిన మార్కులు = 36+(-12)=36-12=24

ఉదాహరణ

భూతలం నుండి పైకి పోతున్న కొలది ఎంత్తు దనపూర్ణసంఖ్యగాను, భూగర్భంలోనికి వెళ్తున్న కొలది లోతు ఋణపూర్ణసంఖ్య ఉంటుంది. దీనిని బట్టి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానం రాయండి.

(క) గనిని త్రవ్వేయంత్రం ప్రతి నిమిషానికి 5 మీటర్లు లోతుకు పోతుంది. అయిన ఒక గందిలో అది ఎంత లోతుకు పోతుందో ఏ సంఖ్య ద్వారా సూచించబడును (యంత్రం, భుతలపై ఉన్నట్లు భివిరించవలెను)

(ఖ) ఒక వేళ యంత్రం భూతలం నుండి 15 మీ. ఎత్తులో ఉంది అచ్చట నుండి గని లోనికి మునువట వేగంలో త్రవున 45 నిమిషాల తరువాత అది ఎచ్చట (ఎంత లోతులో) ఉంటుందో ఏ సంఖ్యచే సూచిస్తారు.

సమాదానం

యంత్రం భూతలంతలంలోకి పోవుటచే దాని (స్థానం) ఋణత్మకం అగును. ప్రతి నిమషమునకు దాని స్థానం -5 మీ. మారును.

ఒక గంట లేక 60 నిమిషములలో దాని (స్థానం) (-5) x 600 మీ - 300 మీ.

దాని మొదటి స్థానం భూతలంపై ఉండుట వలన దాని స్థానం '0' మీ. అవుతుంది.

0 + (-300) = -300 మీ. 300 మీ.

ఆ యంత్రం భుతలం నుండి 300 మీ. లోతులో ఉంది.

(ఖ) 45 నిమిషములలో యంత్రము లోతు = (-5) x 45= -225 మీ.

అనగా మొదటి స్థానంనుండి 225 మీ. లోతులో ఉన్నది.

కావున దాని చివరి స్థానం = (+15) + (-225) = 210 మీ.

అనగా యంత్రం భూతలం నూండి 210 మీ లోతులో ఉంది.

అభ్యాసం 1.3

1. లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

(క) $3 \times (-2)$ (ఖ) $(-1) \times 222$ (గ) $(-24) \times (-25)$ (ఘ) $(-348) \times (-1)$

(ఙ) $(-12) \times 0 \times (-16)$ (చ) $(-8) \times (-15) \times 10$ (ఛ) $18 \times (-6) \times (-5)$ (జ) $(-22) \times (-5) \times (-8)$

(ఝ) $(-1) \times (+2) \times (-3) \times (-4)$ (ఞ) $(-7) \times (-5) \times (-8) \times (-1)$

2. క్రింది వానిని సరిచూడండి..

(క) $18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$

(ఖ) $(-24) \times [(-6) + (-3)] = [(-24) \times (-6)] + [(-24) \times (-3)]$

3. .(క) a ఒక ఋణాత్మక పూర్ణసంఖ్య అయిన

(-1) x a యొక్క విలువ ఎంత అగును.

(ఖ) ఏ పూర్ణసంఖ్యను (-1) చే గుణించినచో క్రిందిలబ్ధం వచ్చును.

(i) -34 (ii) 42 (iii) 0

4. (-1×5) నుండి ప్రారంభించి గుణకారంలో వివిధ క్రమల ద్వారా (-1) x (-1) = 1 అని చూపించండి

5. సరైన ధర్మాలను ఉపయోగించి క్రింది నానిని గుణన చేయండి.

(క) $24 \times (-47) + (-47) \times (-14)$ (ఖ) $8 \times 48 \times (-125)$ (గ) $15 \times (-25) \times (-4) \times (-10)$

(ఘ) $(-46) \times 102$ (ఙ) $8 \times (50-2)$ (చ) $625 \times (-35) + (-625) \times 65$

(ఛ) $(-17) \times (-29)$ (జ) $(-57) \times (-19) + 57$

6. ఒక గది యొక్క ఉష్ణోగ్రత 40 డిగ్రీల సెల్సియస్ ఉన్నది. ఆ గదిలో గల ఎ.సి ప్రతీ గంటకు 5 డిగ్రీల సెల్సియస్ ఉష్ణోగ్రత తగ్గించిన ఎడల 10 గం. తరువాత ఆ గది యొక్క ఉష్ణోగ్రత ఎంత?

7. జేమ్స ఇంటి ముందునే తూర్పు, పడమర దిశగా ఒక రోడ్డు పోతుంది. ఇంటి నుండి సైకిలి పై బయలు దారి తూర్పు దిశగా 8 కీ.మి. దూరం క అనిన్నా చేరుకోనెను. క నుండి పడముర 12 కీ.మి. దూరం వేళ్ళి ఖ అనే స్థానాన్ని చేరుకొనెను. క) క స్థానం జేమ్సు ఇంటి నుండి తూర్పు దోరం ఉన్నది. తూర్పు దిశలో స్థానాలు ధానాత్మక గాను, పడముర దిశలో స్థానాలు ఋణత్మకంగాను తీసుకొనచో క మరియు ఖ ల ఉంకిని తెలియచేయుడం ఏ ఏ సంకలను వాడుదురు. ఖ) కాని క స్థానం 10 ద్వారా సూచించబడినచో ఖ స్థానం -6 ద్వారా సూచించబడినది. అవుడు క స్థానానికి ఏ దీశలో ఖ స్థానం కలదు రెండు స్థానం మధ్య దూరం ఎంత?

8. ఖాళీలను పూరించండి.

(క) $-5 \times (..........) = 40$ (గ) $7 \times (.............) = -63$

(ఖ) $(...............) \times (-12) = -96$ (ఘ) $(...........) \times (-11) = 99$

1.6 పూర్ణ సంఖ్యల భాగాహారం-

భాగహరం, గుణకారంనకు విలోమ ప్రక్రియ అని మనకు తెలుసుకొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిచండి.

కావున $4 \times 6 = 24$

అదేవిధంగా $24 \div 4 = 6$ మరియు $24 \div 6 = 41$

అనగా సహజ సంఖ్యలలో ప్రరి గుణకారానికి రెండు భాగాలోల వాక్యాలు ఉంటాయని చెప్పవచ్చు.

మీకు తెలుసా ?

మీకు తెలుసా ?

గుణఫల ఆకారంలో

గుణ్యం $\times$ గుణకం = గుణఫలం

భాగఫల ఆకారంలో

గుణఫలం - భాజ్యం

గుణ్యం - భాజకం

గుణకం - భాగఫలం

మీరు చేసి చూడండి.

ఇచ్చిన గుణకారాను భాగహారాలుగా వ్రాయండి.

క్రింది పట్టకలో గల గుణకారంలను భాగాహాలుగా చుపండి.

గుణాకార వ్యాక్యాలు	భాగాహర వాక్యాలు
$4 \times (-7) = -28$	$(-28) \div (-7) = 4$ ల $(-28) \div 4 = (-7)$
$(-6) \times 8 = -48$	
$(-9) \times (-7) = 63$	
$(-7) \times 5 = ...$	
$(-9) \times 6 = ...$	
$7 \times (-8) = ...$	
$(-12) \times (-4) = ...$	

పై పట్టిక నుండి నీమికు చెప్పగలవు.

$(-28) \div 4 = -7$
$(-48) \div 8 = -6$
$(-35) \div 5 = -7$
$(-56) \div 7 = -8$

మనము ఏమి గమనించామంటె

$(-28) \div 4 = -(28 \div 4) = -7$
$(-48) \div 8 = -(48 \div 8) = -6$

చెప్పండి చూద్దాం.
భాగఫలం ఋణాత్మక సంఖ్య అయినట్లు నాలుగు భాగక్రియలను చెప్పండి.

- మనం తెలుసుకున్నది.

$63 \div (-9) = -7$ మరియు $63 \div (-7) = -9$

$48 \div (-12) = -4$ మరియు $48 \div (-4) = -12$

దీనిని పంకీతల ద్వారా తెలియుచేనిన

a, b ౘ c మరియు C లు మూడు ధన పూర్ణ సంఖ్యలు $\mathbf{a \div b = c}$ అయిన

$$(-a) \div b = a \div (-b) = -(a \div b) = -c$$

✍ భాగాఫలంను కనుగొనండి.

(క) $96 \div (-12)$ (ఖ) $104 \div (-13)$ (గ) $112 \div (-14)$

- ఏ పట్టిక నుండి మరికొన్ని క్రింది విషయాలను గూర్చి తెలుసుకోగలుగుతాం.

$(-28) \div (-7) = 4$, $(-48) \div (-6) = 8$, $(-54) \div (-9) = 6$

మనం గమనించినది (తెలుసుకొనుము)

$(-28) \div (-7) = +(28 \div 7) = 4$
$(-48) \div (-6) = +(48 \div 6) = 8$
$(-56) \div (-8) = +(56 \div 8) = 7$

పై వాటిని గమనించిన మనకు వాటిని క్రింది విధంగా వ్రాయువచ్చు.

a, b ౘ c లు ధన పూర్ణసంఖ్యలు $\mathbf{a \div b = c}$ అయినచో

$$(-a) \div (-b) = a \div b = c$$

✍ భాగాఫలంను కనుగొనండి.

(క) $(-32) \div (-8)$ (ఖ) $(-45) \div (-9)$ (గ) $(-48) \div (-6)$

1.7 భాగాహరం గూర్చి తెలుసుకోవలిసిన సంఖ్యలు.

పూర్ణ సంఖ్యల గూణాకారంలో ధన్మలు భాగాహరానికి వర్తించునా? భాగాహర రెండు పూర్ణసంఖ్యలలో గుణాకారం

- సంవృత నియమమును పాటించును.

ప్రరజకం	ఫలాలు
$(-8) \div 2 = -4$	భాగఫల పూర్ణసంఖ్య
$(-36) \div (-9) = 4$	భాగఫల పూర్ణసంఖ్య
$(48) \div (-12) = -4$	భాగఫల పూర్ణసంఖ్య
$(-12) \div 5 =\ ?$	భాగఫల పూర్ణసంఖ్య

మనం గమనించినది

ఒక పూర్ణసంఖ్య మరొక పూర్ణసంఖ్యచే భాగించగా వచ్చే భాగఫలం వేల్లప్పుడు పూర్ణసంఖ్య కాదు.

కావున పూర్ణసంఖ్యలలో భాగాహరానికి సంవృత ధర్మం వర్తింతదు.

పూర్ణసంఖ్యలో గుణాకారానికి స్థిత్యంతర న్యాయం వర్తించును.

మీకు తెలుసా?
పూర్ణసంఖ్యల గుణకారాంలో స్థిత్యంతర న్యాయం వర్తించును.

- భాగాహారంలో స్థిత్యంతర వర్తించును.

$(-8) \div 2 = \_\_\_\_\_$, $2 \div (-8) = \_\_\_\_\_$

పై రెండింటి భాగఫలంలు సమానమా? దీనినుండి మనం ఏమి గమనించాం.

పూర్ణసంఖ్యలలో భాగాహరానికి స్థిత్యంతర న్యాయం వర్తించదు.

- పూర్ణ సంఖ్యలలో గుణాకారానికి సహజర నాయ్యం వర్తించును.

భాగాహరంలో సహజర న్యాయం వర్తించునా గమనిచ్చాం రండి

$[(-8) \div 4] \div (-2) = (-2) \div (-2) = 1$

$(-8) \div [4 \div (-2)] = (-8) \div (-2) = 4$

$[(-8) \div 4] \div (-2)$ ఇంకా $(-8) \div [4 \div (-2)]$ విలువు సమానము అగునా?

దీనినుండి ఏమి గమనించారు.

పూర్ణసంఖ్యలలో భాగా హరానికి సహచర న్యాయం వర్తించరు.

పూర్ణ సంఖ్యలలో ఏదైని ఒక పూర్ణసంఖ్య అదేపూర్ణసంఖ్య అగును.

భాగాహర ప్రక్రియంలో మనం గమనించినది.

ఎందుకనగా

ఎందుకనగా

పూర్ణ సంఖ్యలలో ఏదేని ఒక పూర్ణసంఖ్య అయినచో అనునది యొక్క సంకలన విలోమం

మనం గమనించినది

$8 \div (-1) = -8$ అనునది యొక్క సంకలన విలోయం

$(-5) \div (-1) = 5$ అనునది యొక్క సంకలన విలోయం

$0 \div (-1) = 0$ అనునది యొక్క సంకలన విలోయం

అందువలన

ఏదేని ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన అనునది యొక్క సంకలన విలోయం.

- సహజ సంఖ్యలలో ద్వారా భాగాహారం నిర్వచించుబడదు.

అనగా నిర్ణబించబడదు.

పూర్ణ సంఖ్యలలో దీనిని గమనిద్దాం.

యొక్క భాగఫలం ఎంత

ఎందుకనగా

అదేవిధంగా

చెసి చూడండి.
కు ఏ సంఖ్యచే గుణించిన లబ్ధం వచ్చునది. అటువంటి సంఖ్య ఉన్నదో కారణను తెలియచేయండి.

సంఖ్యను 0 చే గుణించిన లబ్దం -5 వచ్చును.
అనగా (-5) 0 కూడా నిర్ణచించబడను ఎంత?
పరిశీలిద్దాం రండి ఏ సంఖ్య అగును.

కావున యొక్క భాగఫలం ఒక నిర్దిష్ట సంఖ్య అగునా! కాదు అని మనం గ్రహించగలరు.
ఏదేని ఒక పూర్ణసఖ్యకు 0 చే భాగాహారం నిర్ణబించబడదు.

ఒక పూర్ణసంఖ్యను 0 చే భాగించబడడం అర్ధరషితం భాగాహరానికి సంబంధించి క్రింది విషయాలను పరీశీలించండి.

ఉదాహరణ - ఒక పరిక్షలో రాధ అన్ని ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయగా 5 మార్కులు తప్పు జవాబుకు -2 మార్కులు ఇవ్వడమయింది.

ఆ పరిక్షలో రాధ అన్ని ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయగా 10 స్రానవి 30 మార్కులు పోందింది. అయిన పరీక్షలో ఏన్ని ప్రశ్నలు అడిగారు.

మాధవ అన్ని ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయి లేక పోయాడు. 7 ప్రశ్నలకు సరైనవి కాదు 19 మార్కులు పోందాడు. అయిన అతడు ఎన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయగలిగాడు.

సమాధన ఒక్కొక్క సరైన జవబుకు మార్కులు = 5

10 సరైన జవాబులకు మొత్తం మార్కులు = 5 ×10 = 50

రాధకు వచ్చిన మార్కులు = 30

తప్పు జవాబులకు ఇవ్వబడిన మార్కులు = 30 - 50

ఒకొక్కక్క తప్పు జవాబుకు మార్కులు = -2

రాధ తప్పు జవాబుల సంఖ్య = (-20)÷ (-2) 10

మొత్తం జవాబులు సంఖ్య = 10+ 10= 20

∴ ఏరోకలో అడిగిన మొత్తం ప్రశ్నల సరైన = 20

ఖ) మధవ రాసిన సరైన జవాబులు గల ప్రశ్నల సంఖ్య = 7

7 సరైన జవాబులకు మొత్తం మార్కులు = 5 ×7 = 35

మాధవకు వచ్చిన మార్కులు =19-35 = 16

ఒక్కొక్క తప్పు జవాబుకు మార్కులు -2

మాధవ తప్పు జవాబుల సంఖ్య = (-16)÷ (-2) = 8

మొత్తం జవాబుల సంఖ్య = 7+8 =15

(∴ సరైన జవాబులు రాసిన ప్రశ్నలు+ తప్పు జవాబులు రాసిన ప్రశ్నలు.)

ఉదాహరణ ఒక దుకాణ దారుడు ఒక్కొక్క పెన్ను అమ్మేడు రూ.1 లాభాన్ని. ఒకొక్క పాత పెన్సిలు అమ్మేడు 40 పైసల నష్టాన్ని పోందును.

రూ 5 నష్టం పోందిన నెలలో అమ్మిన పెన్నుల సంఖ్య 45 అయిన ఎన్ని పెన్సిళ్ళు అమ్మినాడు.

తరువాత నెలలో ఎటువంటి లభంగాని నష్టంగాని లేదు.70 పెన్నులను అమ్మిఉంటె ఎన్ని పెన్సిళ్ల అమ్మినాడు?

సాధన - ఒకొక్క పెన్ను అమకం వలన లాభం రూ.1

45 పెన్నుల అమకం వలన లాభం 1 45 అనగా రూ. 45 అనగా 45

మొత్తం నష్టము రూ. 5 అనగా -5

పెన్నలకై లాభం పెన్సిళ్ల పై నష్టం మొత్తం నష్టం (సమస్టలో)

పెన్సిళ్ల పై నష్టం మొత్తం నష్ట - పెన్నులపై లాభం

పైసలు

పైసలు

ఒక్కొక్క పెన్సిళ్ల పై నష్టము 40 పై అనగా -40 పైసలు

కబట్టి అమ్మిన పెన్సళ్ల సంఖ్య (-5000)

(ఖ) తరువాత నెలలో 70 పెన్నులపై పొందిన లాభం

అనగా

పొందిన మొత్తం లాభం

పెన్నులపై పెన్సిలపై నష్టం

70 పెన్నుల అమ్మికం పై వచ్చిన లాభం

పెన్సిళ్లపై నష్టం -70 అనగా - 7000 పైసలు

అమిన్న పెన్సిళ్ల సంఖ్య (-7000

175 పెన్సిళ్ళు

మీకు తెలుసా?
లభాన్ని ధనాత్మకంగాను నష్టాన్ని ఋణాత్మకంగాను పరిగణించ వలెను.

అభ్యాసం 1.4

అభ్యాసం 1.4

1. భాగఫలాలను కనుక్కోండి.

(క)	(ఖ)	(గ)
(ఘ)	(ఙ)	(చ)
(ఛ)	(జ)	(ఝ)
(ఞ)	(ట)	

2. మరియు లు మూడు పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన
నుు క్రింది విలువలను అధికంగా సరిచూడండి.

3. క) నాలుగు జతల పూర్ణసంఖ్యల లను రాయండి. అందు ఒక ధన పూర్ణంగా ననగా ఎందుకనగా.

ఖ) నాలుగు జతల పూర్ణసంఖ్యలు లను రాయండి. అది
ఒక ఋణ పూర్ణసంఖ్య ఏ విధంగా ననగా ఎందుకనగా

4. ఒక ప్రదేశంలో మధ్యాహ్నం 12 గాంటల సమయంలో ఉష్ణోగ్రత 00 కంటె 80 అధికం. అర్ధరాత్రి వరకు ప్రతీ గంటకు 20 ఉష్ణగ్రత తగ్గుతూ ఉంటే ఎపుడు అచ్చట ఉష్ణగ్రత 00 కంటె 60 తక్కువ ఉంటుంది. అర్ధరాత్రి 12 గంటలు సమయంలో ఉష్ణగ్రత ఎంత ఉంటుంది?

5. ఒక బొగ్గు గనిలో ఏర్పాటు చేయబడిన ఎలివేటరు నిమిషానికి 6 మీ. వేగంతో కిందికి దిగుతుంది. భూమట్టం కన్నా 10 మీ. ఎత్తునుండి బయలుదేరిన ఎలివేటులు -350 మీ. ప్రయాణించుచకు ఎంత సమయం పడుతుంది.

2వ అధ్యాయం

భిన్నాలు - దశాంశాలు

పరిచయం

భిన్నాలు-దశాంశభిన్నాలను గూర్చి క్రింది తరగతులలో నేర్చుకున్నాం. సమాన్య భిన్నాలలో క్రమ, అపక్రమ మిశ్రమ భిన్నాలు వాటి సంకలన, వ్యవకలనాలు ఎలా చేయాలో నేర్చుకున్నాం. అదేవిధంగా భిన్నాలను సరి పోల్చుట, సజతి భిన్నాలు విజాతి భిన్నాలు సంఖ్య రేఖలో స్థానాల నిరుపణతో పాటు సమభిన్నాలను గూర్చి నేర్చుకున్నాం.

అదే విధంగా దశాఇశ భిన్నాలకు సంబంధించిన దశాంశ భిన్నాలను సరిపోల్చుట, స్థాన విలువను అనుసరించి విస్తరించి వ్రాయుట. దశాంశభిన్నాలు వాటి సంకలన, వ్యవకలనాలు సంఖ్యా రేఖలపై వాటి స్థానం నిరుపణ మొదలగు విషయాలను గూర్చి నేర్చుకున్నాం.

ప్రస్తుతం భిన్నాలు, దశాంశభిన్నాలలో గుణకార, భాగాహరలను గూర్చి నేర్చు కోడం పోటు దశాంశ భిన్నాలను గూర్చి తెలుసుకోవలిసిన అవసరం ఉంది. భిన్నంలోని లవాన్ని, హరాన్ని సమన్య కారణాంకాల ద్వారా భాగించినచో అ భిన్నం యొక్క కనిష్ట రూపం లభించును.

పయత్నించండి.

$\frac{12}{18}$ ను కనిష్ట రూపంలోకి మార్చి వ్రాయండి.

- $\frac{12}{18}$ లో లవం 12 హరం 18.
- 12, 18 ల సామన్య కారణాంకాలు ఏవి?
- 12, 18 ల సామాన్య కారణాఇకాలలో పెద్దది ఏది?
- సమాన్య కాణంకం చే 12, 18 లను భాగిస్తే ఏ సంఖ్యలు వచ్చును.
- కావున $\frac{12}{18}$ యొక్క కనిష్ట రూపం ఏది?

$\frac{12}{18}$ యొక్క కనిష్ట రూపం $\frac{2}{3}$ అని గమనించగలరా?

అభ్యాసం 2.1

1. క్రింది భిన్నాలను సంఖ్య రేఖపై సూచించండి.

   (క) $\frac{2}{3}$ (ఖ) $\frac{3}{5}$ (గ) $\frac{7}{2}$

2. కింది దశాంశ భిన్నల యొక్క స్థాన విలువ అధారంగా విస్తరించి వ్రాయండి.

   (క) 21.52 (ఖ) 13.534 (గ) 2.25

3. క్రింద భిన్నాలు అహన క్రమంలో వ్రాయండి.

   (క) $\frac{2}{2},\frac{2}{3},\frac{8}{21}$ (ఖ) $\frac{1}{5},\frac{3}{7},\frac{7}{10}$

4. క్రింది భిన్నాలను కనుష్ట రూపంలో వ్రాయండి.

   (క) $\frac{8}{12}$ (ఖ) $\frac{10}{30}$ (గ) $\frac{27}{36}$

5. క్రింది భిన్నాలు మొత్తంను కనుగొనండి.

   (క) $4+\frac{7}{8}$ (ఖ) $2\frac{2}{3}+3\frac{1}{2}$ (గ) $\frac{7}{10}+\frac{2}{5}+1\frac{1}{2}$

6. క్రింది భిన్నాలను తీసివేయుము.

   (క) $\frac{9}{10}-\frac{4}{15}$ (ఖ) $8\frac{1}{2}-3\frac{5}{8}$ (గ) $7-\frac{5}{8}$

7. ఒక దీర్ఘ చతురాస్రాకారలో లోహపు రేకు పొడవు మరియు వెడల్పులు $12\frac{1}{2}$ వరుసగా $10\frac{2}{5}$ సెం.మీ. మరియు సెం.మీ. అయిన ఆరేకు చుట్టు కొలత ఎంతో?

8. రింకు రూ. 25.75 విలువ గల పుస్తకం కొని ఆ దుకాణ దారునికి రూ. 50 నోటు ఇచ్చెను. అయిన తిరిగి దుకాణు దారుడు రింకుకు ఎంత ఇచ్చెను.

2.2 భిన్నాలు గుణకారు :

ఇది వరకు సహజ సంఖ్యల గుణకారం గూర్చి మనం తెలుసుకున్నాం. క్రింఇది గుణకారలను గమనించిరి

5×7 = 5 సార్లు 7 ను కలపాలి

= 7+7+7+7+7

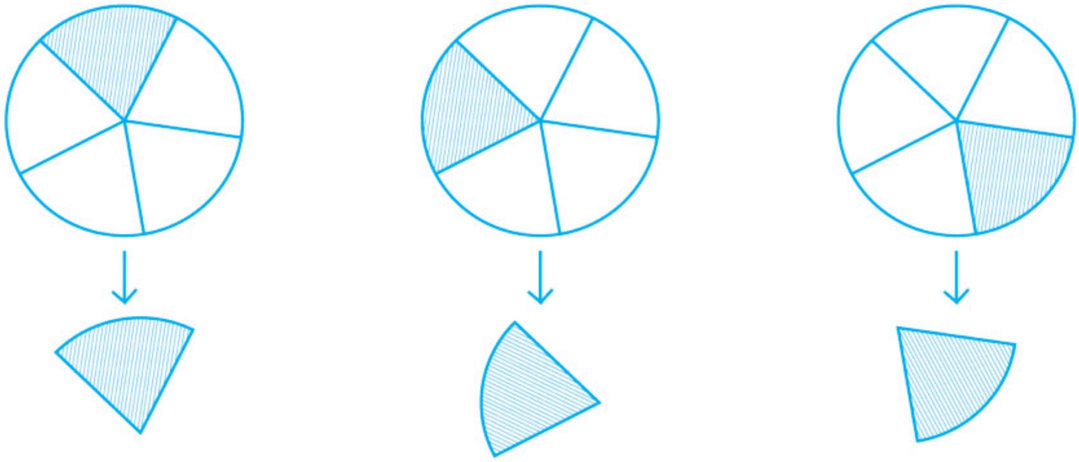
= 35

> **మీకు తెలుసా ?**
> ఏదేని ఒక సంఖ్య యొక్క క్రమమున కూడికనే గుణకారం అంటారు.

భిన్నాలలో గుణాకార ప్రక్రియలను గూర్చి నేర్చుకుందాం.

2.2.1 భిన్నాలు సహజ సంఖ్య చే గుణించుట.

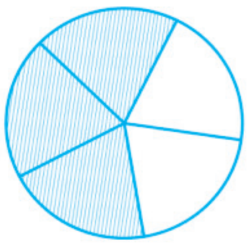
$3\times\frac{1}{5}$ అనగా మూడు సార్లు $\frac{1}{5}$ లను కూడవలెను. దానిని పాట్టం 2.1 లో దానిని చూడండి.



(పట్టం 2.1)

ఇచ్చట మూడు సమాన ఆకారాలను తీసుకొనడమయ్యినది. ప్రతీ దానిలో రంగు ల వంతుకు రంగు చేయడమైనది. .....

చేసిన ప్రతీ భాగాన్ని కత్తిరించి కింది ఆమర్చడమయ్యినది.



(పట్టం 2.1)

రంగు చేయబడిన మూడు భాగాలను ఒక దానిపై క్రింది విధంగా అమర్చబడినది. పటం 2.2 విధంగా మరొక వృత్తాన్ని తీసుకొని 5 సమాన భాగాలుగా విభజించడమయినది. మొదట కల్పి రాచిన కూడా భాగాలు దానిపై అమర్చవలెను.

పటంలో ఏమి కనిపించునో ఇప్పుడు తెలుయచేయండి.

పటంలో 5 సమాన భాగాంలో 3 భాఘాలను క్లడి చేయబడినట్లు కనబడుతుంది.

కావున $3\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

అని మనం చేపగలం. $3\times\frac{1}{5}=\frac{3\times1}{5}=\frac{3}{5}$

పూర్ణసంఖ్య 3 ను భిన్నం యొక్క లవం చే గుణించినచో అ లబ్దం నుండి లవం వచ్చును. భిన్నంలోని హారం లబ్ధం యొక్క హారం అగును.

క్రింది ఉదాహరణలను చూడండి.

ఉదాహరణ - 1 3 మరియు $\frac{2}{7}$ ల లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

సాధన - $3\times\frac{2}{7}=\frac{3\times2}{7}=\frac{6}{7}$

ఉదాహరణ 2 - 4 మరియు $\frac{3}{5}$ ల లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

సాధనా - $4\times\frac{3}{5}=\frac{4\times3}{5}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$

మీకు తెలుసా?

లబ్ధం అపక్రమ లబ్ధం అయిన దానిని మిశ్రమ భిన్నముగా మార్చుకో వచ్చును.

జవాబులు వ్రాయండి.

క) $2\times\frac{2}{5}=\frac{2\times\dots\dots}{\dots\dots}=\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

ఖ) $3\times\frac{5}{7}=\frac{\dots\times\dots}{\dots\dots}=\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

పై వాటి నుండి లభించిన సమాధానములు క్రమ భిన్నములా? అసక్రమ భిన్నములా?

అపక్రమ భిన్నము అయినచో ధానిని మిశ్రమ భిన్నములోనికి మార్చి వ్రాయండి.

ఉదాహరణ-3 : సమీరు వద్ద రూ. 28 కలవు. అందులో $\frac{1}{4}$ ల వంతు తన తమ్ముడు సంజయకు ఇచ్చెను. అయిన అతడు సంజయకు ఎన్ని రూపాయలు ఇచ్చెను?

సాధన-28 లో $\frac{1}{4}$ వ వంతు=28 యొక్క 4 భాగాలలో 1 భాగం $=28\div4=7$

మనకు తెలుసు: $28\times\frac{1}{4}=\frac{28\times1}{4}=\frac{28}{4}=7$

$\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{4}{5}$ లను గుణించాలని అనుకుందాం.

$\frac{2}{3}x\frac{4}{5}$ ను $\frac{2}{3}$ లు $\frac{4}{5}$ ల మొత్తం అని చెప్పగలమా?

కారణం ను తెలియతేయండి.

అపుడు $\frac{2}{3}x\frac{4}{5}$ ను ఎ విధంగా గుణించగలమో

మీకు తెలుసా ?

2/3 సంఖ్య అని చెప్పలేం.
మనం 1వ, 2వ, 5వ, అని చెప్పగలము మరియు అర్థం చేయగలం. దీనికి కారణం లెక్కించుటకు సహజసంఖ్యలను వాడుదుము. కాని భిన్నాలను వాడలేము.

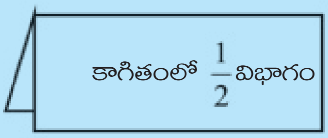
మీరు ప్రయత్నించండి :

- పటం 2.3లో చూపిన విధంగా ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకర కాగితాన్ని తీసుకొనుము.
- తీసుకొనిన కాగితాన్ని రెండు సమాన భాగాలుగా మడత పెట్టండి.

  మడత పెట్టిన భాగాలకు $\frac{1}{2}$ అని వ్రాయుము.
- రెండు భాగాలుగా చిన్న కాగితాన్ని మూడు సమాన భాగాలుగా మడత పెట్టుము. [( )]

2.3 పాటం (గ) లో చూసిన భాగం తీసుకున్న కాగితం యొక్క $\frac{1}{3}$ లో వంతు.

పటం (గ) లో విధంగా మడత పెట్టిన కాగితంపై క్షేచి చేయండి క్షేచి చేసిన భాగం మొదటి తీసుకున్న $\frac{1}{2}$ భాగంలో $\frac{1}{3}$ వ వంతు.



[( )]

ఇప్పుడు మడత పెట్టిన కాగితమును విర్చుండి. మడత వున్న కాగితాన్ని పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి.

క) కాగితం పైన గల మడతలు ఆధారంగా కాగితం ఎన్ని సమాన భాగాలుగా విభజించబడింది.

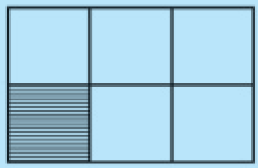
[ ]

ఖ) కాగితంపై క్షేచి చేయబడిన భాగం కాగితంలోని ఎన్నవ సమాన భాగము?

గ) క్షేచ్ చేయబడిన భాగము సూచించిన భిన్నం ఎంత?

దాని నుండి మనం ఏమి తెలుసుకున్నాం.

కాగితంలో $\frac{1}{2}$ లో $\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ అనగా $\frac{1}{3} x \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$



మీరు ప్రయత్నించండి :

- దీర్ఘ చతురస్రాకారంలో గల కాగుతపు ముక్కను తీసుకొనుము.
- ఆ కాగితపు ముక్కను నాలుగు సమానభాగాలుగా మడత పెట్టుము.
- మడత పెట్టిన కాగితాన్ని మరళ 2 సమాన భాగాలుగా మాడత పెట్టుము.
- మడత పెట్టిన కాగితం పైన గల ఒక ప్రక్కకు రంగు చేయుము.
- మడత పెట్టిన కాగితం మడతలను తెరనండి.

కాగితాన్ని చూసి కింది ఖాళీలను పూరించండి.

(a) కాగితాన్ని ....సమాన భాగాలుగా విభజించడము అయినది,

(b) కాగితంలోని.............................. సమాన భగాలలో .... సమాన భాగాలకు రంగు వేయడం

(c) అయినది.

(d) కాగితంలో..............................భగానికి రంగు వేయబడినది.

కాగితాను మొదట .... సమాన భాగాలలో రంగు వేయబడినది తరువాత ఆ మడత

(e) పట్టిన కాగితాన్ని..............................భాగం రంగు వేయబడినది.

- దీనిని బట్టి మనం ఏమి తెలుసుకున్నాం?

..................× .... = $\frac{1}{8}$

ప్రస్తుతం చూడండి $\frac{1}{8} = \frac{1\times1}{4\times2}$

కావున $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1\times1}{4\times2} = \frac{1}{8}$

మనం తెలుసుకున్నాం

- రెండు భిన్నాల లబ్ధం కూడా ఒక భిన్నం అగును.
- లబ్ధం యొక్క లవం = గుణకారం చేయబడిన రెండు భిన్నాల లవాల లబ్ధం యొక్క హారం = గుణకారం చేయబడిన రెండు భిన్నాల హారాల లబ్ధం అనగా మరొక విధంగా రెండు భిన్నాల లబ్ధం కనుగొందాం రండ

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{1\times1}{5\times7} = \frac{1}{35}$$

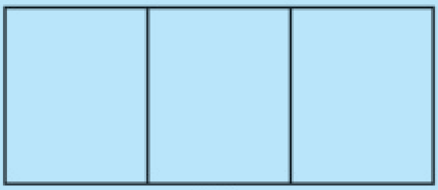
చెప్పి చూడండి :

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ యొక్క లబ్ధం తెలుసుకొనుటకు

- దీర్ఘ చతురస్రాకార కాగితాన్ని మొదట ఎన్ని సమాన భగాలుగా మడత పెట్టవచ్చు.
- మడత పెట్టిబడిన కాగితాన్ని మరళ ఎన్ని భగాలుగా మడత పెట్టవలెను.

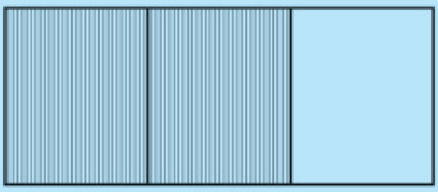
స్వయంగా ప్రయత్నించిచూడండి :

- దీర్ఘ చతురస్రాకారంలో గల కాగితాన్ని తీసుకోనుము.
పై నుండి క్రిందకు ఒక గీతలను గీచి మూడు సమాన భాగాలుగా చేయుము. అందులో రెండు భగాలను నలుపు సిరాతో పై నుండి కిందకు గీతలు గీయండి. (పటం ఖ



( )

- ఎడమ నుండి కుడికి కాగితంపై గీతలు గీసి 4 సమాన భాగాలుగా చేయడం. (కాగితాన్ని 4 సమాన భగాలుగా చేసి తరువాత గీతలు గీచి స్కేలు సహాయంతో గదులను నిర్మించండి.
- 1 ప్రస్తుతం 4 సమాన భాగాలలో 3 భాగాలకు ఎరుపు సిరాతో ఎడమ నుండి కుడికి గీతలు గీయండి.



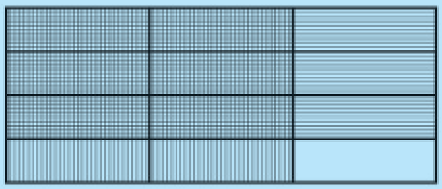
( )

క) కాగితంలో......................భాగాలు పై నుండి కిందికి గీతలు గీయడమయ్యింది.

ఖ) నల్ల సీరాతో గీతలు గీసిన ల భాగంలో ....
భాగంనందు ఎర్ర సిరాతో గీతలు గీయడమయ్యింది.

గ) కాగితంపై....................... యొక్క .... భగంలో నలుపు ఎరుపు గీతలు గీయబడినవి.

ఘ) కాగితంపై గల 12 చిన్న చిన్న భగాలలో......................భగాలలో నలుపు, ఎరుపు రెండు రకాల గీతలు కలవు.



( )

మీకు తెలుసు : $\frac{2}{3}$ లో $\frac{3}{4} = \frac{6}{12}$ లేక $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{6}{12}$

కాని $\frac{6}{12} = \frac{2\times3}{3\times4}$

కావున $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{2\times3}{3\times4}$

మనం ఇచ్చట తెలుసుకున్నాం.

- ౦౦డు భిన్నాల లబ్ధం ఒక భిన్నం అవుతుంది.
- లబ్ధం యొక్క లవం గుణించ వలసిన రెండు భిన్నాల లవాల లబ్ధం.

లబ్ధం యొక్క హారం గుణించ వలసిన రెండు భిన్నాల హారాల లబ్దం.

అనగా $\frac{3}{7}\times\frac{2}{5} = \frac{3\times2}{7\times5} = \frac{6}{35}$

ఉదాహరణ-4 $\frac{3}{5}$ ౘ $\frac{4}{9}$ ల లబ్ధము. ఎంత?

సమాధానం - $\frac{3}{5}\times\frac{4}{9} = \frac{3\times4}{5\times9} = \frac{12}{45}$

ఉదాహరణ-5 $\frac{2}{3}$ ౘ $1\frac{1}{2}$ లబ్ధం ఎంత?

సమాధానం $\frac{2}{3}\times1\frac{2}{5} = \frac{2}{3}\times\frac{7}{5}$

$= \frac{2\times7}{3\times5} = \frac{14}{15}$

మీకు తెలుసా?

గుణించ వలసిన భిన్నాలు మిశ్రమ భిన్నాలు అయినచో వాటి అపక్రమ భిన్నాలలో మార్చుకొని గుణకార చేయవలెను.

ఉదాహరణ 6- ఒక దుకాణంలో 40 పెన్సిల్స్ కలవు. మొత్తం పెన్సిల్స్ మొదటిరోజు వంతు అమ్మెను. మరుసట రోజు మిగిలిన పెన్సిల్స్‌లో $\frac{1}{4}$ వ వంతు అమెమ్మను. అయిన అతడు రెండు దినములలో మొత్తం ఎన్ని ఎన్సిల్స్ అమ్మెను?

సమాధానం - మొదటి రోజు అమ్మిన పెన్సిల్స్ $= 40$ లో $\frac{1}{5}$ వ వంతు

$= 40\times\frac{1}{5} = \frac{40}{5} = 8$ $\left[\frac{40}{5}\right.$ అనగా $\left.40\div5\right]$

మిగిలిన పెన్సిల్స్ $= 40-8 = 32$

రెండవ రోజు అమ్మిన పెన్సిల్స్ $= 32$ వ $\frac{1}{4}$ వంతు

$= 32\times\frac{1}{4} = \frac{32}{4} = 8$ $\left[\frac{32}{4}\right.$ అనగా $\left.32\div4\right]$

రెండు దినములలో అతడు అమ్మిన మొత్తం పెన్సిల్స్ $= 8+8 = 16$

అభ్యాసం 2.2

1. కింది లబ్ధాలను కనుగొనండి

(క) $2\times\frac{1}{5}$ (ఖ) $7\times\frac{3}{5}$ (గ) $5\times\frac{2}{9}$ (ఘ) $8\times\frac{2}{3}$ (ఙ) $4\times1\frac{3}{5}$ (ఛ) $2\frac{1}{2}\times3$

2. కింది లబ్ధాలను కనుగొనండి

(క) $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}$ (ఖ) $\frac{3}{5}\times\frac{2}{7}$ (గ) $\frac{4}{9}\times\frac{5}{7}$ (ఘ) $\frac{5}{8}\times\frac{3}{4}$

(ఙ) $1\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}$ (చ) $\frac{4}{5}\times3\frac{1}{3}$ (ఛ) $2\frac{1}{3}\times1\frac{1}{2}$ (జ) $3\frac{1}{2}\times1\frac{2}{5}$

3. లబ్దాన్ని కనుగొనుండి అవసరమైనచో లబ్దాన్ని సూక్ష రూపంలోనికి అపక్రమ భిన్నమైనచో మిశ్రమ భిన్నంలోనికి మార్చి వ్రాయండి.

(క) $3\frac{1}{2}\times1\frac{3}{8}$ (ఖ) $2\frac{1}{2}\times1\frac{1}{5}$ (గ) $2\frac{2}{5}\times1\frac{3}{4}$

4. విలువను కనుగొనుము.

(క) 24 లో $\frac{1}{2}$ (ఖ) 18 లో $\frac{2}{3}$ (గ) 27 లో $\frac{5}{9}$ (ఘ) 121 లో $\frac{7}{11}$

5. ఒక కారు 16 కి.మి. పోవుటకు 1 లీటరు పెట్రోలు అవసరమగును. లీటర్ల పెట్రోలు పోసినచో కారు ప్రయాణించు దూరం ఎంత?

6. లింకి ఒక వరుసలో 9 మొక్కలు నాటెను. రెండు ప్రక్క ప్రక్క మొక్కల మధ్య దూరం మీటర్లు అయినచో మొదటి మొక్క నుండి చివర మొక్క వరకు మధ్య గల దూరం ఎంత ?

7. ఒక తరగతిలో మొత్తం 56 మంది విద్యార్థులు గలరు. వారిలో వ వంతు బాలికలు మొత్తం బాలికలో వ వంతు స్కులుకు సైకిలుపై వెలుతు ఉంటారు. అయిన ఎంత మంది బాలురు సైకిల్పై వెలుతూ ఉన్నారు.

8. లబ్ధం ను కనుగొనండి (క) $\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{7}{9}$

సూచన : $\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{7}{9}=\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\right)\times\frac{7}{9}$

$$=\frac{2\times1}{3\times5}\times\frac{7}{9}$$

(ఖ) $\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{6}{7}$

మీకు తెలుసా ?
మూడు భిన్నాలను గుణించి నప్పుడు గుణకార్ సహచర స్వాయాన్ని పాటించవచ్చును.

9. లబ్ధాన్ని కనుగొనండి

(క) $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}$

గమనిక - లబ్ధం లేక హరం పూర్తిగా తెగిపోయినచో. అ స్థానంలో 1 వచ్చును.

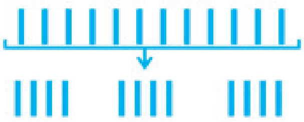
(ఖ) $\frac{3}{5}\times\frac{7}{9}\times\frac{15}{28}$

> మీకు తెలుసా?
> భిన్నాలను గుణించిన తరువాత ఆ లబ్ధాన్ని కనిష్ఠ రూపంలోనికి మార్చవచ్చు. లేక గుణకారానికి ముందే కింది విధంగా చేయవచ్చు.
> మొదటి లవం 2, రెండవ హరం 4 అయినచో ఆ రెండింటి కారణాంకం 2 చే రెండింటినిభాగించవచ్చు లేక 2 చే రెండింటిని భాగించవచ్చు లేక 2 చే 4 ని భగించవచ్చు. అదే విధంగా రెండవ లవం 3, మూడవ హరం 6 ల కారగారకం 3 చే రెండింటిని గాని. 3చే 6ని గాని భాగించవచ్చు. మూడవ లవం 5, మొదటి హరం 5 ద్వారా తెగినిచో 1 వచ్చను.
>
> $\frac{\cancel{2}}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_2}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}_2} = \frac{1}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

2.3. భిన్నాల భగాహరం -

ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్యను మరొక భిన్న ధన పూర్ణ సంఖ్య చే భగ భాగాలు చేయుటను గూర్చి మనం తెలుసుకున్నాం. దానిని మనం భగహరం చేయగలం.

అలోచిద్దాం - 12 ను 4 చే భాగిద్దాం



: 12 వస్తువులు గలవు

: 4 వస్తువుల వర్గంగా మార్చాం

12 లో 4 మూడు సార్లు వస్తుందని మనకు తెలుసు.

అందువలన - $12 \div 4 = 3$

> మీకు తెలుసా?
> విభజంలో విభాజకం ఎన్నిసార్లు ఉంటుందో అదే దాని భాగఫలం అగును.

ప్రస్తుతం ఒక ధనాపూర్ణ సంఖ్యను ఒక భిన్నంచే భాగించుదాం.

2.3.1. ధన పూర్ణ సంఖ్యను భిన్నంచే భాగించుట - $1\div\frac{1}{2}=2$

1 ని $\frac{1}{2}$ చే భాగించుదాం.

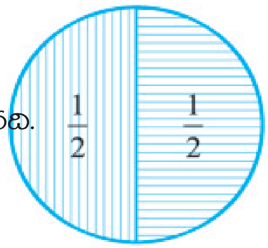
1లో $\frac{1}{2}$ లు ఎన్ని కలవు.

పటంలో 2.5 లో ఒక వృత్తాన్ని రెండు సమాన భాగాలుగా విభజించడమయినది.

కావున ప్రతీ భాగం వృత్తంలో $\frac{1}{2}$ వ భాగా అగును.

దీనిని బట్టి పటిలను పరిశీలించగా రెండు $\frac{1}{2}$ లు ఉన్నాయి.

అనగా 1లో $\frac{1}{2}$ రెండు సార్లు వస్తుంది. కావున $1\div\frac{1}{2}=2$



[పటం 2.5]

పటం 2.6 నుండి క్రింది భాగలను పూరించండి.

పటం (క) 1లో.............................. లు కలవు.

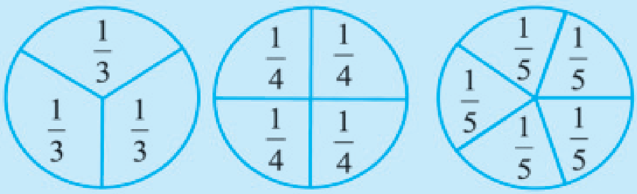
$\therefore\ 1\div\frac{1}{3}=$...........

పటం (ఖ) 1లో........................$\frac{1}{4}$ లు కలవు.

$\therefore\ 1\div\frac{1}{4}=$..........

పటం (గ) 1లో........................$\frac{1}{5}$ లు కలవు.

$\therefore\ 1\div\frac{1}{5}=$...........



( )ఎ ( ) ( )

[పటం 2.6]

ప్రస్తుతం భినహారాన్ని చూద్దాం.

$1\div\frac{1}{2}=2$ అవ్వుతందని పటం 2.5 ద్వారా తెలుసుకున్నం.

కాని 1x2=2 అగును. కావున గారాయదసా $1\times\frac{2}{1}=2$

[కారణం : $\frac{2}{1}$ కూ సమానం

కావున 1x2 స్థానంలో $1\times\frac{2}{1}$ గా వ్రాయవచ్చును.]

$\therefore$ మనం గ్రహించాం

$1\div\frac{1}{2}$ విలువ $1\times\frac{2}{1}$ నిలువ సమానం

అదేవిధంగా $1\div\frac{1}{3}=1\times\frac{3}{1}=3$

మనం గమనించాం

భాగహరంలో విభాజకం ఒక భిన్నమైనచో దానిని తలక్రిందుల భిన్నం చే విభాజన్ని గుణించవలెను.

తెలుసుకునము - ఒక భిన్నంలోని లవాన్ని హరంగాకు హరాన్ని లవంగాను మార్చి తీసుకొనినచో దానిని మొదటి భిన్నం యొక్క విలమం అంటారు.

కావున $\frac{1}{3}$ యొక్క విలోమం= $\frac{3}{1}$

$\frac{2}{5}$ యొక్క విలోమం= $\frac{5}{2}$

$\frac{3}{4}$ యొక్క విలోమం= ....

$\frac{5}{7}$ యొక్క విలోమం= ....

భాగ హరంలో విభాజకం ఒక భిన్నమైనచో, విభాజనికి విభాజకం యొక్క నిలోమభిన్నంచే గుణించినచో భాగఫలం లభిస్తుంది.

ఉదాహరణ 7 3 ను $\frac{3}{5}$ చే భాగించండి.

సమాధానం $3\div\frac{3}{5}=3\times\frac{3}{5}$ యొక్క విలోయం $=3\times\frac{5}{3}=\frac{15}{3}=5$ (జవాబు)

ఉదాహరణ 7 2 ను $1\frac{2}{3}$ చే భాగించండి.

సమాధానం $2\div1\frac{2}{3}=2\div\frac{5}{3}=2\times\frac{3}{5}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$ (జవాబు)

గమనిక - మిశ్రమ భిన్నాన్ని అపశ్రమ భిన్నంగా గూర్చి భాగించవలెను.

✍ ఖాళీలను పురించుము.

(క) $\frac{2}{3}$ యొక్క విలోమం= .... (ఖ) $\frac{3}{7}$ యొక్క విలోమం= ....

(గ) $\frac{5}{2}$ యొక్క విలోమం= .... (ఘ) 4 యొక్క విలోమం= ....

(ఙ) $1 \div \frac{1}{5} = \ldots\ldots\times\ldots\ldots = \ldots\ldots$ (చ) $2 \div \frac{3}{4} = \ldots\ldots\times\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

2.3.2. ధన పూర్ణసంఖ్యచే భిన్నాన్ని భాగించడం

2. మరియు $\frac{1}{2}$ లు రెండును సమానం అని మనకు తెలుసు.

అందువలన ధన పూర్ణ సంఖ్యచే భిన్నాన్ని భాగించునప్పుడు మునుపటి వలె విభాజ్యాన్ని విభాజకం యొక్క విలోమం ద్వారా గుణించవలెను.

అనగా $\frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{3} \times \left(\text{యొక్క విలోమం}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2\times1}{3\times4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ (జవాబు)

ఉదాహరణ 9 $\frac{3}{5}$ ను 2 చే భాగించుము

సమానం $\frac{3}{5} \div 2 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ (జవాబు)

ఉదాహరణ 10 $2\frac{1}{3}$ ను 5 చే భాగించుము.

సమాధానం $2\frac{1}{3} \div 5 = \frac{7}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$ (జవాబు)

✍ జవాబులు వ్రాయండి

(క) $\frac{4}{5} \div 3 =$ (ఖ) $3\frac{1}{3} \div 4 =$

2.3.3. ఒక భీన్నాన్ని మరొక భిన్నంచే భాగించడం

ఒక భిన్నాన్ని విభాజింగాను మరొక భిన్నాన్ని విభాజకం గాను తీసుకొని భాగహరం చేయాలి.

అనగా విభాజం విభజకం. విభాజ్యం విభజకం యొక్క విలమం.

ఉదాహరణ 11 $\frac{1}{3}$ ను $\frac{5}{6}$ చే భాగించుము

సమాధన $\frac{1}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{5}{6} \text{ యొక్క విలోమం}\right)$

.

$= \frac{1}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{6}{15}$

$= \frac{2}{5}$ [సూక్ష్మ రంగు)]

మీకు తెలుసా?
ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్య యొక్క విలమం చే గుణించగా వచ్చ లబ్ధం ఎంత అవుతుంది.

✍ జవాబులు వ్రాయుము

(క) $\frac{2}{7} \div \frac{3}{5}$

(ఖ) $1\frac{3}{4} \div \frac{5}{6}$

(గ) $2\frac{3}{5} \div 1\frac{2}{3}$

అభ్యాసం 2.3

1. భాగఫలాన్ని కనుగొనుము.

(క) $12 \div \frac{3}{4}$ (ఖ) $8 \div \frac{7}{3}$ (గ) $4 \div \frac{8}{5}$

(ఘ) $3 \div 2\frac{1}{3}$ (ఙ) $5 \div 3\frac{4}{7}$

2. భాగ ఫలాన్ని కనుగొనుము.

(క) $\frac{7}{3} \div 2$ (ఖ) $\frac{3}{7} \div \frac{8}{7}$ (గ) $3\frac{1}{2} \div \frac{8}{3}$

(ఘ) $4\frac{1}{3} \div 3$ (ఙ) $3\frac{1}{2} \div 4$

3. భాగఫలమును కనుగొనుము $\frac{1}{5}$

(క) $\frac{2}{5} \div \frac{1}{2}$ (ఖ) $\frac{3}{7} \div \frac{8}{7}$ (గ) $3\frac{1}{2} \div \frac{8}{3}$

(ఘ) $\frac{2}{5} \div 1\frac{1}{2}$ (ఙ) $2\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{5}$

4. $\frac{3}{5}$ మీటర్ల పొడవు గల రిబ్బనును $\frac{1}{5}$ మీ పొడవుగల ముక్కలను ఎన్ని చేయవచ్చును.

2.4. దశాంశ భిన్నాల గుణకారం.

దశాంశ సంఖ్య (దశాంశ భిన్నాలు) అనునది ఒక స్వతంత్రమైన సామాన్య భిన్నం యొక్క హారం 10, 100, 1000 వంట 10 యొక్క ఘతములుగా ఉంటుంది. ఆ భిన్నాన్ని దశాంశ స్థానం ను ఉపయోగించి దశాంశ భిన్నంగా మార్చబడును.

అనగా $\frac{3}{10} = 0.3$

$2\frac{27}{100} = 2.27$ మొదలైనవి

పై వాటినుండి హారం కేవలం దశాంశ స్థానంగా ఉపయోగించడమయ్యినది. అందువలన దశాంశ భిన్నాలను గుణించునప్పుడు దశాంశ భిన్నాలను సామాన్య భిన్నాలుగా మార్చి గుణించవలెను.

2.4.1 రెండు దశాంశ భిన్నాలు గుణకారం.

రండి 0.3 ను 1.5 చే గుణించుదాం.

$$\begin{aligned}0.3\times1.5 &= \frac{3}{10}\times1\frac{5}{10}\\ &= \frac{3}{10}\times\frac{15}{10}\\ &= \frac{45}{100}\\ &= 0.45\end{aligned}$$

చూసి చెప్పగలరా?

ఇక్కడ $1\frac{5}{10}$ ను $\frac{15}{10}$ గా ఎందుకు వ్రాయబడినది.

ఇక్కడ రెండు లవముల లబ్ధ మే దశాంశ భిన్నాల లబ్ధము అయ్యేను. రెండింటి హరం లబ్ధం అనగా 100 కేవలం లబ్ధంలోని దశాంశ స్థానమును నిర్ణయించుటకు మత్రమె ఉపయోగపడినది.

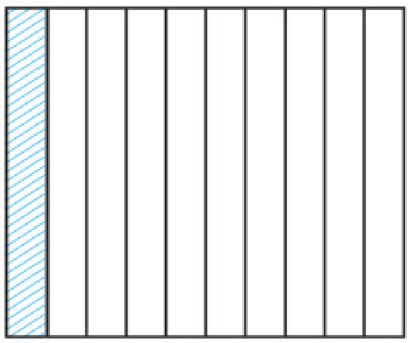
- గుణకారంలోని మొదటి సంఖ్య 0.3 గాను. రెండవ సంఖ్య 1.5 ను 15 గాను తీసుకోబడినది. ఈ రెండింటిని గుణించగా 3×5=45 లభించును.
- మొదటి సంఖ్యలో దశాంశ స్థానము తరువాత ఒక అంకె రెండవ సంఖ్యలో దశాంశ స్థానం తరువాత కూడ ఒకే అంకె కలదు. లబ్ధంలో మాత్రం దశాంశ స్థానం తరువాత రెండు అంకెలు గలవు.
- గుణకారం చేయ వలసిన మొదటి సంఖ్యలో దశాంశ స్థానం తరువాత 1 అంకె రెండవ సంఖ్యలో దశాంశ స్థానం తరువాత 1 అంకె కలదు. ఆ రెండింటిన కలువగా 1+1=2 అగును. కావున లబ్ధన లబ్ధంలో దశాంశ స్థానం తరువాత రెండు అంకెలు ఉండును.

  ఏ సందర్భంలో రెండు దశాంశ భిన్నా భిన్నాలను గుణించవలసి వచ్చునో తెలుసుకుందాం.మానస 1 కీ.గ్రా, రూ. 8.50 చొప్పున 2.5 కి.గా. కాకరకాయలు కొనెను. అయిన అమె దుకాణదారునికి ఎంత చెల్లించవలెను.

  మానస దుకాణదారునికి చెల్లించిన సోమ్ము రూ. 8.50 2.50 అని చెపుగలరు.

  ఇక్కడ 8.5, 2.5 రెండు ఒక్కొక్క దశాంశ భిన్నాలు కావున రెండు దశాంశ భిన్నాలను గుణించవలెను.

రండి గుణకార సక్రమను మరొకసారి ప్రయత్నిద్దాం. ప్రక్క పటాను గమనించండి.

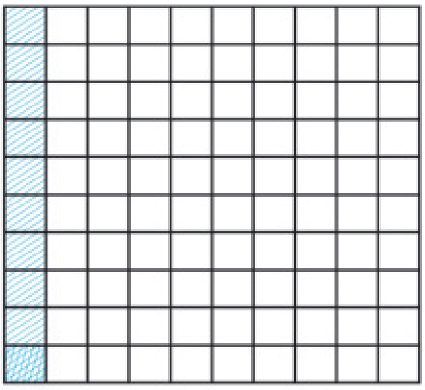


( )

ఇచ్చట కాగితపు ఎన్ని సమాన భాగాలు కలవు ?

- ప్రతీ భాగం కాగితం కొంత భాగంలో $\frac{1}{10}$ లే 0.1 భాగం.
- కావున గీతలు గీయ బడిన భాగంలో కాగితంలో ఎన్నవ వంతు?

ఇప్పుడు కాగితంపై అడ్డంగా ఎడమనుండి కుడివైపు గీతలు గీయండి. కాగితంను పటం 2.8 లో చూసిన విధంగా 10 సమాన భాగాలు చేయండి. దీని వలన పటం 2.7 లో చుసిన (గీతలు గీసిన) భాగం) కూడి పది భాగాలయునది. ఇప్పుడు కాగితము పై 10×10= 100 సమాన భగాలుగా విభజించబడినవి.



ఫలితంగా పటం 2.8 లో గీతలున్న భాగం కాగితంలో వ భాగం ఒక దశాంశ వలన ఆ గీతలు కలిగిన భాగా మొత్తం కాగితంలో ఎడవ భాగం ?

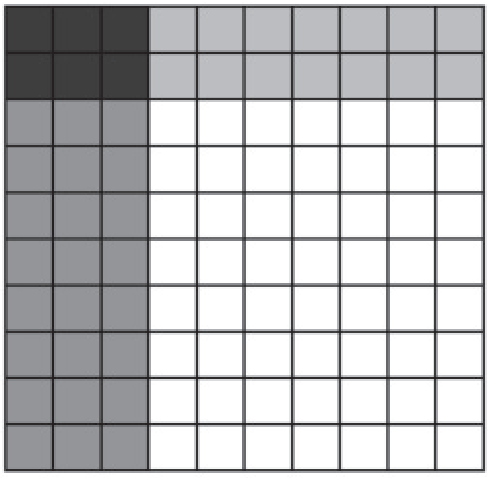
గీతలుగీయబడిన భాగం మొత్తం కాగితంలో $\frac{1}{10}$ లో $\frac{1}{10}$ వ భాగం(వంతు).

లేక 0.1 లో 0.1 భాగం = 0.1× 0.1 భాగం.

మొత్తం కాగితాన్ని 1 అనుకున్నచో గీతలు గీయబడిన భాగం 0.1 ×0.1 గాసుంచాబడినది కాని ఇ భాగం మొత్తం కాతితంలో 100 సమన భాగాంలో 1 భాగం అగుట వలన దీనిని అనగా 0.01 అగును కావు 0.1× 0.1 =0.01. రండి, 0.2× 0.3 ఒక అగునో గనునిద్దాం.

పటం 2.9 లో ఒక కాగితంపై ఎడమ ప్రకనుండి కుడి వైపుకు గీతలు ద్వారా 10 సమాన భాగాలు చేయుము. ఆ 10 గదులలో రెండు గదులకు ఎరుపురంగు వేయుము. మరక పై నుండి క్రిందకు గీతలోని మూడింటికి నలుపురంగు వేయుము. ఎరుపు, నలుపు రంగుల ద్వారా గుర్తించబడిన భాగం మొత్తంకాగితంలో $\frac{2}{10}$ లో $\frac{3}{10}$ భాగం, లేక, 0.2 లో 0.3 అనగా 6.2 0.3 కాని కాగితం మొత్తంలో 10×10=100 చదరాలు అగును. ఎరుపు, నలుపు రంగు గల భాగాలు 2 ×3=6 చదరాలు అగును. ఈ భాగం మొత్తం 100 చదరాలలో 6 చదరాలు అంగట వలన ఇది మొత్తం కాగితంలో $\frac{6}{100}$ లేక 0.06 భాగం.

కావున 0.2 0.3 0.06



దశాంశ స్థానాన్ని తోలికించి వ్రాసినచో 2 × 3 = 6

మొదట సంఖ్య 0.2 లో దశాంశ స్థానం తరువాత సంఖ్యలు = 1

రెండవ సంఖ్య 0.3 లో దశాంశ స్థానం తరువాత సంఖ్యలు = 1

రెండు సంఖ్యలలో దశాంశ స్థానం తరువాత సంఖ్యలు= 1 +1= 2

కావున లబ్ధంలో దశాంశ స్థానం తరువాత రెండుసంఖ్యలు ఎదుటను పై విధంగా లభించిన లబ్ధం 6 ను 0.6.

(దాని వలన లబ్ధం విలువ మారదు)

వాటిని పరిశీలించండి

మూడు సమానాలలోని గుణాకరమును పరిశీలించండి

మొదట సోపానం : 0.2×0.3 లో $2 \times 3 = 6$

రెండవ సోపానం : మొదటి రెండవ సంఖ్యంలోని దశాంశ స్థానం తరువాత వచ్చిన మొత్తం స్థానాల సంఖ్య $=1+1= 2$

మూడవ సోపానం : వచ్చిన లబ్ధం 6 యొక్క ఎడమ వైపు సున్నా (0) ను ఉంచవలెను. దీని వలన అది 06 అగును.

నాలుగసోపానం: వచ్చిన లబ్ధం యొక్క కుడి ప్రక నుండి రెండు స్థానాలు ఎడమ ప్రక్కకు వచ్చి దశాంశ స్థానాన్ని గుర్తించాలి. అనగా అనగా $0.2 \times 0.3 = 0.06$

ఉదాహరణ - 12   1.2, 2.5 లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

సాధనా   మొదటి సోపానం $12\times25=300$

రెండవ సోపానం రెండు సంఖ్యలను దశాంశస్థానాల తరువాత అంకెసంఖ్య $=1+1= 2$

మూడవ సోపానం - లబ్ధంలో కుడి వైపునుండి ఎడమ వైపుకు రెండు స్థానాను విడిచి దశాంశ స్థానాన్ని గుర్తించవలెను. ఈ 3.00 అగును $1.2\times2.5=3.00$లేక 3.

లబ్ధాలను కనుగొనుము

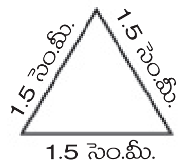
క) 0.5×0.6

ఖ) 0.8×1.6

గ) 2.4×4.2

ఘ) 1.5×1.25

ఉదాహరణ 13- ఒక సమబాహు త్రిభుజం యొక్క ఒక పోడవు 1.5 సెం.మీ. అయిన దాని చుట్టు కొలత ఎంత ?



సాధనా - సమబాహు త్రిభుజం చుట్టుకొలత 3 × భుజం పోడవు

$= 3 \times 1.5$ సెం.మీ.

$= 4.5$ సెం.మీ.

ఉదాహరణ 14 - ఒక దీర్ఘ చతురుస్రం యొక్క పోడవు, వెడల్పులు సమానుగా 73.5 సెం.మీ. 0.15 సే. అయిన దాని వైశాల్యం ఎంత ?

సాధనా - దీర్ఘ చతురస్రం పాడవు = 73.5 సెం.మీ.

$= 0.735$ మీ.

వెడల్పు $= 0.15$ మీ.

దీర్ఘ చతురస్ర = పోడవు వెడల్పు

$= (0.735) \times (0.15)$ బ మీ.

$= 0.11025$ బ. మీ. (జవాబు)

మీకు తెలుసా ?

1 మీ. × 100 సెం.మీ.

1 సెం.మీ. × $\frac{1}{100}$ మీ

దశాంశ సంఖ్యను ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య చే ఏ విధంగా గుణించాలో తెలుసుకుందాం.

$$0.4 \times 8 = ?$$

ఇచ్చట మొదటి సంఖ్యలో దశాంశ స్థానం తరువాత గల అంకెలు = 1

రెండవ సంఖ్యలో దశాంశ బిందువు లేదు. కావున రెండు సంఖ్యలలోను దశాంశ స్థానం తరువాత గల అంకెల మొత్తం = 1

లబ్ధంలో కుడివైపు నుండి ఒక అంకె లేక స్థానం విడిచి పెట్టి దశాంశ స్థానంను గుర్తించాం.

ఫలితంగా $0.4 \times 8 = 3.2$

8.0 సంఖ్యను గుణించినచో దశాంశ బిందువు తరువాత ఏ విధమైన సంఖ్య లేదు. కారణం 8.0 = 8 అగును. కానీ 8.04 ఉన్నచో దశాంశ బిందువు తరువాత రెండు సంఖ్యలు కలవు. 8.40 విషయంలో దశాంశ బిందువు తరువాత ఒకసంఖ్య అగును. కారణం 8.40 = 8.4

2.4.2 దశాంశ సంఖ్యను 10, 100, 1000...... వంటి సంఖ్యలలో గుణించుట

ఒక దశాంశ సంఖ్యలో సామాన్య భిన్నలలోనికి మార్చునప్పుడు దాని హారం 10 లేక 100 లేక 1000 అగునని మనకు తెలుసు.

$0.2 = \frac{2}{10}$, $0.34 = \frac{34}{100}$, $0.042 = \frac{42}{1000}$ మొదలగునవి.

ఇప్పుడు ఒక దశాంశ సంఖ్యను 10, 100, 1000 వంటి సంఖ్యలలో గుణించుదాం.

$0.2 \times 10 = \frac{2}{10} \times 10 = 2$ లే 2.0 లేక 2.0

ఇప్పుడు గమనించుము మొదటి సంఖ్య 0.2 లేక 0.20 యొక్క దశాంశ స్థానంను ఒక స్థానం నుండి కుడివైపుకు తీసుకోలేరు 2 నకు కుడి వైపున ఉంచినచో లబ్ధం లభించును.

$0.5 \times 100 = \frac{5}{10} \times 100 = \frac{500}{10} = 50$ లే 50.0 లేక 50.0

మీకు తెలుసా?

దశాంశ సంఖ్య కుడివైపు ఎన్ని '0' లను ఉంచిననూ ఆ సంఖ్య విలువ మారదు.

అనగా , 0.2 = 0.20 = 0.200

ఇచ్చట మొదటి సంఖ్య 0.5 లేక 0.500 యొక్క దశాంశ స్థానంనకు రెండు స్థానాలు కుడి వైపునకు వెళ్ళి 5 తరువాత మొదటి సున్నా కుడి వైపున దశాంశ స్థానమును గుర్తిచ వలెను.

కావున మనము గమనించాం.

ఒక దశాంశ సంఖ్యను 10, 100, 1000 వంటి సంఖ్యలచే గుణించునపుడు గుణించబడిన సంఖ్య (దశాంశ సంఖ్య) యొక్క అంకెలలో ఎటువంటి మార్పురాదు. కేవలం దశాంశ స్థానం మాత్రము మారుతుంది.

దశాంశ స్థానం స్థానంలో ఎటువంటి మార్పు జరుగుతుంది?

(i) ఒక దశాంశ సంఖ్యను 10 చే గుణించినచో, దశాంశ స్థానం, ఒక స్థానం కుడివైపుకు జరుగుతుంది.

(ii) ఒక దశాంశ సంఖ్యను 100 చే గుణించినచో, దశాంశ స్థానం రెండు స్థానాలు కుడి వైపుకు జరుగుతుంది.

(iii) ఒక దశాంశ సంఖ్యను 1000 చే గుణించినచో దశాంశ స్థానం కూడి స్థానాలు కుడి వైపుకు జరుగుతుంది.

పరిశీలించండి

గుణాకారం ద్వారా దశాంశ స్థానాన్ని ఎన్ని స్థానాలు కుడి వైపుకు జరుగుతుందో మొదటి సంఖ్యలో దశాంశ స్థానం తరువాత అంతకంటె తక్కువ స్థానాలు ఉండును. అపుడు మొదటి సంఖ్యలో అవసరమైన సున్నాలను చేర్చుకోవలెను. తరువాత దశాంశ స్థానంను జరుపవలెను. ఉదా - 3.2 1000 యొక్క లబ్ధంను కనుగొన లేను. ఇక్కడ లబ్ధంలో దశాంశ స్థానంను మూడు స్థానాలు కుడివైపుకు జరుపవలెను. కాని దశాంశ స్థానం తరువాత ఒకే స్థానం కలదు. కావున దశాంశ స్థానం 3.2 తరువాత కనీసం రెండు సున్నాలను చేర్చవలెను.

$$3.2\times1000 = 3.20000\times1000$$
$$= 3200.0$$

(1) లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

క) 3.4×10 =

ఖ) 0.56×100 =

గ) 1.04×1000 =

ఘ) 0.3×100 =

(2) ఖాళీలను పూరించండి.

క) దశాంశ సంఖ్యను 100 చే గుణించినచో దశాంశ స్థానం........................ స్థానాలు గుడివైపుకు జరుగును.

ఖ) దశాంశ సంఖ్యను 1000 చే గుణించినచో దశాంశ స్థానం .... స్థానాలు కూడివైపుకు జరుగును.

అభ్యాసము 2.4

1. లబ్ధాన్ని కనుగొనుము.

(క) 0.2×6 (ఖ) 8×4.3 (గ) 2.71×5

(ఘ) 20.1×4 (ఙ) 211.02×4 (చ) 3.4×5.0

2. లబ్ధాన్ని కనుగొనుము.

క) 1.3×10 (ఖ) 36.8×10 (గ) 31.5×100

(ఘ) 1.56×100 (ఙ) 0.5×1000 (చ) 13.27×1000

3. లబ్ధాన్ని కనుగొనుము.

క) 2.5×0.3 (ఖ) 0.1×21.8 (గ) 1.3×3.1

(ఘ) 0.5×0.005 (ఙ) 11.2×0.13 (చ) 1.07×0.02

4. ఒక దీర్ఘ చతురస్రం పొడవు, వెడల్పులు వరుసగా 5.7 సెం.మీ., 3 సెం.మీ. అయిన దాని చుట్టు కొలత మరియు వైశాల్యము లను కనుగొనుము.

5. ఒక స్కూటర్ 1 లీటరు పెట్రోలు తో 55 కి.మీ. దూరం ప్రయాణించగలదు. అదే వాహనం 10 లీటర్ల పెట్రోలుతో ఎఞత దూరము ప్రయాణించగలదు.

6. ఒక నీటి ట్యాంకులో 115.75 లీటర్లు నీరు పట్టును. అయిన అటువంటి 12 ట్యాంకులో మొత్తం ఎన్ని లీటర్లు నీరు పట్టును.

2.5. దశాంశ సంఖ్యల భాగాకరం

లిజ, జీను, జిజిన ముగ్గురు అక్కచెల్లెలు. లిజ పెద్దమ్మాయి.. లిజ వద్ద 7.5 పొడవు గల రిబ్బను గలదు. దానిని సమానంగా మూడు ముక్కలు చేసిముగ్గురు సమానంగా పంచుకోవలనుకున్నది. ప్రతీ యొక్క పొడవు ఎంత ఉండవలెనో ఆమె ఎలా తెలుసుకోగలదు. ఒకవేళ రిబ్బను 12 మీటర్ల పొడవు కలిగి యొన్నచో దానిని మూడు సమాన భాగాలు చేయుటకు 12 ను 3 చే భాగించి ఒక్కొక్క ముక్క పొడవు తెలుసుకొనగలిగేరు. కాని 7.5 ను 3 చే ఎలా భాగించాలి! ఒక దశాంశ సంఖ్యను ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్యచే ఏ విధంగా భాగించాలో తెలుసుకోవలసిన అవసరం ఎంతైనా ఉందని ఆమె భు వించింది.

నీహర్ తన తరగతిలో కొంత భాగంలో రంగు కాగితాలు అంటింతాలని అనుకున్నాడు. అతని వద్ద 19.5 మీటర్ల పొడవు గల రంగు కాగితపు రిబ్బను ఉంచి. అతడు దాని నుండి 1.5మీ. పొడవు గల ఎన్ని ముక్కలను పొందగలడు!

నీహర్ ఆలోచన -

మొత్తం రిబ్బను పోడవు 24 మీ. పొడవు ఉన్నచో దాని నుండి 3 మీ. పోడవు గల ముక్కలు కత్తిరించ వచ్చును. కావున అతడు 24 ను 3 చే భాగించగలరు.

ఇచ్చట మొత్తం రిబ్బను పోడవు 19.5 మీ. కత్తిరించవలసిన రిబ్బన్ల పోడవు 1.5 మీ. అందువలన 19.5 మీ. ను 1.5 చే భాగించాలి. కావున దానిని దశాంశ సంఖ్యల భాగాకర పద్ధతిని అవలంబించవలసి వచ్చెను.

భాగాహరం చేయు విధానం -

క) కొన్ని వస్తువుల సమాహమును సరూన భాగాలు చేయరకు భగాహరం చేయవలెను. అనగా 40 మామిడి పండ్లను 5 సమాన భాగాలు చేయవలెనన్న 40 ను 5 చే భాగించవలెను.

ఖ) కొన్ని వస్తువుల నుండి ప్రతీసారి సమాన సంఖ్యలో వస్తువులను తీసినచో ఎన్నిసార్లు తీయవచ్చును 30 నోట్ పూస్తకాలలో ఒక్కొక్క పిల్ల వానికి 5 చొప్పన నోట్‌పుస్తకాలు ఇచ్చిన ఎంత మందికి ఇవ్వవచ్చును తెలుసుకొనుటకు 30 ను 5 చే భాగింతనవలెను.

అదేవిధంగా 7.5 ను పోడవు గల రిబ్బను ను 3 సమాన భాగాలు చేయుటకు 7.5 ను 3 చే భాగించవలయును మరియు 19.5 మీ. చాపను 1.5 మీ. పోడవుగల ఛిన్న చిన్న ముక్కలుగా ఎన్ని ముక్కలుగా కత్తిరించ వచ్చునో తెలుసుకొనుటకు 19.5 ను 1.5 చే భాగించవలెను.

2.5.1 దశాంశ సంఖ్యలను 10, 100 1000 చే భాగించుట-

ప్రస్తుతం 231.5 10 యొక్క భాగఫలం ను నిర్ణయించండి.

$$\frac{231.5}{10} = \frac{2315}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{2315}{100} = 23.15$$

లేక $$\frac{231.5}{10} = \frac{231.5 \times 10}{10 \times 10} = \frac{2315}{100} = 23.15$$ (లవమును, హరమును) 10 చే గుణించాలి.

విధంగా $231.5 \div 100$

$$= \frac{231.5}{100} = \frac{231.5 \times 10}{100 \times 10} = \frac{2315}{1000} = 2.315$$

లేదా

$231.5 \div 1000$

$$= \frac{231.5}{1000} = \frac{231.5 \times 10}{1000 \times 10} = \frac{2315}{10000} = 0.2315$$

- ఒక దశాంశ సంఖ్యను 10 చే భాగించినచో లభించే భాగఫలంలో దశాంశ సంఖ్యలోని దశాంశ స్థానము ఎన్ని స్థానములు ఎడమ వైపుకు జరిగింది.
- ఒక దశాంశ సంఖ్యను 100, 1000 చే భాగించినచో అందుగల దశాంశ స్థానం భాగఫలం లో ఎన్ని స్థానములు ఎడమ వైపుకు జరిగెను. భాగఫలం నిర్ణయించడం ఒక సులభ ప్రక్రియ.

సమాధానము రాయండి.

క) యొక్క భాగఫలం ఎంత ?

ఖ) యొక్క భాగఫలం ఎంత ?

గ) యొక్క భాగఫలం ఎంత ?

2.5.2 దశాంశ సంఖ్యను పూర్ణ సంఖ్యచే భాగించుట.

ప్రస్తుతం 6.4 ను 2 చే భాగించుట

10 = 2 ×5 అని మనము తెలుసియున్నాం.

అదే విధంగా 100 = 2 × 2 × 5 × 5

అనగా 10, 100, 1000 మొదలగు సంఖ్యల యొక్క మౌళిక కారణాంకాలు కేవలం 2, మరియు 5. దానిని ఉపయోగించి క్రింది భాగాహరంను చేద్దాం.

$$6.4 \div 2 = \frac{6.4}{2} = \frac{6.4 \times 5}{2 \times 5} = \frac{32.0}{10} = 3.20$$

చెప్పి చూడండి.
ఇక్కడ $\frac{6.4}{2}$ యొక్క హారాన్ని 5 చే . గ ు ణి ం చ బ డి న ది ఎందువలన?
అదే విధంగా

అదే విధంగా -

$$3.6 \div 5 = \frac{3.6}{5} = \frac{3.6 \times 2}{5 \times 2} = \frac{7.2}{10} = 0.72$$

$$7.8 \div 4 = \frac{7.8}{4} = \frac{7.8}{2 \times 2} = \frac{7.8 \times 5 \times 5}{2 \times 2 \times 5 \times 5} = \frac{7.8 \times 25}{100} = \frac{195.0}{100} = 1.95$$

(హరము యొక్క కారణాంకాలు రెండు 2 లు అగుట వలన రెండు 5 ల చే గుణించబడినది)

పరిశీలించండి

విభాజకం యొక్క మౌళిక గుణకారలు కేవలం 2 మరియు 5 అయిన ఈ ప్రయగం అవలంబించవచ్చును. విభాజకం యొక్క మౌళిక కారణాంకాలు 2 మరియు 5 లకు భిన్నంగా ఇతర సంఖ్యలు ఏమి చేయవలెను ? ఆ విధంగా వేరొక భాగాహరాన్ని చేద్దాం రండి.

$$23.8 \div 7 = \frac{238}{10} \div 7 \quad \text{(మొదటి సోపానం)}$$

$$= \frac{238}{10} \times \frac{1}{7} = \frac{238 \times 1}{10 \times 7} \quad \text{(రెండవ సోపానం)}$$

$$= \frac{238 \times 1}{7 \times 10} = \frac{238}{7} \times \frac{1}{10} \quad \text{(మూడవ సోపానం)}$$

$$= 34 \times \frac{1}{10} = \frac{34}{10} \quad \text{(నాలుగవ సోపానం)}$$

$$= 3.4 \quad \text{(ఐదోవ సోపానం)}$$

భాగా హర సోపానం :

మొదటి సోపానం : విభాజకం నందు గల దశాంశ సంఖ్యను సామాన్య భిన్నంగా మార్చు కోవాలి.

రెండవ సోపానం : విభాజ్యాన్ని విభాజకం యొక్క విలోయంచే గుణించాలి.

మూడవ సోపానం : భిన్నాల గుణకార ప్రణాళికను ఉపయోగించవలెను.

నాల్గవ సోపానం : హలను గుణకార స్థిత్యంతర (వినిమయ) న్యాయాన్ని ఉపయోగించవలెను.

ఐదవో సోపానం : పూర్ణ సంఖ్యల గల భగాహరం యొక్క భగఫలం నిర్ణయించబడును. $\frac{1}{10}$ చే గుణించి దానిని ధశాంశ సంఖ్యలోకి మార్చవలెను.

సమాధానాలను రాయండి

(క) $2.4 \div 2$ (ఖ) $3.6 \div 4$ (గ) $3.3 \div 5$

(ఘ) $42.6 \div 25$ (ఙ) $73.8 \div 3$ (చ) $36.1 \div 14$

2.5.3 ఒక దశాంశ సంఖ్యను మారొక దశాంశ సంఖ్యతో భాగించడం :

24.45 ను 0.5 చే భాగిద్దాం రండి.

ఒక దశాంశ సంఖ్యను పూర్ణసంఖ్యచే భాగించుట గతం నేర్చుకొనియున్నాం. ఇప్పుడు విభాజకం పూర్ణసంఖ్య అయినచో మనుపటి పద్ధతిని మనం అవలంబించగలం.

(క) $24.5 \div 0.5 = \frac{24.45}{0.5} = \frac{24.45 \times 10}{0.5 \times 10}$ (హరాన్ని పూర్ణసంఖ్యగా మార్చబడినది)

$$= \frac{244.5}{5} = \frac{244.5 \times 5 \times 2}{5 \times 2} \quad \text{(హరాన్ని 10 గా పూర్ణబడినది)}$$

$$= \frac{489.0}{10} = 48.9$$

(ఖ) $24.01 \div 0.7$ $= \frac{2401}{100} \div \frac{7}{10}$

$= \frac{2401}{100} \times \frac{10}{7} = \frac{2401}{10} \times \frac{1}{7}$ (లవ, హరములలో గల 10 చే భాగించ నేయబడినది)

$= \frac{2401}{7} \times \frac{1}{10} = 343 \times \frac{1}{10}$

$= 34.3$

సమాధానములను రాయండి.

(క) $32.72 \div 0.4$ (ఖ) $48.06 \div 0.9$ (గ) $90.48 \div 1.2$

ఉదాహరణ 15 -

ఒక రోడ్డు పొడవు 150 మీ. రోడ్డు చివరి వరకు ప్రతీ 12.5 మీ దూరంలో ఒక విద్యుత్తు స్తంభంను పాతవలెను. పోడ్డు ప్రారంభంలో మొదటి స్తంభం పాతినచో చివరి వరకు మొత్తం ఎన్ని స్తంభంలు పాతవలెను.

సామాధన -

ప్రక్క ప్రక్కనే గల రెండు వరుస స్తంభాల మధ్య దూరం 12.5 మీ.

రోడ్డు పొడవు $= 150$మీ.

మొత్తం దూరాలు $= \frac{150}{12.5} = \frac{150 \times 10}{12.5 \times 10}$

$= \frac{1500}{125}$

$= \frac{60}{5}$ (లవ, హరాలను 25 చే భాగించబడినది)

$= 12$

మొత్తం సంఖ్యల $= 12 + 1 = 13$ సంఖ్య (జవాబు)

ఉదాహరణ 16-

ఒక క్రమ బహుభుజి యొక్క భాజం పొడవు 205 సెం.మీ. దాని చూట్టు కొలత 12.5 సెం.మీ. అయిన ఆ బహుభుడికి గల భుజాలు ఎన్ని?

సాధన - క్రమ బహుభుడి చుట్టుకొలత = ఒక్కొ భాజము పొడవు × భిజలసంఖ్య

భుజల సంఖ్య = $\frac{\text{చుట్టుకొలత}}{\text{ఒక్కొ భాజం పొడవు}}$

$= \frac{12.5}{2.5} = \frac{12.5 \times 10}{2.5 \times 10}$

$= \frac{125}{25} = 5$

ఇక్కడ లవ, హరాలను 10 చే ఎందుచే గుణించావేల చెపుగలరో లేక హరాలను 100 చే గుణించిన జవాబు ఎంత అగును.

విభాజ్యం దశాంశ సంఖ్య, విభాజకం పూర్ణసంఖ్య అయినప్పుడు భాగాహారం

మొదటి ఉదాహరణ - 17 ను 6 చే భగించాలనుకుద్దాం. క్రింది తరగతులలో భగహారం విధంగానే ఇక్కడ భాగాహారం చేద్దాం.

```
     2.9
6 | 17.4
    12
    ----
     5.4
     5.4
    ----
      0
```

భాగఫలం 2.9

పరిశీలించుము -

ఇచ్చట విభాజ్యం 5 ఒకట్లు స్థానం లోని 4 దశాంశ. ఇది 54 దశాంశంలో సమానం. విభాజ్యను దశాంశంలోనికి మార్చుట వలన భాగఫలా కూడా దశాంశ అయితుంది. అందువలన భాగఫలం దశాంశ బిందువు చేర్చడమయినది.

2వ ఉదాహరణ

17.4 ను ఇదే పద్ధతిలో 5 చే భాగించుదాం.

```
     3.48
5 | 17.4
    15
    ----
     2.4
     2.0
    ----
     0.40
      .40
    ----
       0
```

భాగఫలం 3.48

ఇచ్చట విభాజ్యం 2.4 ను దశాంశంలోకి మార్చినచో 24 దశాంశమగును. భాగవలంలో దశాంశ స్థానం. చేర్చడమయ్యింది. 24 దశాంశమును 5 చే భాగించడమయ్యినది.

ఇచ్చట దశాంశాన్ని సతాంశములోనికి మార్చికొవలేను 40 శతాంశ అయినది. దీనిని 5 చే భాగించాలి.

3వ ఉదాహరణ

17.4 ను 7 చే భాగించుదాం.

```
     2.48
7 | 17.4
    14
    ----
     3.4
     2.8
    ----
     0.60
      .56
    ----
     0.04
```

శతాంశములోనికి మార్చగా 60 శతాంశం అయినది. దీనిని 7 చే భాగించడమయినది.

ఇచ్చట భాగఫలం 2.48 శేషం 0.04

మూడవ ఉదాహరణలోని భాగహారాన్ని పరిశిలించినచో మనకు క్రింది విషయాలు తెలుస్తాయి.

ఇచ్చట భాగ హర ప్రక్రియ ముగియలేదు.

భాగఫలం 2, శేషం 3.4 గా జవాబు రాయగలం లేక భాగఫలం 2.4 శేషం 0.6 లేక భాగఫలం 2.48 భాగశేషం 0.04 (మనం కావలనుకుంటే భాగక్రియను మరింత ముందుకు తీసుకు పోచ్చును.)

2.5.4 పొడవు, బరువు (గ్రవ్యరాశి) ల కొలతలలో ప్రయణాల మధ్య మార్పు.

లిజ స్నేహితరాలు రజిత, లిజ 7.5 ను పొడవు గల రిబ్బనను సమానంగా మూడు భాగాలు చేసిన విధానాన్ని రజిత పరిశీలించింది.

నీవు చేసినట్టె నేనూ లేక్క చేశాను చూడు అన్నది.

లజిత - రిబ్బను మొత్తం పొడవు 7.5 మీ. 750 సేం.మీ. దీనిని సమానంగా మూడు భాగాలు చేస్తే ఒక్కొక్క భాగం పొడవు ఎంత అవుతూంది?

లిజ - ప్రతీ భాగం పొడవు 250 సేం.మీ.

రజిత - 100 సేం.మీ. లు 1 మీ. గదా. ఇప్పుడు ప్రతీ భాగా పొడవును మీటర్లలో మార్పు.

లిజ - 100 సెం.మీ.= 1 మీ.

250 సెం.మీ. = 250 ÷ 100

= 2.50 మీ.

లిజ - అనేక సమయంలలో వేల ప్రమాణాలు మార్చు కొలసిన అవసరం ఏర్పడుతుంది.

చెప్పి చూడండి :
250 సెం.మీ. లను కి.మి. లలోనికి మార్చిన ఎంత అవుతుందో వ్రాయండి.

ఉదాహరణ - 17

క) 2.4 మీ. లను సెం.మీ. లోనికి మార్చండి.

ఖ) 457 సెం.మీ. లను మీటర్లలోనికి మార్చండి.

గ) 302 వ గ్రా లను గ్రాములలోనికి మార్చండి.

ఘ) 3524 గ్రాములను కీ.గ్రా లోకి మార్చండి.

సాధన -

క) ఇచ్చట మీటర్ ప్రమాణాన్ని సెంటిమిటర్ ప్రమాణంలోనికి మార్చవలెను.

1 మీ. = 100 సెం.మీ.

2.4 మీ = 2.4 ×100 సెం.మీ.

= 240 సెం.మీ.

(ఖ) ఇచ్చట సెం.మీ. లను మీటర్లలోక మార్చవలెను.

100 సెం.మీ. = 1 మీ.

457 సెం.మీ. = (457 ÷100) మీ = 4.57 మీ.

(గ) ఇచ్చట కి.గ్రా లను గ్రాములలోకి మార్చవలెను.

1 కి.గ్రా = 1000 గ్రాములు.

3.2 కి.గ్రా = 3.2 × 1000 గ్రా = 3200 గ్రా

(ఘ) ఇచ్చట గ్రాములను కి గ్రా. లలోనికి మార్చ వలెను.

1000 గ్రా = 1 కి.గ్రా

2524 గ్రా = (2524 × 1000) గ్రా = 2.524 కి.గ్రా

చెప్పి చూడండి.
3.2 గ్రాలను మిల్లి గ్రాములలోనికి మార్చి వ్రాయండి.

సాధించండి

క) 2.6 మీటర్లను సెంటిమీటర్లు లోనికి మార్చండి.

ఖ) 3.24 మీటర్లను డెసి మీటర్లలోనికి మార్చండి

గ) 3.48 సెం.మీ.లను మీ., సెం.మీ. లలోని మార్చండి ....మీ..........................సేం.మీ.

ఘ) 0.12 గ్రాములను కి గ్రా.లోనికి మార్చండి.

ఙ) 3.2 కి.గ్రాలను గ్రాములలోకి మార్చి వ్రాయండి.

చ) 4357 గ్రాములను క్రింది దానిలోకి మార్చి వ్రాయుము.

4357 గ్రాములు = ...కి గ్రా. .... గ్రా.

అభ్యాసం 2.5

1. భాగఫలం ను కనుగొనండి.

(క) $6.4 \div 2$ (ఖ) $12.4 \div 4$ (గ) $2.48 \div 4$ (ఘ) $65.4 \div 6$

(ఙ) $14.49 \div 7$ (చ) $0.80 \div 5$ (ఛ) $3.76 \div 8$ (జ) $10.8 \div 3$

2. భాగఫలంను కనుగొనండి.

(క) $4.8 \div 10$ (ఖ) $6.78 \div 10$ (గ) $23.6 \div 10$ (ఘ) $0.56 \div 10$

(ఙ) $126.3 \div 10$ (చ) $036 \div 10$ (ఛ) $0.02 \div 10$ (జ) $4.8 \div 10$

3. భాగఫలంను కనుగొనండి.

(క) $132.4 \div 100$ (ఖ) $257.4 \div 100$ (గ) $348.0 \div 100$ (ఘ) $25.7 \div 100$

(ఙ) $32.4 \div 100$ (చ) $4.79 \div 100$ (ఛ) $0.321 \div 100$ (జ) $0.012 \div 100$

4. భాగఫలంను కనుగోనుము

(క) $345.8 \div 1000$ (ఖ) $35.48 \div 1000$ (గ) $345 \div 1000$ (ఘ) $7.68 \div 1000$

5. క్రింది సమీకరణాలలో సరైన వాటిని గుర్తించండి.

క) $35.6 \div 1000 = 3.56 \div 10$

ఖ) $283.5 \div 1000 = 2.835 \div 10$

గ) $47.2 \div 1000 = 472.0 \div 10$

ఘ) $0.839 \div 10 = 8.39 \div 10$

6. భాగఫలం కనుగొనండి.

క) $7.0 \div 3.5$ (ఖ) $36 \div 0.2$ (గ) $3.25 \div 0.5$ (ఘ) $37.8 \div 1.4$

7. ఒక స్కూటర్ 3 లీటర్ల పెట్రోల్ కు 100.2 కి.మీ దూరం ప్రయాగిస్తుంది. అయిన 1 లీటర్ పెట్రోల్ కు ఎంత దూరం ప్రయాగిస్తుంది?

8. ఒక పాలాగాని వద్ద 31.2 లీటర్ల పాలు గలవు. అతడు నలుగురు టీ దుకాణదారులకు సమానంగా ఆ పాలను పొస్తాడు. అయిన ఒక్కొక్కనికి ఎన్ని పాలు పోస్తాడు?

9. 23.5 మీ పోడవు గల రిబ్బన్ 5 మంది పిల్లలకు సమానంగా పంచినచో ఒక్కొక్కరికి ఎంత పొడవు రిబ్బను వచ్చును.

10. ఒక దుకాణంలో 37.5 కీ.గ్రా పంచదార కలదు. అందులో 2.5 కి.గ్రా వంతున పెకట్లు కట్టెను. అయిన ఎన్ని పెకట్లు అగును?

11. నియమాలను అనుసరించి ప్రమాణాలను (యూనిట్లు) మార్చండి.

క) 7.2 మీ. లను సెం.మీ. లోనికి.

ఖ) 4.2 మీ. ను సెం.మీ.లోకి

గ) 7.48 మీ. ను డెసి.మీ. లోకి

ఘ) 2.38 సెం.మీ. ను మీ.లలోకి.

ఙ) 357 సెం.మీ. ను మీ. లోకి

చ) 2.3 సెం.మీ. ను మిల్లీ మీ. లోకి

మీకు తెలుసా ?

1000 మీ.	=	1 కి.మీ.
100 మీ.	=	1 సెం.మీ.
10 మీ.	=	1 డెకా.మీ.
1 మీ	=	10 డెసి.మీ.
	=	100 సెం.మీ.
	=	1000 మీ.మీ.

12. నియమాలను అనుసరించి ప్రమాణాలను మార్చి వ్రాయుము.

క) 3.2 8 గ్రా ను గ్రా. లో

ఖ) 52.47 కి.గ్రా గ్రా లో

గ) 2537 గ్రా ను కి.గ్రా లో

ఘ) 483.7 గ్రా .ను. కి. గ్రా లో

ఙ) 5.2 గ్రా ను మీ. గ్రా లో

3వ అధ్యాయం

మౌళిక రేఖగణిత చిత్రాలు

3.1 ఉపోద్ఘాతము

మనం కింది తరగతులలో నేర్చుకొనిన కొన్ని రేఖ చిత్రాల అకారాలు-

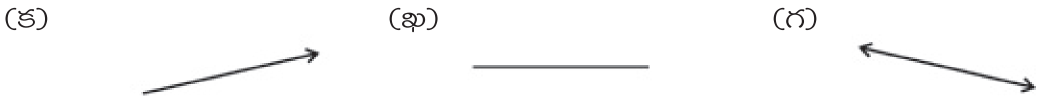
సరళరేఖ, రేఖ ఖండం, కిరణం

కోణం, కోణ పరిమాణం, పరిమాణం బట్టి కోణాల రకాలు లబ్ద (లఘు) కోణం, లంబ కోణం, అణక (గురు) కోణం.

వివిధ సరళరేఖలలో కలిసియున్న చిత్రాలు అని త్రిభుజం, చతుర్భుజం, సరళరేఖ, విషయంలో శీర్షం, కోణం, భుజము, అంతర్భాగం, వివిధ రకాల చతుర్భుజాలు, అని ట్రెపడయం, సమాంతర చతుర్భుజం, దీర్ఘచతురశ్రం, చతురశ్రం రొంబస్. వక్రశిగా చిత్రాలు - వలీత్తం, వ్యాసార్థం, వ్యాసం, జ్యా, సెక్టార్, చాపం అర్థవలీత్తం, వలీత్యాంతర భాగం, వలీత బాహ్యభాగం.

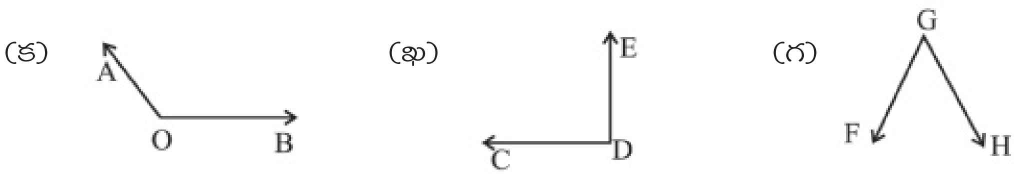
మనం నేర్చుకున్న వాటిని గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం రండం.

1. క్రింది వానిలో 84, రేఖాఖండం, కిరణం లను గుర్తించుము.



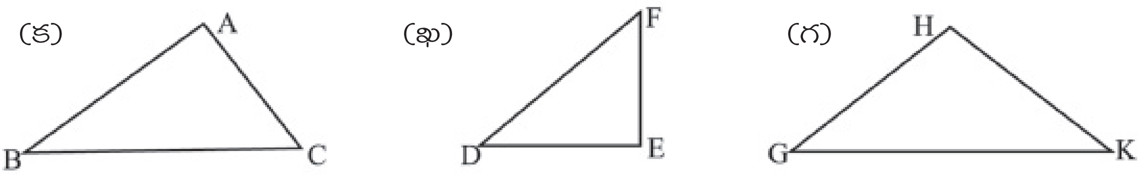
(పటం 3.1)

2. క్రింది వానిలో అల్పకోణం, లంబకోణం, అధిక కోణంలను గుర్తించుము.



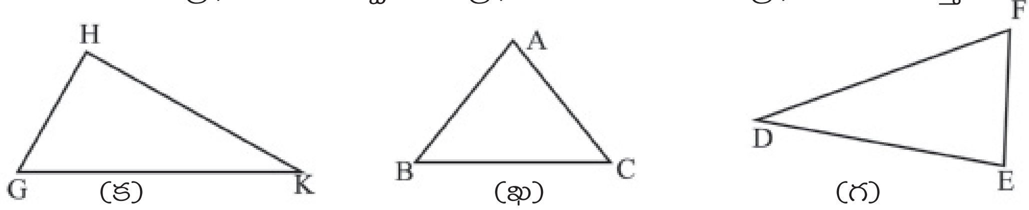
(పటం 3.2)

3. క్రింది వానిలో అల్పకో త్రిభుజం, లంబకోణ తట్రభుజం, అధికకోణం త్రిభుజంలోను గుర్తించుము.

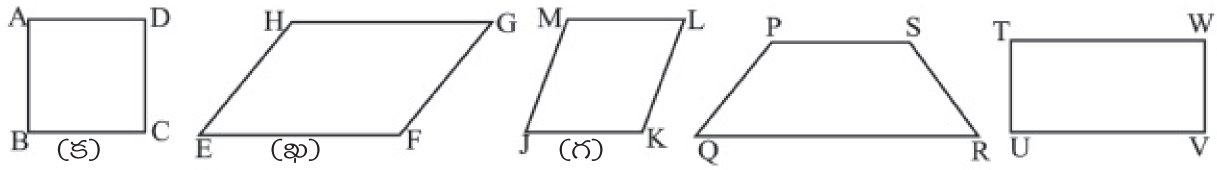


(పటం 3.3)

4. క్రింది వానిలో సమబాహు, త్రిభుజం, సమద్విబాహు త్రిభుజం, విషమ బాహు త్రిభుజంలను గుర్తించుము.



5. క్రింది వానిలో ట్రపిజియం, సమంతర చతుర్భుజం, దీర్ఘ చతురస్రం, చతురస్రం లను గుర్తించుము.



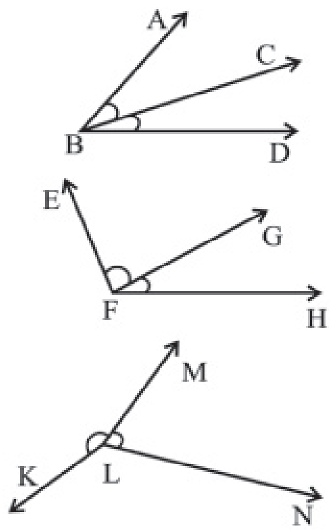
(ఖ) చిత్రాలలో ఏ ఏ చిత్రం కోణాలన్ని లంబకోణాలు.

(గ) చిత్రాలోని కోణాలు ఏవి సమాన పరిమాణం లోను ఏ భుజాల పొడవులు సమానంగా నున్నాయి.

ఘ) లో ఏ భుజాలు సమానం.

3.2 వివిధ రకాల కోణాలు - జలతు -

3.2.1. అసన్న కోణాలు (సన్నిగిత గోణాలు)



ప్రక్కన గల (క) (ఖ) (గ) లో గల మూడు జతల కోణాలు.

క) పటంలో

ఖ) పటంలో

గ) పటంలో

(క) పటంను పరిశీలించండం-

$\angle ABC, \angle CBD$ రెండు కోణాల శీర్ష బిందువు B అందుచే $\angle ABC, \angle CBD$ ల సాధారణ శీర్ష బిందువు అందురు.

$\overrightarrow{BC}$, $\angle ABC, \angle CBD$ రెండంటికి ఉన్నది ఖండం అగును.

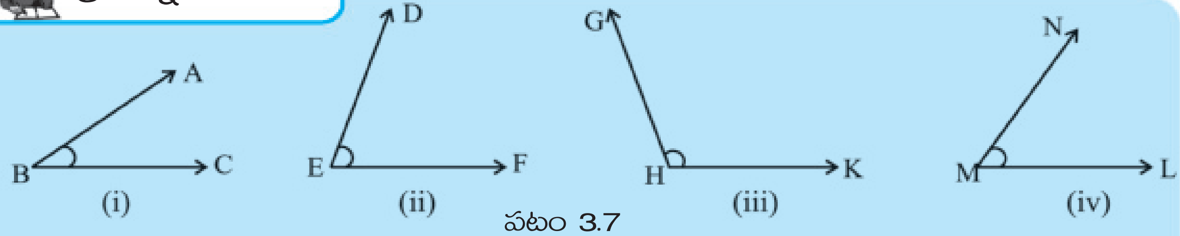
కావున $\overrightarrow{BC}$ ను $\angle ABC, \angle CBD$ రెండు కోణాల. సాధారణ భుజం అందురు.

A, D బిందువులు $\overrightarrow{BC}$ లేక $\overrightarrow{BC}$ యొక్క రెండు ప్రక్కలందు గలవు. అనగా కోణం అంతర్భాగంలో ఎటువంటి సాధరణ బిందువు లేదు. ఈ మూడు కారణాల చేత $\angle ABC, \angle CBD$ ల పరస్పర అసన్న కోణాలు అందురు.

పటం 3.6 లో (ఖ), (గ) పటంలలోగల అసన్ని కోణాలను గుర్తించి వాటి కోణాలు వ్రాయండం.

3.2.2. పూరక కోణాలు, సంపూరక కోణాలు.

ప్రయత్నించండి.



పటం 3.7

పై కోణాల పరిమాణాన్ని కోణ నానిని ప్రోటాక్టర్ సహాయంతో కొలసి తెలుసుకొని కింది పట్టికలో వ్రాయండి.

కోణం	$\angle ABC$	$\angle DEF$	$\angle GHK$	$\angle LMN$
పరిమాణం				

- ఏ రెండు కోణాల మొత్తము 90^0 లు అగునో చూడండి.
- ఏ రెండు కోణాల మొత్తం 180^0 ఉన్నది.
- రెండు కోణాల మొత్తము 90^0 కు సమానమైతే ఆ కోణాలను ఒకదానికి ఒకటి పూరక కోణాలు అంటాం.

ఇచ్చట రెండు పరస్పర అనుపూరక కోణాల పేర్లు రాయండి.

డిగ్రీ ప్రమాణంలో $\angle ABC$ యొక్క పరిమాణాన్ని సాంకేతికంగా $\angle ABC$ అని రాయుదురు.

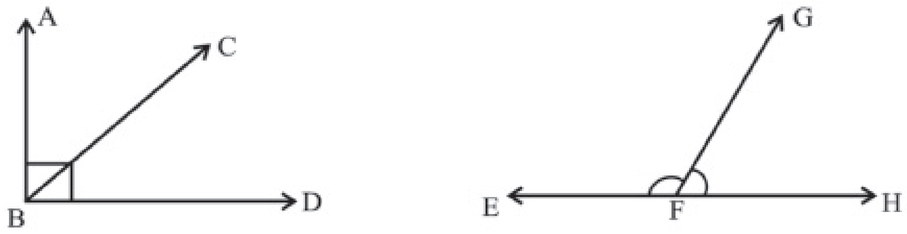
మీరు తయారు చేసిన పట్టికను పరిశీలించండి.

- రెండు కోణాల మొత్తం 180^0 కు సమానమైతే ఆ కోణాలను ఒక దానికి ఒకటి సంపూరక కోణాలు అంటాం.
- ఇచ్చట సంపూరక కోణాలు రెండుంటివ్వెర్లను వ్రాయండి.
- ఇచ్చట $\angle ABC, \angle LMN$ లు పరస్పర పూరక కోణాలు. అనగా $\angle ABC$ యొక్క పూరక కోణం $\angle LMN$ $\angle LMN$ పూరక కోణం $\angle ABC$ ఇచ్చట $\angle DEF, \angle GHK$ పరిమాణం మొత్తం 180^0.
- కావున $\angle DEF, \angle GHK$ లు పరస్పరం సంపూరక కోణాలు అనగా $\angle DEF$ యొక్క సంపూరక కోణం $\angle GHK$ $\angle GHK$ యొక్క సంపూరక కోణం $\angle DEF$

చెప్పి చూడండి.
రెండు సంపూరక కోణాలలో ఒకటి సూక్ష్మ కోణం అయినచో రెండవది ఏ కోణం అగును?

3.2.3. 3.2.3 సన్నిహిత (అసన్న) పూరక కోణాలు, అసన్న సంపూరక కోణాలు.

క్రింది పటంను చూడండి.



పటం (క) లో $\angle ABC, \angle CBD$ రెండు పరస్పర అసన్న కోణాలు అగునా? ఎందుచేత.

పటం (ఖ) లో $\angle EFG, \angle GFH$ రెండు పరస్పర అసన్న కోణాలు అగునా? ఎందుచేత.

పటంలలోని కోణాలను కొలిచి కింది పట్టికలో వ్రాయండి.

కోణ్ణపేరు	$\angle ABC$	$\angle CBD$	$\angle EFG$	$\angle GFH$
కోణపరిమాణం				

- $\angle ABC, \angle CBD$ ల మొత్తం కనుగొనండి.
- $\angle EFG, \angle GFH$ ల మొత్తం కనుగొనండి.

చెప్పి చూడండి.
$\angle ABC, \angle ABI$ అసన్న కోణాలు అగునో కారణం ఏమిటి?

క) ఏ రెండు అసన్న కోణాల మొత్తము 900 అగును ?

ఖ) ఏ రెండు అసన్ని కోణం మొత్తం 1800 అగును ?

గ) ఏ రెండు కోణాలు పరస్పరం పూరక కోణాలునను ?

ఘ) ఏ రెండు కోణాలు పరస్పర సంపూరకంలు అగును ?

మీకు తెలుసా ?
పరస్పర అసన్నసంపూరక కోణాలు రెండింటిని ఒక శరళ జత రేఖ ద్వయం కోగాలు అందురు.

$\angle ABC, \angle CBD$ లు పరస్పర అసన్న పూరక కోణం ఎందుకనగా ఆ రెండు అసన్ని కోణాలు, పరస్పర పూరకాలు

$\angle EFG, \angle GFH$ లు పరస్పరం ఆసన్ని సంపూరకాలు ఎఘదుకనగా ఆ రెండు కోణాలు, అసన్నాలు, పరస్పరం సంపూరకాలు.

మీరు చేసి చూడండి.

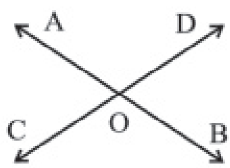
- ఒక్స్కలును తీసుకొనుము.
- ్స్కలు ఒక అంచును పటం 3.8 (ఖ) లో వలె E,F బిందువులలో కలపండి.
- ఏం తెలుసుకున్నారు ?
- H బిందువు కూడ్స్కలు అంచునుతాకుతున్నాది. దీని వలన $\overleftrightarrow{FE}, \overleftrightarrow{FH}$ లు రెండు ఒక సరళరేఖలో ఉన్నట్టు తెలుస్తున్నది.

అందుచేత సన్నిహిత కోణాలు $\angle EFG, \angle GFH$ ల బాహ్య భుజాలు $\overleftrightarrow{FE}, \overleftrightarrow{FH}$ ఒకే సరళరేఖలో ఉన్నట్లు తెలుస్తున్నది. అందుచేత
ఈ రెండు అసన్నికోణాలను రేఖము ద్వయము (శరళజత కోణాలు) అంటారు.

3.2.4. పరస్పర వ్యతిరేక కోణాలు?

పటం 3.9 (క) లో గల కత్తెరలోని ఎన్ని కోణాల ఆకారాలు కలవు. ?

పటం 3.9 (ఖ) లో $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ లు రెండు O బిందువు వద్ద ఖండించునుకోణాలు ఇందులో ఎన్ని కోణాలు కలవు.



పటం 3.9 (ఖ) లో నాలుగు కోణాలు గలవు. అవి.

$\angle AOC, \angle COB, \angle BOD, \angle DOA$

పరిశీలించండి.

- $\angle AOC, \angle COB$ రెండింటి సాధరణ బిందువు ఖండన బిందువు O.
- $\angle AOC, \angle COB$ రెండింటి ఉమ్మడి భుజం

A,B బిందువులు $\overleftrightarrow{CO}$ యొక్క వ్యతిరేఖ పార్శ్వాల $\overrightarrow{OC}$ కలదు.

చూడండి

$\angle AOC, \angle AOD$ లు పరస్పరం అసన్నకోణాలు.

అదేవిధంగా $\angle AOC$ కోణంలో సన్నిహిత కోణం ఏది?

$\angle AOC$ లో $\angle AOD$ అసన్న కోణం.

$\angle AOC, \angle COB$ లు అసన్న కోణాలు.

$\angle AOC, \angle COA$ లు అసన్న కోణాలు.

ఆ పటంలో ఇంకా ఏ కోణాలు కలవు.

మిగిలిన కోణం $\angle BOD$

ఈ $\angle BOD, \angle AOC$ పరస్పరం వ్యతిరేక కోణాలు.

$\angle AOC$ వ్యతిరేకకోణం $\angle BOD$, $\angle BOD$ వ్యతిరేక కోణం $\angle AOC$

అందుచేత

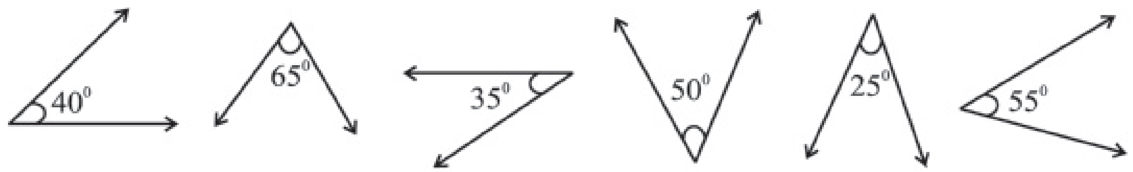
రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం ఖండించుకొనుట ద్వారా ఏర్పడే నాలుగు కోణాలలో ఒక కోణంలో సన్నిహితం (అసన్నం) కాని మరొక కోణం వ్యతిరేక కోణం అగును.

> చెప్పి చూడండి.
> $\angle AOC, \angle COB$ లు
> ఎటువంటి కోణాలు.

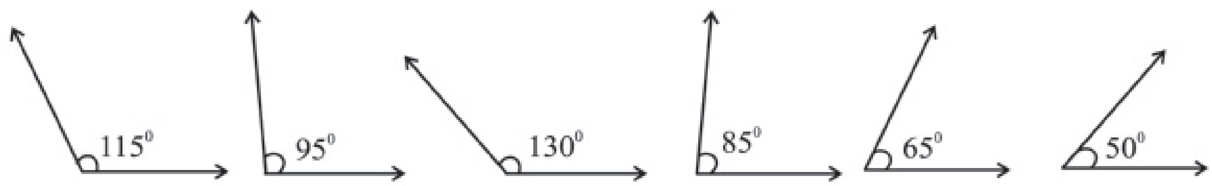
> మీకు తెలుసా?
> పరస్పర ప్రతీపకోణములను వ్యతిరేక కోణాలని కూడా అంటారు.

పటం 3.9 (ఖ) లో ఎన్ని జతల వ్యతిరేఖ కోణాలు కలవు.

అభ్యాసం 3.1

1. 

పైన ఆరు కోణాలు ఇవ్వబడినవి. వాటిలో గల పూరక కోణాల జతలను గుర్తించి వాట్ని వ్రాయుము.

2. 

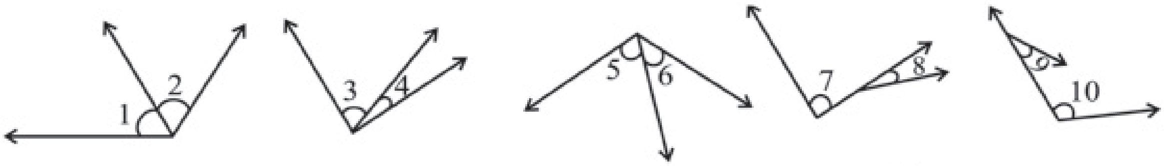
పైన ఆరు కోణాలు ఇవ్వబడినవి. వాటిలో గల సంపూరక కోణాల జతలను గుర్తించి వాట్ని వ్రాయుము.

3. క్రింది కోణాల పూరక కోణాల యొక్కసంపూరక కోణాలను వ్రాయుము.
(క) 40° (ఖ) 70° (గ) 85°

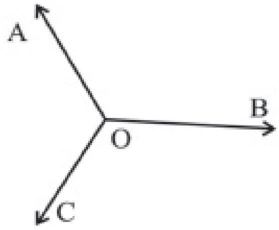
4. క్రింది కోణాల సంపూరక కోణాలను వ్రాయండి.
(క) 30° (ఖ) 90° (గ) 110°

> మీకు తెలుసా?
> ఒక స్థూలకోణమునకు అనురూప కోణము ఉ ండునా? కారణం ఏమి?

5. కింది పటంలోని ప్రతీ పటంనందు గల పరస్పర అసన్న కోణాల జత్వఎర్లను వ్రాయండి. ఏ పటంలోని రెండు కోణాలు పరస్పరం ఏసన్నాలు కావు.

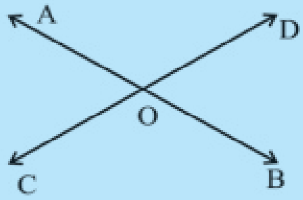


6. 6. ప్రక్కన పటంలోని వరసుగ అసన్న కోణాల జతల్వఎర్లను వ్రాయండి.
సూచన - ఇచ్చట మూడు జతల పరస్పర అసన్న కోణాల జతలు కలవు.

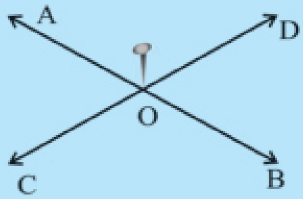


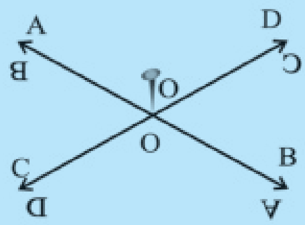
3.3. పరస్పర వ్యతిరేక కోణాల మధ్య గల సంబధం.

స్వయంగా చేసి చూడండి.



- స్కేలును ఉపయోగించి మీ నోట్ పుస్తకంలో ప్రక్క 3.13 (క) పటంలో చూసినట్లు పరస్పరం ఖండించు కొనే రెండు సరళరేఖలను నిర్మించండి. వాటి పెర్లు $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{CD}$ వాటి ఖండన బిందువు 'O' అనుకొనుము.
- ఒక ముక్క ట్రేసింగ్ కాగితం (స్వచ్ఛమైన కాగితం) తీసుకొని ఆ పటంపై ఉంచండి. ఆ కాగితంపై $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{CD}$ రేఖలతో కలుపుతూ రెండు రేఖలు గీయండి. నోట్ పుస్తకంలో ఇచ్చిన రేఖల్వఎర్లతో సరిపోవునట్లు ట్రేసింగ్ కాగితం
- గీసిన రేఖల్వఎర్లను $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{CD}$ గాను పెటి ఖండన బిందువును 'O' గా గుర్తించుము.
- మీ నోట్పుస్తకంలోని ప్రతిరూపమైన పటంను ట్రేసింగ్ కాగితంపై లభించినది.
- ఇప్పుడు 'O' బిందువు వద్ద ఒక గుండు సూదిని అమర్చుము
- ఇప్పుడు నోట్ పుస్తకాన్ని స్థిరంగా ఉంచి ట్రేసింగ్ కాగితాన్ని నెమ్మదిగా త్రిప్పండి గుండుసూది జారుకూఉన.





ట్రేసింగ్ కాగితంలోని A నోట్ పుస్తకంలోని B కు రావలెను. ఇప్పుడు ట్రేసింగ్ కాగితంలోని రెండు రేఖలు, నోట్పుస్తకంలోని రెండు రేఖలలో కలిసిపోవును. ఇప్పుడు ఏం గమనించారు.

(క) ట్రేసింగ్ కాగితంలోని అక్షరాలు తిలకందులుగా కానబడుతున్నాయి.

A కనిపిస్తుంది గా

B కనిపిస్తుంది గా

C కనిపిస్తుంది గా

D కనిపిస్తుంది గా

(ఖ) నోట్ పుస్తకంలోని ఏ అక్షరం వద్ద ట్రేసింగ్ కాగితంలో ఏ అక్షరం గలదు.

నోట్ పూస్తకంలోని A వద్ద ట్రేసింగ్ కాగితం యొక్క తలకిందుల B కనిపిస్తుంది.

నోట్ పూస్తకంలోని B వద్ద ట్రేసింగ్ కాగితం యొక్క తలకిందుల A కనిపిస్తుంది.

నోట్ పూస్తకంలోని C వద్ద ట్రేసింగ్ కాగితం యొక్క తలకిందుల D కనిపిస్తుంది.

నోట్ పూస్తకంలోని D వద్ద ట్రేసింగ్ కాగితం యొక్క తలకిందుల C కనిపిస్తుంది.

(గ) నోట్ పూస్తకంలోని $\overleftrightarrow{AB}$ లో ట్రేసింగ్ కాగితంలోని $\overleftrightarrow{DC}$ రేఖ కలుస్తుంది.

నోట్ పూస్తకంలోని $\overleftrightarrow{CD}$ లో ట్రేసింగ్ కాగితంలోని $\overleftrightarrow{AB}$ రేఖ కలుస్తుంది.

ఇపూడు పటంను చూసి క్రింది ప్రశ్నలను సమాధాను వ్రాయండడ.

1. నోట్ పూస్తకంలో $\angle AOC$ లో ట్రేసింగ్ కాగితంలోని ఏ కోణం కలుస్తుంది.
2. నోట్ పూస్తకంలో $\angle BOD$ లో ట్రేసింగ్ కాగితంలోని ఏ కోణం కలుస్తుంది.
3. రెండు కోణాలు పరస్పరం కలిసినచో ఆ రెండు కోణాలు మధ్య గల సంబంధం ఏమిటి.
4. $\angle AOD, \angle BOC$ పరిమాణంలో ఏ సంభంధం కలదు.

ఇప్పడు కోణ మానిని సహయంతో $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle DOA$ కోణాల పరిమాణం కనుగొనండడ. వాటి పరిమాణ కింది పట్టికలో వ్రాయండడ.

కోణం	∠AOC	∠BOD	∠BOC	∠DOA
కోణ పరిమాణం				

పట్టికను చూసి కింది ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండడ.

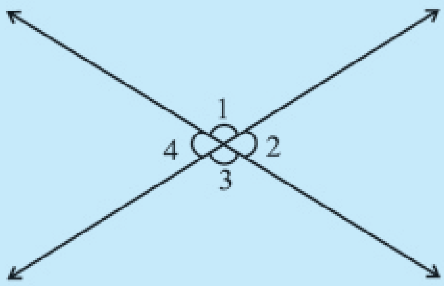
1. ∠AOC పరిమాణంతో దీని పరిమాణం సమానం.
2. ∠BOC పరిమాణంతో ఏ కోణ పరిమాణం సమానం.
3. ∠AOC $\angle BOD$ లను ఏ విధమైన కోణాలు అంటారు.
4. ∠BOC $\angle DOA$ లను ఏ విధమైన కోణాలు అంటారు.

పటం 3.13 (క) వంటివి మరి రెండు వేరు వేరు పటంలను గీసి, అందులోని రేఖీయ వ్యతిరేక కోణాలను గుర్తించండడ. కోణాల పరిమాణం కొలవండడ. వ్యతిరేక కోణాల జతల మధ్య ఎటువంటి సంబంధం కలదు.

మనకు తెలుసు.

రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం ఖండించు కొనిచో ఏర్పడన ప్రతీ జత వ్యతిరేఖ (సీర్శారేఖ) కోణాలు పరిమాణం పరస్పరం సమానం.

ప్రక పటంను చూసి సమాధానులు వ్రాయండం.



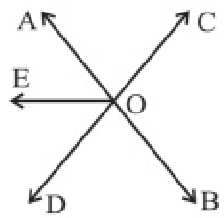
క) $\angle 1$ లో ఏ కోణం సరళ జత అగును.

ఖ) $\angle 3$ యొక్క శీర్గాభినం 4 (వ్యతిరేఖ) కోణం వెది?

గ) $\angle 2$ యొక్క శీర్గాభిముఖ కోణం ఏది ?

ఘ) ప్రక్క పటంలో $\angle 4$ పరిమాణం 60^{0} అయినచో మిగిలిన కోణం పరిమాణం ఎంత ?

అభ్యాసం 3.2



1. ప్రక్క పటంలో $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ పరస్పరం '0' బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును.

క) $\angle AOC$ కు అసన్న కోణం అయిన ఒక కోణం వ్రాయుము. ఇటువంటి ఇతర కోణాలు ఉన్నాయా- ఉంటె వేర్లు వ్రాయుము.

ఖ) $\angle AOC, \angle AOB$ లు రెండు పరస్పరం అసన్న కోణాలగునా.

గ) $\angle COB$ లో ఏ కోణం సరళ కోణం అగునో వ్రాయుము.

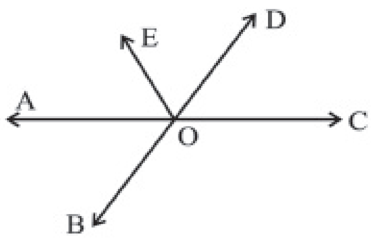
ఘ) $\angle AOD$ లో సంపూరముయ్యె ఒక కోణం వ్రాయుము.

$\angle AOD$ లో సంపూరకమయ్యే వేరొక కోణం కలదా! ఉంటే దానిని వ్రాయుము.

ఙ) $\angle AOC$ యొక్క శీర్గాఖము కోణంను వ్రాయుము.

చ) పటంలో $\angle AOD$ కోణం యొక్క శీర్గాభిముఖ కోణం ఉన్ని ఎడల అది ఏదీ ?

ఛ) పటంలో $\angle BOD$ అక్కొక్క శీర్గాభిముఖ కోణం ఉన్ని ఎడల అది ఏది?

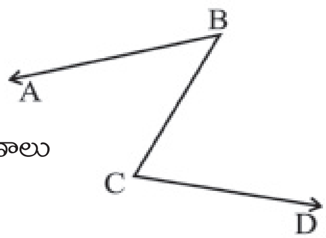


2. ప్రక్క పటంలో $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}$ రెఖలు పరస్పరం '0' బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును.

క) రెందు జతల పరస్పర శీర్గాఖము కోణాల్వ్ఎర్లు వ్రాయండం.

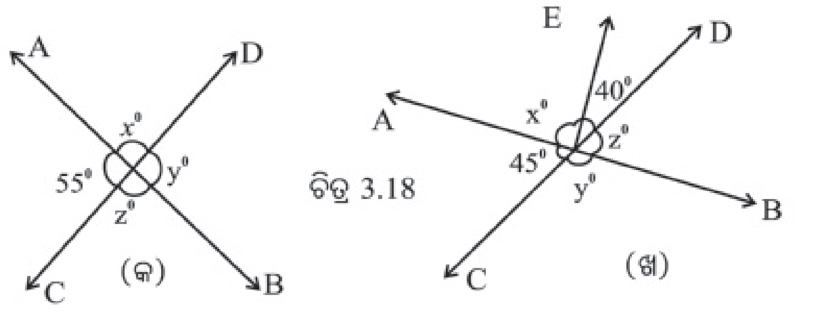
ఖ) నాలుగు జతల సరళ కోణాల్వ్ఎర్లు వ్రాయండం.

గ) అచినచో కనుగొనండం.



3. ప్రక్క పటం 3.17 లో $\angle ABC, \angle BCD$ పరస్పరం అసన్ని కోణాలు అగును ! కారణం వ్రాయండం.

4.



ଚିତ୍ର 3.18

పై పటం (క), (ఖ) $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ లు పరస్పరం ఖండించుకొనుము. పటం (క) లో ఒక కోణం పరిమాణం పటం (ఖ) లో రెండు కోణం పరిమాణంతో సమానం. ప్రతీ పటంలోని కోణాల పరిమాణం x, y, z లను కనుగొనుము.

5. ఖాళీలను పూరించుము.

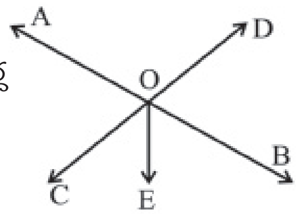
క) రెండు కాణాల పరిమాణం మొత్తం .... అయినచో ఆ రెండు కోణాలు పరిపూరకాలు.

ఖ) రెండు పరస్పర సంపూరక కోణాల మొత్తం..............................

గ) ఒక సరళకోణం అయ్యే జత రెండు కోణాలు పరస్పరం ....

ఘ) రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం ఖండించు కున్నచో ఏర్పడ శీర్షభిముఖ కోణాల రెండింటి పరమాణం..................

ఙ) రెండు సరళరేఖలు ఖండించుకొనుట వలన ఏర్పడిన ఒక జత శీర్షభిముఖ కోణాలు సూక్ష్మ కోణావైనచో మిగిలిన జత కోణాలు .... అగును.



6. ప్రక్క పటంలో $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ లు పరస్పరం 'O' బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును.

క) రెండు అధిక కోణాలను వ్రాయుము.

ఖ) సరళకోణాలు కాని అసన్న కోణాల్వుఎర్ల వ్రాయుము.

ఈ విధంగా ఎన్ని జతల అసన్న కోణాలు కలవు.

7. క్రింది కోణ పరిమాణలను బట్టి ఏం పరిపూరక కోణాలు, ఏవి పరిపూరక కోణాలు అగునో వ్రాయండి.

(క)	$55^0, 125^0$	(ఖ)	$43^0, 47^0$	(గ)	$112^0, 68^0$	(ఘ)	$62^0, 28^0$
(ఙ)	$40^0, 140^0$	(చ)	$70^0, 20^0$	(ఛ)	$15^0, 165^0$	(జ)	$90^0, 90^0$

8. క) ఏ కోణం దానికదే సంపూరకము అగునో దాని విలువ ఎంత ?

ఖ) ఏ కోణం దానికదే పరిపూరకము అగునో దాని విలువ ఎంత ?

9. రెండు పరస్పర సంపూరక కోణాలలో ఒక దాని పరిమాణం 10^0 అధికం చేయబడినది. మిగిలిన కోణ పరిమాణంలో ఏ మార్పు చేసిన కొత్తగా ఏర్పడే రేండు కోణాలు పరస్పరం సంపూరకకోణం అగును.

10. పరస్పర సంపూరకోణలు అయిన రెండు కోణాలలో రెండూ.

క) లఘు కోణాలు అగునా?

ఖ) అధిక కోణాలు అగునా ?

గ)	రెండు లంబకోణములు అగునా ?

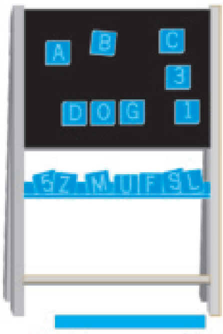
ఘ)	ఒకటి సూక్ష్మకోణం రెండవది లంబకోణం అగునా?

ఙ)	ఒకటి సూక్ష్మకోణం రెండవది అధిక కోణం అగునో ?

11.క) రెండు సంపూరక కోణాలలో ఒకదాని పరిమాణం మరొక దాని పరిమాణానికి రెట్లు అయినచో ఆ రెండు కోణాలు పరిమాణం లను కనుగొనుము.

ఖ)	రెండు పూరక కోణాలలో ఒక దాని పరిమాణం రెండవ దానికి 4 రెట్లు అయినచో ఆ రెండింటి పరిమాణంలను కనుగొనుము.

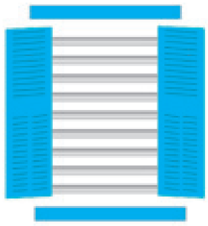
3.4 ఒకటి కంటె ఎక్కువ సరళరేఖల ఖండన రేఖలు-

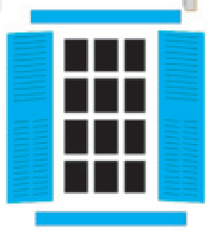


రెండు సరళరేఖలను రెండు స్థితులు ఉండవచ్చు. అరెండు పరస్పరం సమాంతరంగాని, అసమాంతరంగాని కావచ్చు. పటం 3.20 (క) నల్లబల్ల స్లాంటుపై ఉన్నది. నల్లబల్ల పై అంచు కింది అంచు రెండు సమాంతర రేఖాఖండాలు. అదే విధంగా ఎడమ ప్రక్క అంచు, కుడిం ప్రక్క అంచు మరి రెండు సమాంతర రేఖ ఖండాలకు సమానాలు.

పటం (ఖ) లో ఇనుపరాడ్లు ఉన్న కిటకి కలదు. అందులోని ఇనుపరాడ్లు సమాంతర రేఖ ఖండాం సమానాలు.

పటం (గ) లో గ్రీల్ తగిలియున్న కిటికీ కలదు. గ్రీల్ లోని ఇనుపరేకులు పరస్పరం ఖండించుకొనుచున్నాయి.





రెండు రేఖలకు ఒక సాధారణ బిందువు ఉన్నచో ఆ రెండు రేఖలను ఖండన రేఖలు అంటారు. ఆ సాధారణ బిందువును వాటి ఖండన బిందువు అంటారు.

మీ పరిసరాలలో ఏవి పరస్పర ఖండన రేఖలు వలే కనిపిస్తుంటాయో రాయండం.

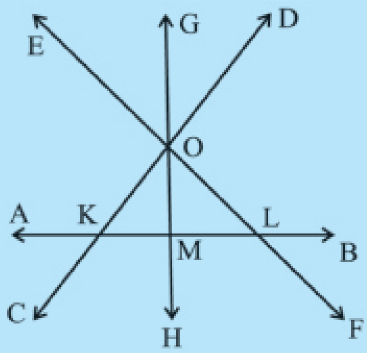
పటం 3.20 లో ఉన్న విధంగా గల పటాలను మీ నోట్ పుస్తకంలో గీయండం.

మీరు ప్రయిత్నించండం.

పటం 3.4 లో కనిపించే పరస్పర ఖండనరేఖల జతం్వర్లను వాటి ఖండన బిందువుల్వర్లను వ్రాయుము.

ఉదా - $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ పరస్పరం ఖండన రేఖలు. వాటి ఖండన బిందువు k ఈ విధంగా ఆరు జతల పరస్పర ఖండన రేఖలను వాటి ఖండన బిందువుల్వర్లను వ్రాయండం.

ఈ పాటంలో సమాంతర రేఖలు ఉన్నాయా ?

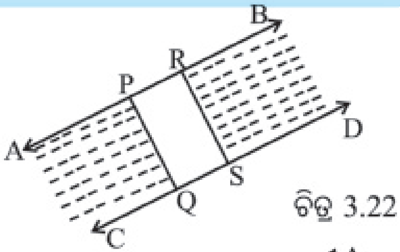


(ఖ) రెండు లేక రేఖా ఖండాంలో ఒకటి కంటె అధికంగా ఖండన బిందువులు ఉండగలవా? ఒక వేళ ఉండగలిగినచో అటువంటి రెండు బొమ్మలను గీయండం.

(గ) మీ పరిసరాలలో పరస్పరం లంబకోణాలలో ఖండంచుకొనే రేఖలు లేక రేఖ ఖండాలను ఎచ్చట చూడగలరో వ్రాయండం.

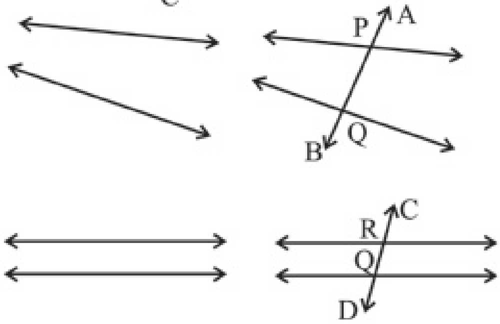
(ఘ) ఒక దీర్ఘచతురస్రంలో ప్రతీ జత రేఖలు ఖండంచుకొనుచోట ఏర్పడే కోణం ఎంత? పోష్టుకార్డును తీసుకొని ఈ పని చేయండం.

3.4.1 తిత్యరేఖలు (ఖండన రేఖలు)-



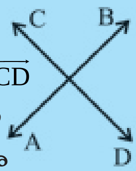
ఠిత్ర 3.22

ప్రక్క పటం 3.22 లో ఒక కాలువ యొక్క రెండు ప్రక్కలందు గల రెండు గట్టులు $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ లు రెండు రేఖలకు సమానాలు దానిపై గల వంతెన ప్రతీ అంచు $\overline{PQ}, \overline{RS}$ లు ఒకొక్కక్క రేఖా ఖండం సమానాలు. ఇచ్చట $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ లను $\overline{PQ},$ ఖండదస్తుంది. అదే విధంగా $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ లను $\overline{RS}$ కూడా ఖండదస్తుంది.

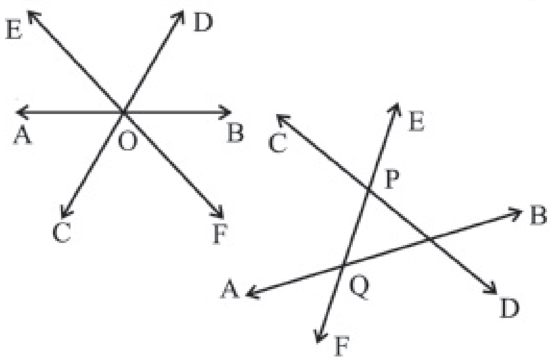


పటం 3.23 (క) లో రెండు అసమాంతర సరళరేఖలు ఉన్నాయి.
పటం (ఖ) లో ఒక సరళరేఖ రెండు అసమాంతరరేఖలను.
పటం (గ) లో రెండు సమాంతర రేఖలు గలవు.
పటం (ఘ) లో ఒక సరళరేఖ $\overleftrightarrow{CD}$ రెండు సమాంతర రేఖలను P, Q ల వద్ద ఖండదస్తుంది.
పటం (ఖ) లో $\overleftrightarrow{AB}$ ను ఇతర రేఖల తిర్ఛరేఖ అందురు.
పటం (ఘ) లో $\overleftrightarrow{CD}$ ను ఇతర రేఖల తిర్ఛరేఖ అందురు.
ఒక రేఖ మరి రెండు లేక అంతకంటె ఎక్కువరేఖలను వేరు వేరు బిందువుల వద్ద ఖండంచు కొనినచో ఆ రేఖను. వాటి తిర్యరేఖ అంటారు.

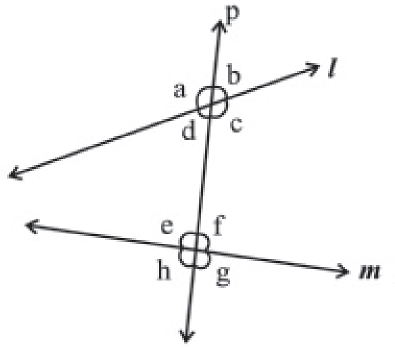
మీకు తెలుసా?
ప్రక్కన గల చిత్రంలో $\overline{AB}$ మరియు $\overline{CD}$ పరస్పరం ఛేదించుకొని ఉన్నవి. ఇచ్చట $\overline{CD}$ మరో రేఖ $\overline{AB}$ ను ఖండించు చున్నది. మరియు $\overline{CD}$ కూడా ఇతర రేఖ $\overline{AB}$ కు ఖండించు చున్నది.



పరిశీలించండం
ప్రక్క పటంలో 3.24 (క) లో $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ లు రెండు పరస్పరం ఖండన లేక అసమాఖతర రేఖలు. ఈ రెండు రేఖలను $\overleftrightarrow{EF}$ O వద్ద ఖండదస్తుంది.
పటం 3.24 (ఖ) లో $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ రెండు పరస్పరం ఖండన లేక అసమాంతర రేఖలను $\overleftrightarrow{EF}$ రెండదంటిని వేరు వేరు బిందువుల వద్ద ఖండదస్తుంది.
పటం (క) లో $\overleftrightarrow{EF}$ మిగిలిన రెండు $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ రేఖలకు తీర్యక్ రేఖలు ఇచ్చట $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ EF లను ఒకే బిందువు గుండా పోడువు రేఖలు అంటారు.
పటం (ఖ) లో $\overleftrightarrow{EF}$ మిగిలిన $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ లకు తిర్యశ్రేఖ అగును.



3.4.2. తిర్యగ్రేఖచే ఏర్పడే కోణాలు -



3.25 లో l, m రెండు రేఖలను p రేఖ వేరు వేరు బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది. కావున p రేఖ ఒక తిర్యగ్రేఖ. ప్రతి ఖండన బిందువు వద్ద కోణాలు ఏర్పడును. ఆ కోణాలు a, b, c, d, e, f, g, h పేరుతో పిలువబడుచున్నవి.

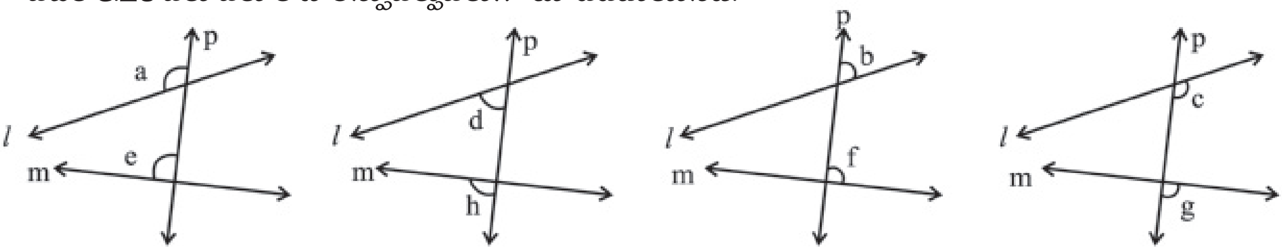
l రేఖ p రేఖల ఖండన బిందువు వద్ద 4 కోణాలు ఏర్పడుతున్నాయి.

m రేఖ p రేఖల ఖండన బిందువు వద్ద 4 కోణాలు ఏర్పడుతున్నాయి. పటంలో వేరు వేరు కోణాలకు వేరు వేరు పేర్లు ఇవ్వబడినవి. 6 పేర్లను క్రింది పట్టికలో పొందుపరచబడినవి.

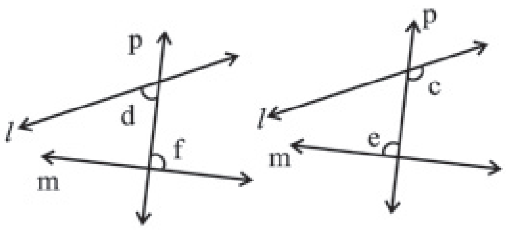
క్రింది పట్టికలో పొందుపరచబడినది.

l, m ఖండన రేఖల అంతరకోణం c, d, e, f	
l, m ఖండన రేఖల బాహ్యకోణాలు a, b, g, h	
p తిర్యగ్రేఖకు కుడి ప్రక్కనగల కోణాలు b, c, f, g	
p తిర్యగ్రేఖకు ఎడమ ప్రక్కగల కోణాలు	
సదృశ (అనురూపక) కోణాల జతలు	
ఏకాంతర అంతర కోణాల జతలు	
ఏకాంతర బహ్యకోణాలు జతలు	
తిర్యగ్రేఖకు ఒక ప్రక్కన గల అంతరకోణాల జతలు	

పటం 3.26 వేరు వేరు కోణాలన్నుపేర్లుపేరుగా చూడడమయినది.



పైన గల నాలుగు పటంలో నాలుగు జతల అనురూప కోణాల పటములు కలవు.



పటం 3.27 లో గల ప్రతీ అనురూప కోణాల జత

తీర్యగ్రేఖకు ఒక ప్రక్కన గలవు - $\angle a \,\&\, \angle e, \angle d \,\&\, \angle h$ కోణాల జత తిర్యగ్రేఖకు ఎడమ ప్రక్కనగలవు $\angle b \,\&\, \angle f, \angle c \,\&\, \angle h$ కోణాల జత తిర్యగ్రేఖకు కుడిపైవున గలవు.

అనురూప కోణాలు ప్రతీ తిర్యక్రేఖకు పైన కలవు. $\angle a$, $\angle e$ అవి $\angle b$, $\angle f$ తిర్యక్రకకు పైన $\angle d$, $\angle h$ అవి $\angle c$, $\angle g$ కోణాలు కలవు.

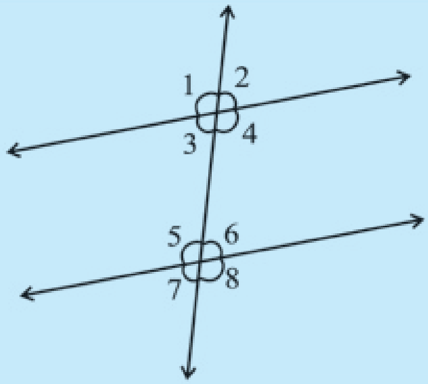
పటం 3.27 లో ప్రతీ ఏకాంతర కోణాల జత -

ఖండన రేఖకు వ్యతిరేఖ దిశలో కలవు. అవి $\angle d$ తిర్యక్రఖకు ఎడమ ప్రక్కన తిర్యక్రేఖకు కుడం ప్రక్కన $\angle f$ తిర్యక్రఖకు ఎడమ ప్రక్కన $\angle e$ తిర్యక్రఖకు $\angle c$ కుడం ప్రక్కన కలవు.

త్రిర్యక్రఖకు వ్యతిరేఖ ప్రక్కన $\angle d$ తిర్యక్రేఖక $\angle f$ రేఖ దిగువున $\angle e$ తిర్యక్రేఖ $\angle c$ భాగంలో కలదు తిర్యక్రేఖ భాగంలోను తిర్యక్రేఖకు క్రింది భాగంలో కలదు.

సమాధానాలు వ్రాయండం.

ప్రక్క పటం నుండం క్రింది జతల కోణాలు ఏ రకమైనవో వ్రాయండం.



(క)	(ఖ)
(గ)	(ఘ)
(ఙ)	(చ)

3.4.3 సమాంతర రేఖలపై తిర్యక్రేఖ

ఒకే సమతలంపై గల రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం ఖండదంచుకొనూచో ఆ రెండు సరళరేఖలు సమాంతర రేఖలని అంటారు.

మీరు ప్రయత్నించండం

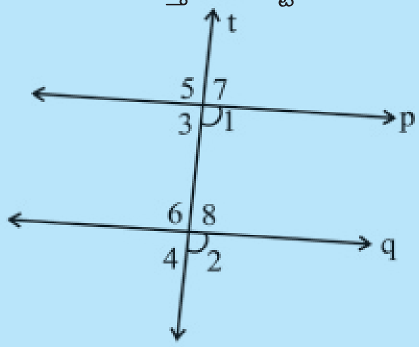
చెప్పి చూడండం.
మూడు సరళరేఖలను ఒక తీర్యక్రేఖ ఎన్ని బిందువుల వద్ద ఖండదంచును.
రెండు రేఖలకు ఎన్ని తిర్యక్రేఖలను నిర్మించగలం.
ఏ ఏ అంగ్ల అక్షరాలలో సమాంతర రేఖలు కలవు.

వీ ు ం ు

ప్రయత్నించండం

- ఒక రూళ్ళ కాగితంను తీసుకొనుము.
- ఒక్వస్కలును తీసుకొని కాగితంపై ప్రక్క ప్రక్కనే లేని రెండు రూళ్ళతో కలుపుతూ్వస్కలు అంచును ఉంచండం. కలంతో రూళ్ళు గీయండం. అప్పుడు చూడండం. మీరు గీచిన రూళ్ళు ఇతర రూళ్ళు కంటె దళసరగా ఉండుటవలన అది మిగిలిన వాటి కంటె సలీహాలింగా కనిపిస్తుంటాయి.
- ఇటువంటివి నాలుగు జతల గీతలు గీయండం. వాటిని మరింత సలీహంగా ఉండు విధంగా గీయండం.

ప్రతి జత గీతలకు సరళరేఖ గుర్తులు ఇవ్వండి (అనగా రెండు చివరలకు బాణం గుర్తులను పెట్టండి)



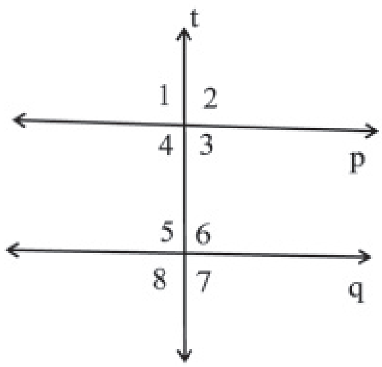
- ప్రతీ జత సరళరేఖలు సమాంతర రేఖలుగా మారినవి (రెండుకనగా రూళ్ళ కాగితంలోని గీతలు అన్ని సమాంతరాలు)
- ప్రతీ జత సమాంతర రేఖలకు ఒక్కొక్క తిర్యక్‌రేఖను గీయండి.
- తిర్యక్‌రేఖ సమాంతర రేఖలను ఖండించినచో ఏర్పడే కోణాలకు ప్రక్కనగల పటంలో వలె పేర్లు పెట్టండి.
- రేఖలకు, కోణాలకు పేర్లు పెట్టండి.
- ఒక ట్రేసింగ్ కాగితం తీసుకొని పైన గీచిన పటం పై ఉంచండి. ట్రేసింగ్ కాగితం పై రేఖలతో కలియునట్లు మూడు రేఖలను గీయండి. మునుపటి పటంవలె ట్రేసింగ్ కాగితంపై గీచిన మూడు రేఖలకు పేర్లు పెట్టండి. ట్రేసింగ్ కాగితంపై గల కోణాలకు $\angle 1$, $\angle 2$, అని పేర్లు పెట్టండి.
- ఇప్పుడు మెల్ల మెల్లగా ట్రేసింగ్ కాగితంను పై భాగం దిశగా జరపండి. ట్రేసింగ్ కాగితం పై గీసిన రేఖ రూలింగ్ కాగితంపై గీసిన తో ఏకీభవించునట్లు చేయండి.
- మీరు గమనించారా
  ఇప్పుడు ట్రేసింగ్ కాగితంపై గీచిన $\angle 2$ రూలింగ్ కాగితం పై గీచిన లో పూర్తిగా ఏకభవించినట్లు కనిపిస్తుంది. కావున $m\angle 1 = m\angle 2$ అని మనకు తెలుస్తుంది.
- ఇదే విధంగా ట్రేసింగ్ కాగితంపై మునిపటి వలె పటంలను గీచి కింది కోణాల మధ్య గల సంబంధాన్ని తెలుసుకొనుము.

(క) $\angle 3, \angle 4$ (ఖ) $\angle 5, \angle 6$ (గ) $\angle 7, \angle 8$

పై ప్రయోగాన్ని బట్టి మనం ఏమి తెలుసుకున్నాం.
రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యక్‌రేఖ ఖండించగా ఏర్పడు ప్రతిజత యొక్క అనురూప కోణాలు సమానము.

ఈ ధర్మాన్ని ఉపయోగించి మరొక ధర్మాన్ని రాబడదాం.

ఇచ్చట లు రెండు సమాంతర రేఖలు. తిర్యక్‌రేఖ అగుట వలన



(అనురూపకోణాలు అగుట వలన)

(శీర్షాభిముఖ కోణాలు అగుట వలన)

అందుచేత

అదే విధంగా (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

(అనురూపకకోణాలు)

కావున $m\angle 3 = m\angle 5$ ।

కోణాల జతలు ఏ విధమైన కోణాలు

పైన చెప్పిన ప్రతీ జత కోణాలు పరస్పరం ఏకాంతర కోణాలు.

కావున

రెండు సమాంతర కోణాలను ఒక తీర్యశ్రఖ ఖండించుట ద్వారా ఏర్పడిన ప్రతీ జత ఏకాంతర ర కోణాలు సమానము.

ఈ ధర్మాన్ని ఉపయోగించి మరొక ధర్మాన్ని రాబడదాం.

పటం 3.30 లో లు సరళ కోణాల జత అగుటవల్ల అవి సంపూరకాలు. కాని అపురక కోణాలు అటుటవలన కావున మరియు లు పరస్పరం సంపూరకోణ. అదే విధంగా లు సరళకోణాల జత అగుబ వలన అని సంపూరకాలు. కాబట్టి లు పరస్పరం సంపూరకాలు.

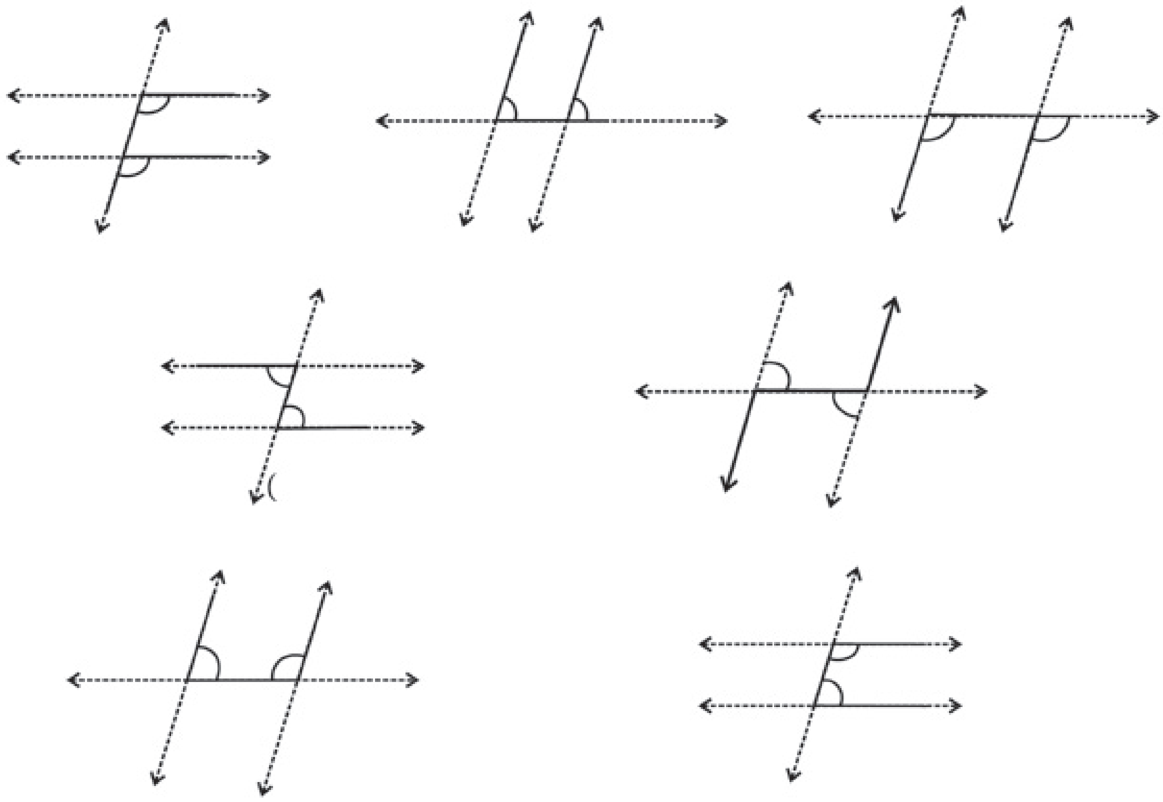
కోణాల జతలు ఏరకపు కోణాల జతలు ?

ఈ రెండు జతల కోణాలు పరస్పరం తిర్యశ్రీఖకు ఒకే ప్రక గల అంతర కోణాలు.

అందువలన

రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యశ్రీఖ ఖండించగా తిర్యశ్రీఖకు ఒకే ప్రకన గల అంతరకోణాలు సంపూరకాలు. అనగా ఆ రెండు కోణాల మొత్తం 180^{0}.

ఏకాంతర కోణ జతలు, అనురూప కోణ జతలు, తిర్యశ్రీఖకు ఒకే వున గల అంతకోణా జతలును సులభంగా గుర్తించుటకై క్రింది పటంలోను పరిశీలించండి.



పటం 3.31 (క) (ఖ) (గ) ఒక్కొక్కటి ఆంగ్ల అక్షరం   ను పోలిన వివిధ స్థితులు కలవు. వాటిన్నింటిలో ఒక జత అనురూప కోణాలు. గుర్తించడమయినది.

కావున   ఆక్షారంలో అనురూప కోణాలు ఉన్నాయి.

(ఘ) (ఙ) ఒక్కొక్కటి అంగ్ల అక్షరం   ను పోలిన వివిధ స్థితులు గలవు.

వీటిన్నింటిలో ఒక జత ఏకాంతర కోణాలను గుర్తించడమయ్యినది. కావున   ఆక్షారంలో ఏకాంతర కోణాలు కనిపించును.

(చ) (ఛ) లో ఆంగ్ల ఆక్షరంలను పోలిన వివిధ జతలు గలవు.

వీటిన్నింటిలో ఖండన రేఖకు ఒక ప్రక్కన గల ఒక జత అంతర కాగాలును గుర్తించడమయినది. కావున ఆక్షారంలో తిర్యక్రేఖకు ఒక ప్రక్కన గల అంతర కోణాలు కలవు.

ఒక జత సమాంతర రేఖలను గీసి ఒక తిర్యక్రేఖచే అరెండింటిని ఖండించినది. దీని వలన ఏర్పడిన కోణాలను కొలవండి.

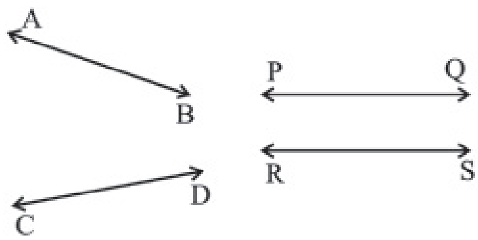
కింది విషయాలు వాస్తవమోకాదో పరిశీలించండి.

క) అనురూప కోణాలు సమానము.

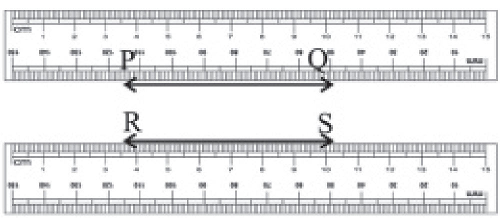
ఖ) ఏకాంతర కోణాలు సమానము.

గ) తిర్యక్రేఖకు ఒక వైపున గల అంతర కోణాలు సమానం.

3.5 సమాంతర రేఖలను గుర్తించుట



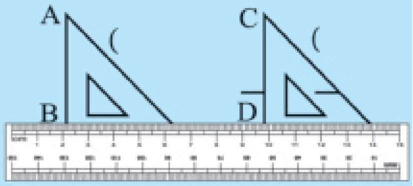
పటం 3.32 రెండు జతలు సరళరేఖలు ఉన్నాయి. (క) పటంలోని రెండు సరళరేఖలు $\overleftrightarrow{AB}$ ను $\overleftrightarrow{CD}$ చ్వూస్తు ఆ రెండు తూర్పు దిశలో ఖండించుకుంటాయాని తెలుస్తుంది. కావున ఈ రెండు అసమాంతర రేఖలు కాని బొమ్మ (ఖ) లో గల రెండు రేఖలు $\overleftrightarrow{PQ}$ లు $\overleftrightarrow{RS}$ ెండు ఏ దిశలో పరస్పరం ఖండించుకుంటాయో చేప్పలేం. దీన్ని తెలుసుకొనుటకై రెండు స్కేలులను తీసుకొని ఒక దాన్ని $\overleftrightarrow{PQ}$ తోను మరొకదానిని $\overleftrightarrow{RS}$ తోను కలపండి. (ప్రక్కన గల పటంను చూడండి) స్కేలులోని రెండు అంచులు పరస్పరం కలివలవు. అందుచేత రెండు రేఖలను ఎడమ లేక కూడి వైపకు ఎంత దూరం పోడిగించినా అవి పరస్పరం కలియవని తెలుస్తుంది. కాని కేవలం రేఖలను చూసినంత నూతన అవి ఎక్కడ కలుస్తాయో చేప్పలేం. అందుచేత రెండు సరళరేఖలు సమాంతర మగునో కాదో తెలుసుకొనుటకై ఒక పద్ధతి అవసరముగుచున్నది.



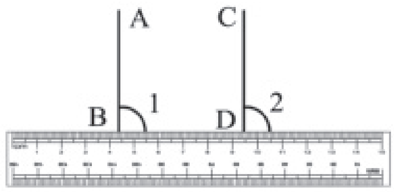
రెండు సరళరేఖలను ఒక తీర్యక్రేఖ ఖండించుట ద్వారా ఏర్పడు అనురూప ఏకాంతర లేక తిర్యక్రేఖకు ఒక ప్రక్క గల అంతర కోణాల జతవల్ల ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరమగునో కాదో తెలుసుకోగలుగుతామా ?

మీరు ప్రయత్నించండం

సెట్‌స్కొయర్ సహాయంతో రెండు సమాంతర రేఖలను ఎలా గీయగలేమో గుర్తి చేసుకొనుము. పటం 3.34 లో ఆ పద్దతి ఇవుబడఽనది.
మీ సెట్వ్స్కయర్‌ను ఒక్కస్కలు యొక్క అంచును తాకునట్లు ఉంచండం. దాని లంబకోణాన్ని తాకియున్న అంచును తాకుతూ ఒక రేఖను గీయండం. (పటం (క)
తిరిగి సెట్వ్స్కయరను (బొమ్మ ఖ) మరి కొద్ది దూరం జరపండం. పటం 3.34 మునుపటి వలే అంచును తాగుతూ మరొక గీతను గీయండం. రెండఽంటిని AB అ CD న్వారు పెట్టండం. ఇప్పుడు ఏర్పడఽన రేఖ ఖండలు సమాంతరాలు.



పటం 3.35 లో AB, CD రేఖా ఖండాలక్స్కలు అంచు ఒక తిర్యక్రేఖ అగును.



దీనీ ఫలితంగా $\angle 1, \angle 2,$ లు ఒక జత అనురుపకోణాలు $\angle 1, \angle 2,$ లు ఒక్కొక్కటి సెట్వ్స్కయర్ యొక్క లంబకోణానికి సమానాలు. అందుచేత పై నిర్మాణ పద్దతిలో మనం ఒక జత కోణాంను సమపరిమాణంలో నిర్మించగలిగాం. దీని వలన రెండు సమాంతర రేఖలను పోందగలిగాం.

దీని వలన మనం ఏమి తెలుసుకున్నాం?

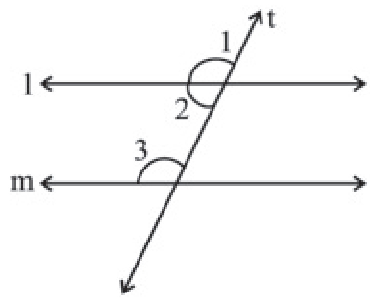
రెండు సరళరేఖలను ఒక తిర్యక్రేఖ ఖండఽంచినచో ఏర్పడే ఒక జత అనురూప కోణాలు సమానము అయినచో అప్పుడు ఆరెండు రేఖలు సమాంతర రేఖల అగును.

ప్రక్క పటంలో లు రెండు సరళరేఖలు

ఒక తిర్యక్రేఖ అనుకుందాం.

తిర్యక్రేఖకు ఎడమ ప్రక్కన గల అంతకోణాలు పరస్పరం సంపూరకాలు.

సరళజత అగుటవలన $\angle 1, \angle 2,$ పరస్పరం సంపూరకాలు



$\therefore\ m\angle 3 = m\angle 1$

కాని ఈ రెండు కోణాలు పరస్పరం సంపూరకాలు కావున

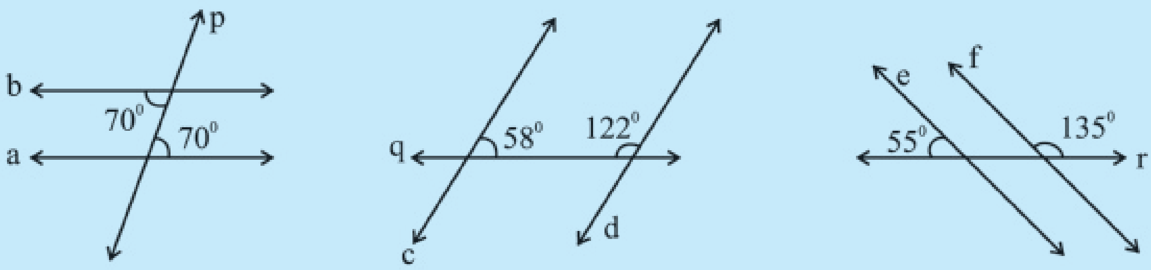
దీని ఫలితంగా -

ఖండన రేఖకు ఒక ప్రక్కన గల రెండు అంతరకోణాలు పరస్పరం సంపూరకాలు అయినచో రెండు పూరక కోణాలు వల్లప్పూడు సమానంగా నుండును.

కాని పూరక కోణాలు సమాన పరిపూరక గలవునచో అవి రెండు సమాంతరాలు దీని వలన మనం తెలుసుకొనది.

రెండు సరళరేఖలను ఒక తిర్యక్రేఖ ఖండించినచో తిర్యక్రేఖకు ఒక ప్రక్కన గల అంతకోణాలు రెండు పరస్పరం సంపూరకాలు అయినచో అప్పుడు ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరాలు.

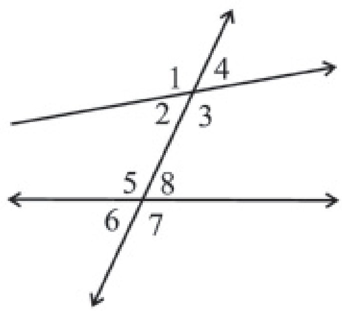
ప్రయత్నించండి.



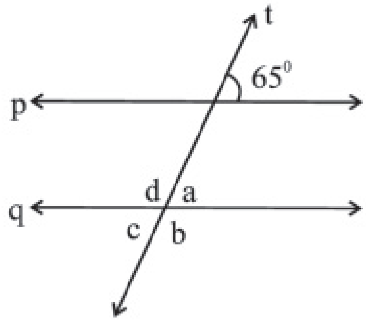
పైన గల (క) (ఖ) (గ) పటంలోలో గల జతల రేఖలలో ఏ రేఖలు సమాంతరాలు. ఏ రేఖలు అసమాంతరాలు. కారణం తెలియచెయండి.

అభ్యాసం 3.3

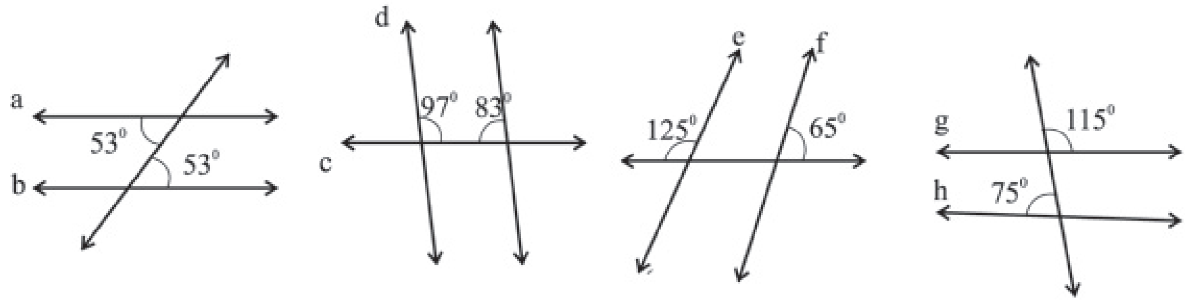
1. ప్రక్క పటం నుండి క్రింది ప్రశ్నలకు.
సమాధానం వ్రాయండి.
క) $\angle 1$ ఏ $\angle 5$ ఏరకపు జత కోణాలు
ఇంకను ఏ కోణాలు ఆ విధమైనవి వాట్విఎర్లను వ్రాయండి.
ఖ) $\angle 3$ ఏ $\angle 5$ రకపు జత కోణాలు.
ఇంకను ఏ కోణాలు ఆ విధమైనవి. వాట్విఎర్లను వ్రాయండి.
గ) $\angle 2$ ఏ $\angle 5$ విధమైన కోణాలు.
ఆ విధమైన ఇతర కోణాల్వఎర్లు వ్రాయండి.



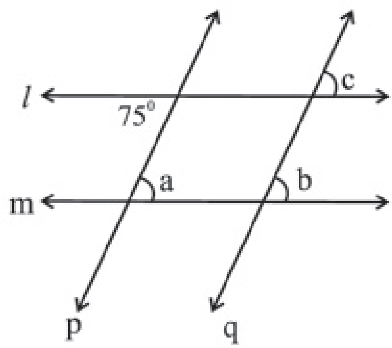
2. ప్రక్క పటంలో సరళరేఖలు 1 || 5 ఒఖ t ఇచ్చట ఏర్పడిన కోణాలలో ఒక దాని పరిమాణం 650 అని పటంలో ఇవడడినది. మిగిలిన నాలుగు కోణాలు a, b, c, d లలో
గుర్తించడమయినది. అయిన వాటి విలువలను కనుగొనుము.



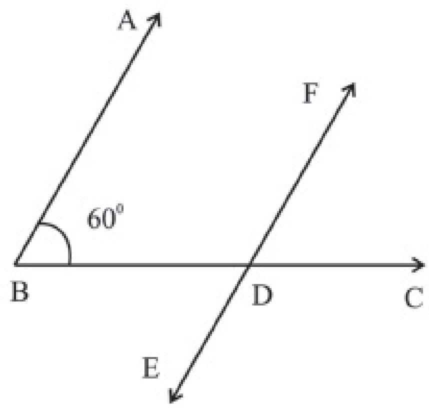
3. దిగువున గల నాలుగు జతల సరళరేఖలలో ఏ జతలు సమాంతారు ? ఏ జతలు అసమాంతరాలు కారణాంలో వివలించండి.



4. ప్రక్క పటంలోని సరళరేఖలు l || m సరళరేఖలు p || q పటంలోని ఒక కోణం పరిమాణం పటంలోని ఒక కోణం పరిమాణం 75° మిగిలిన కోణాలు a, b, c గుర్తులలో సూచించబడినది. అయిన a, b ఏ c విలువలు ఎంత ?



5. 5) ప్రక్క పటంలో 60° పరిమాణం గల ∠ABC ను నిర్మించి పై ఒక బిందువును గుర్తించి దానికి $\overrightarrow{BC}$ పేరు పెట్టండి. D బిందువు గూడా $\overleftrightarrow{DE}$ నిర్మించండి. $\overleftrightarrow{DE}$ □ $\overrightarrow{BA}$ కావలెను. ఈ నిర్మాణం కోసం ∠BDE కోణ పరిమాణం ఎంత. తీసుకొని $\overleftrightarrow{DE}$ ను నిర్మించవలెను? కారణంలో వ్రాయండి.



4వ అధ్యాయం

ఘాతాలు - ఘాత రాశులు

4.1 మనం నేర్చుకొనియున్నాం -

ఘతాంకాలు (ఘత రాశు) లను గుర్చి 6వ తరగతిలో కొంత వరకు తెలుసుకున్నాం. ఏదైనా ఒక సంఖ్య, రాశిని అధారం, ఘతం ద్వారా తెలియచేయుటను. ఘతరాశి ంటారు.

సంఖ్య : 32
ఘతరూపం : 2^5
2^5 ఒక ఘతాంకం

ఉదా - $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

ఇచ్చట 32 ను 25 గా తెలియచేయుడమైనది. ఇచ్చట ఆధికం 2, ఘతం 5 అందుచేత 32 ను 2 యొక్క ఐదవ ఘతం అంటారు.

సమాదానాలు వ్రాయండం.

- 16, 2 యొక్క ఏ ఘతముగును.
- 3 ఆధరంగా గల నాల్గవ ఘతం ఎంత ?
- 125 ఏ ఆధారం యొక్క మూడవ ఘతం అగును.
- 216 ను ఏ చిన్న అధారం యొక్క ఘతరాశి తెలియచేయుగలగు.

4.2 ఘతాంకం (ఘతరాశి)

భూమి యొక్క ద్రవ్యలో ఎంతో మీరు చెపుగలరా ?

ఇది సుమారు 5,970,000,000,000,000,000,000,000, కి.గ్రా దీనిని చదివేందుకు ప్రయత్నించండం. అదే విధంగా యురేనియం బరువు 86, 800, 000,000,000,000,000,000,000 కి. గ్రా. యురేనియం భూమి రెండంటిలో దేని బరువు అధికమో చెప్పండం.

ఇటువంటి ఎన్నో పెద్ద పెద్ద సంఖ్యలు గలవు. వాటిని మనం చదువలేము. అర్థం చేసుకోడం ఈ సంఖ్యలను చదవడం, రాయడం, సరిపోల్చడం కొరకు మనం ఘత రాశులను వాడుతాం. పెద్ద సంఖ్యలను మనం అధారం, ఘతం ద్వారా తెలియచేస్తాం.

ఉదాహరణకు - $= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$

ఇచ్చట ఆధారం 10, ఘతం 5

100000 యొక్క ఘత రూపం 10^5 అవుతుంది.

అదే విధంగా 1000 ఘతంలో 0 10^3

ఎందుకనగా

ఒక సంఖ్యను దాని గుణిజల లబ్ధంగా చూపబడదనచో అది ఒక ఘతాంకరూపం అగును.

ఒక సంఖ్య యొక్క విస్తరణ రూపం మనము తెలియును.

ఉదా - $23574 = 2\times 10000+3\times 1000+5\times 100+7\times 10+4\times 1$

ఇప్పుడు దీనిని విస్తలికరించి క్రింది విధంగా వ్రాయువచ్చును.

$23574 = 2\times 10^4+3\times 10^3+5\times 10^2+7\times 10^1+4\times 1$

ఇచ్చట 10,000, 1000, 100, 10 లను వరుసగా 10^4, 10^3, 10^2, 10 గా ఘతాంక రూపాలలోని మార్చబడదనవి. దీనిని 10 ఆధారంగా గల ఘతరాశి అందురు.

> కొన్ని సంఖ్యలను కేవలం 10 అధారంగా గల ఘతరాశులుగా మార్చ వచ్చును. అదే విధంగా కొన్ని సంఖ్యలను ఇతర అధారిత ఘతరాశులుగా (అవి $1000 = 10^3$) మర్చవచ్చును.

ఉదా -

$81 = 3\times 3\times 3\times 3 = 3^4$

$64 = 4\times 4\times 4 = 4^3$, $\quad 64 = 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2 = 2^6$

ప్రయత్నించండి -

కింది పట్టికలోని ఖళీలను పూరించండి.

సంఖ్య	ఘతరూపం	అధారం	ఘతం
125		5	
128			7
243			3
256		4	
216			3

ఇచ్చట అధారం, ఘతం రెండింటిని గణమ సంఖ్యలుగా తీసుకోవలెను. ఇప్పుడు ఋణాపూర్ణ సంఖ్యను ఆధారంగా, గణన సంఖ్యను ఘతంగా తీసుకొని కొన్ని సంఖ్యల ఘతాంక రూపాలు తెలుసుకుందాం.

> మీకు తెలుసా ?
> 25 ను 25^1 గాను 25^1 ను 25 యొక్క ఘతాంకాగా వ్రాయకుడదు.

$-8 = (-2)\times 4(-2\ )\times(-2)\times(-2) = (-2)^3$,

$81 = (-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3) = (-3)^4$,

$25 = (-5)\times(-5) = (-5)^2$

చెప్పి చూడండి

81 ను $(-3)^4$, $(+3)^4$ గా తెలియచేసినట్లే -8 ను $(-2)^3$, $(+2)^3$ ఆధారం గల ఘతరాశిలో చూపించగలమా! కారణం రాయండి.

ఉదా 1 -

2^3, 3^2 ఘతరాశులలో ఏది పెద్దది ?

సమాధానం

$2^3=2x2x2=8$

$3^2=3x3=9$

ఇచ్చట 8 కంటె 9 పెద్దది కాబట్టి 2^3 కంటె 3^2 పెద్దది.

ఉదా-2

కింది వాటిని ఘాతాంక రూపాలుగా మార్చండి. దీనియందు అధారాలు ఒక మౌళిక సంఖ్య అగును.

(క) 10,000 (ఖ) 625 (గ) 729

సమాధానం -

(క) $10000=10\times10\times10\times10=10^4$

(ఖ) $625=5\times5\times5\times5=5^4$

(గ) $729=3\times3\times3\times3\times3\times3=3^6$

$$\begin{array}{r|r} 5 & 625 \\ \hline 5 & 125 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 3 & 729 \\ \hline 3 & 243 \\ \hline 3 & 81 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

ఉదా-3

క్రింది వాటిని ఋణాత్మక ఆధార ఘత రూపాలుగా మార్చండి.

(క) -27 (ఖ) -32

సమాధానం

(క) $-27=(-3)\times(-3)\times(-3)=(-3)^3$

(ఖ) $-32=(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)=(-2)^5$

ఉదా - 4

క్రింది ఘతరాశులను విస్తరించి రాయండి.

(క) (ఖ) (గ)

సమాధానం-

(క) $a^4=a\times a\times a\times a$

(ఖ) $b^5=b\times b\times b\times b\times b$

(గ) $(ab)^3=ab\times ab\times ab$

$=a\times b\times a\times b\times a\times b=a\times a\times a\times b\times b\times b$

ఉదా-5

కింది ఘతరాశుల విలువలను కనుగొనండి.

$(1)^5,\ (-1)^3,\ (-1)^6,\ (-10)^3,\ (-2)^3$

సమాధానం -

$$\begin{aligned}
(1)^5 &= 1\times1\times1\times1\times1=1\\
(-1)^3 &= (-1)\times(-1)\times(-1)\\
&= 1\times(-1)=-1\\
(-1)^6 &= (-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\\
&= 1\times1\times1=1\\
(-10)^3 &= (-10)\times(-10)\times(-10)\\
&= 100\times(-10)=-1000\\
(-2)^3 &= (-2)\times(-2)\times(-2)\\
&= (+4)\times(-2)=-8
\end{aligned}$$

చెప్పి చూడండి

$(1)^{10}$, $(1)^{8}$ ఆధారాలలో ఏది పెద్దది

$(-1)^{5}$, $(-1)^{11}$ లలో ఏది చిన్నది.

ఋణాత్మక ఆధరం గల ఘతరశులందు ఘతం సరి సంఖ్య అయినచో ఘతరాశి ధనోత్మక మగును. అదే విధంగా ఋణాత్మక ఆధారం గల ఘతరాశులందు ఘతం వేసిసంఖ్య అయినచో ఘతరాశి ఏ సంఖ్య అవుతుందో పరిక్షంచ వ్రాయండి.

ఉదా 6 -

క్రింది సంఖ్యలను మౌళిక సంఖ్యల ఘతరాశుల లబ్దంగా వ్రాయండి.

క) 500 (ఖ)392

సమాధానం -

(క) $500 = 2\times2\times5\times5\times5$
$= 2^2\times5^3$

(ఖ) $392 = 2\times2\times2\times7\times7$
$= 2^3\times7^2$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 500 \\ \hline 2 & 250 \\ \hline 5 & 125 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 392 \\ \hline 2 & 196 \\ \hline 2 & 98 \\ \hline 7 & 49 \\ \hline & 7 \end{array}$$

మీకు తెలుసా ? (-1) యొక్క ఘతం చేసి సంఖ్య అయినచో ఘతరాశి -1 అగును (-1) యొక్క ఘతం ఎంత అయినచో దాని ఘతరాశి నిలువ 1 అగును.

అభ్యాసం 4.1

1. క్రింది ఘతరాశుల విలువలను కనుగొనండి.

(క) 2^6 (ఖ) 9^3 (గ) 10^4 (ఘ) 5^4

2. క్రింది సంఖ్యలను ఘతాల రూపంలోని మార్చండి !

(క) 512 (ఖ) 343 (గ) 729 (ఘ) 625

3. ఘాతాంకాలుగా మార్చి వ్రాయండి.

క) $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$

ఖ) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

గ) $p \times p \times p$

ఘ) $a \times a \times a \times a \times a$

ఙ) $r \times r \times r \times r \times r \times r$

4. కింది ఘత రాశులలో ఏది పెద్దది ?

క) $4^3, 3^4$

ఖ) $5^3, 3^5$

గ) $2^8, 8^2$

ఘ) $2^{10}, 10^2$

చూసి చెప్పండి.
0^5 మరియు 0^{13} రెండింటిలో ఏది పెద్ద?

5. కింది సంఖ్యలను మౌళిక సంఖ్య యొక్క ఘతరాశుల లబ్దంగా వ్రాయండి.

క) 648 ఖ) 432 గ) 3600

6. సూక్ష్మీ కరించండి.

క) 2×10^3 ఖ) $7^2 \times 2^2$

గ) $2^3 \times 5^2$ ఘ) $3^2 \times 4^3$

ఙ) $3^2 \times 2^3 \times 5^2$ చ) $5^2 \times 3^2 \times 2^2$

7. సూక్ష్మీ కరించండి.

క) $(-4)^3$ ఖ) $(-2)^3 \times (-3)^2$

గ) $(-3)^2 \times 2^4$ ఘ) $(-2)^3 \times (-10)^3$

4.3 ఘతాంక న్యాయాలు.

ఉదా - 2^2x2^3 ను ఒకే ఘత రాశి లోనికి మార్చండి.

2^2x2^3

$=(2x2)x(2x2x2)$

$= 2x2x2x2x2 = 2^{2+3}$

5ను (2+3) గా విభజించి వ్రాయబడినది.

రెండు 2 లు, మూడు 2 ల లబ్దం ఐదుల లబ్ధం అవుతుంది 2^2, 2^3 లు సమాన అధారం గలవగుట వల్ల $2^2 \times 2^3=2^{2+3}$ అగును.

ఉదా-2

అదే విధంగా $(3)^4 \times (3)^3 = \{(3) \times (3) \times (3) \times (3)\} \times \{(3) \times (3) \times (3)\}$

$= (3) \times (3) \times (3) \times (3) \times (3) \times (3) \times (3) = (3)^7 = (3)^{4+3}$

కావున $(3)^4 \times (3)^3 = (3)^{4+3}$

ఉదా-3

$$a^2 \times a^6 = (a \times a) \times (a \times a \times a \times a \times a \times a)$$
$$= a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^8$$

కావున $a^2 \times a^6 = a^{2+6}$

మనకు వచ్చిన లబ్ధాన్ని కింది పట్టికలో రాద్దాం.

ఉదాహరణ	మొదటి ఘతరాశి	రెండవ ఘతరాశి	రెండు ఘతరాశుల లబ్ధం
1	2^2	2^3	2^5
2	3^4	3^3	3^7
3	a^2	a^6	a^8

పై పట్టిక నుండి మీరేం తెలుసుకున్నారు ?

పై ఉదాహరణ నుండి మనం కింది సిద్ధాంతం ను తెలుసుకున్నాం.

> $a^m \times a^n = a^{m+n}$
> ఇచ్చట ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య m, n ఒక్కొక్క గణమ సంఖ్యలు

1. స్వయంగా చేసి చూడండి.

   క) $3^2 \times 3^3 = 3^5$ ఖ) $4^2 \times 4^2 = 4^4$

2. కింది వానిని ఘతాంక రూపంలో మార్చి వ్రాయండి.

   క) $2^3 \times 2$ ఖ) గ) $p^3 \times p^4$ ఘ) $5^2 \times 5^3$

ఒకే అధారం గల మూడు ఘతరాశులల లబ్ధాన్ని కనుగొందాం.

$5^2 \times 5^3 \times 5^4 = (5^2 \times 5^3) \times 5^4$ (గుణకార సహచర న్యాయం)

$= 5^{2+3} \times 5^4$ (ఘతాంకాల గుణకార నియమం)

$= 5^{2+3+4}$ (ఘతాంకాల గుణకార నియమం)

$= 5^9$

> చూసి చెప్పండి.
> 2^3 మరియు 3^2 విలువను కనుగొన్నపుడు మీరు ఘాతాంకాలను కూడిక చేయగలరా కారణం చెప్పండి.

అదేవిధంగా $a^m \times a^n \times a^p = (a^m \times a^n) \times a^p$ (గుణకార సహచర న్యాయం)

$= a^{m+n} \times a^p$ (ఘతాంకాల గుణకార నియం)

$= a^{m+n+p}$ (ఘతాంకాల గుణకారనియము)

$$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$$

ఇక్కడ a ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య m,n & p లు ఒక్కొక్క గుణన సంఖ్యలు.

4.3.2. ఒకే ఆధారముగా గల పదాల భాగాహారం

ఒకే అధారం గల రెండు ఘతంగుల మధ్య భాగాహారా చేద్దాం.

విభాజ్యం ఘతాంకం, విభాజకం ఘతాంకం కంటె పెద్దదిగా ఉండవలెను.

ఉదా-1 $3^5 \div 3^3 = \dfrac{3^5}{3^3} = \dfrac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3} = 3^2$ సూక్ష్మీకరించుము.

$\therefore 3^5 \div 3^3 = 3^{5-3}$

ఉదా - 2 $5^4 \div 5^2 = \dfrac{5^4}{5^2} = \dfrac{5\times5\times5\times5}{5\times5} = 5^2 = 5^{4-2}$

$\therefore 5^4 \div 5^2 = 5^{4-2}$

ఉదా - 3 ఒక ధనపూర్ణ అయినచో $a^7 \div a^4$ విటిలో ఎంతో

$$\frac{a^7}{a^4} = \frac{a\times a\times a\times a\times a\times a\times a}{a\times a\times a\times a} = a^3 = a^{7-4}$$

అనగా $\dfrac{a^7}{a^4} = a^{7-4}$

పై మూడు ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం. $a^m \div a^n = a^{m-n}$

ఉదా-1 $3^5 \div 3^3 = 3^{5-3}$

ఉదా-2 $5^4 \div 5^2 = 5^{4-2}$

ఉదా-3 $a^7 \div a^4 = a^{7-4}$

పై మూడు ఉదాహరణలనుండి మీరేమి గమనించారు.

ప్రతీ ఉదాహరణలనుండి.

- విభాజ్యం, విభాజకం రెండింటి ఆధారాలు సమానం. భాగఫలంలోని అధారం కూడా విభాజ్యం లేక విభాజకం అధారంలో సమానం.
- భాగఫలంలో ఘతం కొరకు విభాజ్యం ఘతంనుండి విభాజకం ఘతం తీసివేయువలెను. సాధారణంగా దీనిని మనం క్రింది విధంగా చేపువచ్చును.

a ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్య m, n లు గణన సంఖ్యలు (ఇచ్చట m > n) అయినచో $a^m \div a^n = a^{m-n}$

క్రింది వానిని ఒకే ఆధారంగాల ఘతరాశులుగా మార్చండి

క) $2^9 \div 2^3$

ఖ) $10^5 \div 10^3$

గ) $9^{11} \div 9^7$

ఘ)ది. $20^{15} \div 20^7$

చెప్పి చూడండి.

45 ను 25 చే భాగించగలమా.

సూచన - మొదట 45 ని రెండు ఆధర ముగా గల ఘతపరిగా మార్చి వలెను.

4.3.3. ఘతాంకలు యొక్క ఖాతాన్ని గనుగొనుట.

(i) $\left(2^3\right)^2$ ను ఒకే ఘతాంకుంగా మార్చి వ్రాయండం.

$\left(2^3\right)^2 = 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3}$ (ఘాతాంకా యొక్క గుణకారనియుము)

కవున $\left(2^3\right)^2 = 2^{3\times2}$

(ii) అదేవిధంగా $\left(3^2\right)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

$= (3^2 \times 3^2) \times (3^2 \times 3^2)$ (గుణకారంలో సహజ న్యాయం)

$= 3^{2+2} \times 3^{2+2}$ (ఘతాకంలో గుణకార నియమం)

$= 3^{2+2+2+2}$ (ఘతాకంలో గుణకార నియమం)

$= 3^{2\times4}$

(iii) a ఒక ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్య అయినచో $(a^3)^4$ యొక్క విలువ ఎంత)

$\left(a^3\right)^4 = a^3 \times a^3 \times a^3 \times a^3 = (a^3 \times a^3) \times (a^3 \times a^3)$ (ఇది ఏ నియమం)

$= a^{3+3} \times a^{3+3}$ (ఇది ఏ నియమం)

$= a^{3+3+3+3}$ (ఇది ఏ నియమం)

$= a^{3\times4}$

పై ఉదాహరణను బట్టి సిద్ధాంతంను రాయవచ్చును.

> ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య m,n లు ధన పూర్ణసంఖ్యను అయినచో $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$
> ఘతాంకము యొక్క నియముము అందురు.

కింది ఘతాంకులలోని ఘతాలను ఒకే ఘతాంకములోకి మార్చుము.

(క) $\left(7^3\right)^6$ (ఖ) $\left(5^2\right)^3$ (గ) $\left(4^3\right)^5$

4.3.4. ఒకే ఘతాంకం గల రెండు ఘతాంకాలను గుణించుట.

(i) ఒకే ఘతాంకములోని మార్చి వ్రాయుము.

$2^3 \times 3^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= (2 \times 3)^3$

$\therefore 2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3$

(ii) $4^4 \times 3^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3)$

$= (4 \times 3)^4$

$\therefore 4^4 \times 3^4 = (4 \times 3)^4$

(iii) a,b లు రెండు ధనపూర్ణ సంఖ్యలు అయినచో

$$a^5 \times b^5 = a \times a \times a \times a \times a \times b \times b \times b \times b \times b$$
$$= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b)$$
$$= (a \times b)^5$$

$\therefore\ a^5 \times b^5 = (a \times b)^5$

పై ఉదాహరణలను బట్టి క్రింది సిద్ధంతమును పొందవచ్చును.

> a,b లు ఏపైన రెండు శూన్యేతరభలర్ష సంఖ్యలు మరియు
> m ఏదైనా ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్య అయిన $a^m + b^m = (ab)^m$

క్రింది రెండేసి ఘతాంకముల లబ్ధాన్ని ఒకే ఘతాంకములోకి మార్చి వ్రాయుము.

(క) $5^2 \times 3^2$ (ఖ) $3^3 \times a^3$ (గ) $a^4 \times b^4$

(a,b లు ధనపూర్ణసంఖ్యలు)

ఉదాహరణ - $5^2 \times 3^2$ మరియు $(5^2)^3$ లలో ఏది పెద్దది ?

సాధన :

మొదట పద్ధతి :

$3^2 \times 5^2 = (3 \times 5)^2$
$= (15)^2 = 225$

మరక $(5^2)^3 = 5^{2\times3}$
$= 5^6 = 15625$

రెండవ పద్ధతి :

$3^2 \times 5^2 = 9 \times 25$ లేక 25యొక్క 9 గుణకం.

$(5^2)^3 = (25)^3$
$= 25 \times 25 \times 25$
$= 25 \times (25 \times 25)$
$= 25 \times 625$ 25 యొక్క 625 గుణకం

$\therefore$ $3^2 \times 5^2$ కంటె $(5^2)^3$ పెద్దది.

ఉదాహరణ :

$\left[(2^2)^3 \times 3^6\right] \times 5^6$ ను ఘతాంకముగా వ్రాయుము.

సాధన : $\left[(2^2)^3 \times 3^6\right] \times 5^6 = \left[2^{2\times3} \times 3^6\right] \times 5^6$ (ఘతాంకము యొక్క ఘతనియము)

$= \left[2^6 \times 3^6\right] \times 5^6$ (ఒకే ఘతాలుగల ఘతాంకాల గుణకార నియము)

$= (2 \times 3)^6 \times 5^6$

$= 6^6 \times 5^6$

$= (6 \times 5)^6$ (ఒకే ఘతాలుగల ఘతాంకాల గుణాకార నియము)

$= 30^6$

అభ్యాసం 4.2

1. ఘతాంక న్యాయూలను ఉపైగిటంఇచి ఒకే ఘతాంకములోకి మార్చండం.

(క) $2^3 \times 2^4 \times 2^5$ (ఖ) $6^{15} \div 6^{12}$ (గ) $a^3 \times a^7$

(ఘ) 7×7^2 (ఙ) $5^2 \div 5^3$ (చ) $2^5 \times 3^5$

(ఛ) $a^4 \times b^5$ (జ) $(3^4)^3 \times (2^6)^2$ (ఝ) $(2^{10} \div 2^8) \times 2^3$

2. క్రింది వానిని సూక్షి కరించి ఒకే ఖతాంకములోకి మార్చండం.

(క) $\dfrac{2^3 \times 3^4 \times 4}{3 \times 3^3}$ (ఖ) $\dfrac{3 \times 7 \times 11^8}{21 \times 11^3}$

(గ) $\left[(5^2)^3 \times 5^4\right] \div 5^7$ (ఘ) $25^4 \div 5^3$

(ఙ) $\dfrac{3^7}{3^4 \times 3^3}$ (చ) $\dfrac{2^4 \times a^5}{4^2 \times a}$

(ఛ) $(2^3 \times 2)^2 \div 2^5$ (జ) $\left(\dfrac{a^5}{a^3}\right) \times a^8$

3. క్రింది సంఖ్యలను ధన సంఖ్యల అధారం గల ఒకటి కంట ఎక్కువ ఘతాంకముల లబ్ధంగా వ్రాయండం.

(క) 270 (ఖ) 768 (గ) 108×192 720(ఘ)64

4. సూక్షి కరించుము.

(క) $\{(4)^2\}^2$ (ఖ) $(6)^3 \div (6)$ (గ) $(2)^3 \times (3)^3 \div (6)^3$

(ఘ) $(5)^2 \times (5)^4 \div (5)^2$ (ఙ) $\dfrac{(2^5) \times 7^3}{8^3 \times 7}$ (చ) $\dfrac{3^2 \times 10^5 \times 25}{5^3 \times 6^4}$

4.4 సంఖ్యల యొక్క ప్రామాణిక రూపాలు.

వివిధ రంగాలలో మనం 65,000, 125,00,000, 35,00,000,00 మొదలైన పెద్ద పెద్ద సంఖ్యలను ఉపయోగించ బడుచున్నవి.

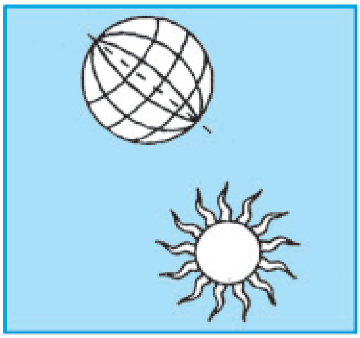
ఈ విధంగా కొన్ని విసయాలు పెద్ద సంఖ్య ద్వారా ప్రకటించడం జరుగుచున్నది.

-భూమి నుంచి సూర్యునికి గల దూరం సమారు 149,9,600,000,000 మీ.

కాంతి వేగం సెకనుకు సుమారు 300,000,000 మీటర్లు

భూమి యొక్క ద్రవ్యరాశి 5,976,000,000,000,000,000,000,000 కి. గ్రా

ఇటువంటి పెద్ద పెద్ద సంఖ్యలను చిన్న చిన్న సంఖ్య రూపాంలో వ్రాయుగలిగిను గుర్తించుకొనుట మరియు వినియోగించుట సులభముగా ఉంటుంది.



రండిం తెలుసుకుందాం అటువంటి పెద్ద పెద్ద సంఖ్యలను సుక్ష్మ రూపంలో రాయగలుగునో పరిశీలించండిం.

$$48 = 4.8 \times 10 = 4.8 \times 10^1$$
$$480 = 4.8 \times 100 = 4.8 \times 10^2$$
$$4800 = 4.8 \times 1000 = 4.8 \times 10^3$$
$$48000 = 4.8 \times 10000 = 4.8 \times 10^4$$

చూసి చెప్పండి : 48000000 కు ఈ విధంగా ఎలా రాయగలం?

ఇక్కడ సంఖ్యలు ఒక నిర్ధష్టరూపంలో వ్రాయడమయినది.
ప్రతీ సంఖ్యను రెండు సంఖ్యల లబ్ధంగా వ్రాయబడిందనది.
ఆ రెండింటిలో -

- మొదటి దశాంశ భిన్నం అందులో దశాంశ స్థానంనకు ముందు ఒకే ఒక అంకె కలదు కావున అది 1 కాని ంతకంటె పెద్దతి కాని కావచ్చు. కాని 10 కంటె తక్కువ.
- రెండవది 10 ఆధారంగా గల ఒక ఘతాంకము ఇందులోని ఘతం ఒక పూర్ణసంఖ్య.

ఉదా-

$$\underset{\text{సంఖ్య}}{480} = \underset{\text{దశాంశ భిన్నం}}{4.8} \times \underset{\text{10 ఆధారంగా గల ఘతాంకం}}{10^2}$$

మరో ఉదాహరణ చూద్దాం -

$$130,000,000 = 1.3 \times 100000000$$
$$= 1.3 \times 10^8$$

పై ఉదాహరణలనుండిం మూల సంఖ్యను రెండు సంఖ్యల లబ్ధం రూపంలో ప్రకటించబడిందనది. మొదటిది 1 లేక అంఞాతకంటె పెద్దది కాని 10 కంటె చిన్న దశాంశ భిన్నం మరొకటి 10 అధారం గల ఒక ఘతాంకం అందు ఘతం ఒక పూర్ణ సంఖ్య.

పై పద్ధతిలో తెలియచేసిన సంఖ్య రూపంను సంఖ్య యొక్క వ్రాలాళిక రూపం అని తెలియచేసె పద్ధతిని శాస్త్రీయ పద్దతి అని అందురు.

మనం ఒక సంఖ్య యొక్క ప్రామాణికిక రూపాన్ని ఏ విధంగా పొందగలమో చూద్దాం రండిం.
3768.2 ను వ్రామాణిక రూపంలో వ్రాయండిం.

$$= \frac{3768.2}{1000} \times 1000$$
$$= 3.7682 \times 1000$$
$$= 3.7682 \times 10^3$$

(మొదటి సంఖ్య 3.7682 గా మారాలి. కనుక 1000 చే భాగించవలసి సస్తుంది. సంఖ్య మారిపోకుందుటకై 1000 చే గుణించవలసి యున్నది).

ఇప్పుడు 1,00,000 ను ఏ విదంగా ప్రామణిక రూపంలో వ్రాయాలో చూద్దాం రండం.

$$1,00,000 = 1 \times 1,00,000$$
$$= 1.0 \times (10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10) \quad [\because 1 = 1.0]$$
$$= 1.0 \times 10^5$$

కావున ప్రామాణిక రూపోంలో మొదటి సంఖ్యను 1 లేక 10 మధ్య ఒక దశాంశభిన్నంగా తీసుకోవాలి.

కంటే అతి చిన్న దనాత్మక సంఖ్య (ఎలా అంటె 0.0000345) ను ఎలా ప్రామాణిక రూపంలో తెలియచేయాలో తరువాత తరగతులలో నేర్చుకుంటము.)

ఉదా-

క్రింది సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయండం.

(క) 65,950 (ఖ) 5985.3

(గ) 34,30,000 (ఘ) 783.14

సాధనా -

(క) $65,950 = 6.595 \times 10000 = 6.5950 \times 10^4$

(ఖ) $34,30,000 = 3.43 \times 1000000$
$= 3.43 \times 10^6$

(గ) $5985.3 = 5.9853 \times 1000 = 5.9853 \times 10^3$

(దశాంశ స్థానం ఎడమ ప్రక్కకు మూడు స్థానాలు జరిగింది)

(ఘ) $783.14 = 7.8314 \times 100$
$= 7.8314 \times 10^2$

అభ్యాసం 4.3

1 (క) కాంతి వేగం సెకనుకు 300,000,000 మీ. ను వ్రాయణిక రూపంలో వ్రాయండం.

(ఖ) భూమి నుండం చంద్రునికి గల దూరం 384,000000 మీ. ను ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయండం.

2. కొన్ని సంఖ్యల వ్రామాణిక రూపాలను ఇవ్వబడదనవి. ఆ సంఖ్యలను వ్రాయాండం.

(క) 9.8×10^4 (ఖ) 1.385×10^7

(గ) 5.15×10^{10} (ఘ) 3.9×10^{11}

3. క్రింది వాక్యాలలో గల సంఖ్యలను ప్రామాశ్రీటక రూపంలో వ్యక్య పరిచండం.

క) భూమి వ్యాసం సుమారు 1,27,56,000.00

ఖ) సూర్యుని వ్యాసం సుమారు 1,400,000,000.00

గ) శని హ్రం నుండం సూర్యుని దూరం 1,433,500,000,000.00

ఘ) భూమిపై సుమారు 1,353,000,000 ఘ.కి.మీ. సముద్రపు నీరుకలదు.

5వ అధ్యాయం

అకరణీయ సంఖ్యలు

5.1 పరిచయం :

సహజ సంఖ్యలు (1, 2, 3......................) వాటికి సంబంధించిన నాలుగు మౌళిక ప్రక్రియలకు సంబంధించిన విషయాలను గూర్చి మనం ఇది వలకె తెలుసుకున్నాం. ఆ తరువాత 0 తో అన్ని రకాల గుణన సంఖ్యల పూర్ణాంకాలు (0, 1, 2, 3..................) వాటికి సంబంధించిన నాలుగు రకాల మౌళిక గణిత ప్రక్రియలకు సంబంధించిన విగయాలను కూడా మనం తెలుసుకున్నాం పూర్ణాంకాలతో ఋణాత్మక పూర్ణ సంఖ్యలకు గల సంబంధాన్ని తెలుసుకున్నాం. ఆ సంఖ్యలకు సంబంధించిన నాలుగు మౌళిక గణిత ప్రక్రియలు, వాటి ధర్మాలను గూర్చి కూడా తెలుసుకున్నాం. బిన్నాలకు సంబంధించి కూడా తెలుసుకున్నాం. ఇంటువంటి భిన్నాల లవం, మారో ఎల్లప్పుడు ధనపూర్ణసంఖ్యలు ఉ ండవలెను. ఈ అధ్యాయంలో సంఖ్యాపద్ధతికి సంబంధించి మరింత అధికంగా మనం తెలుసుకోగలుగుతాం.

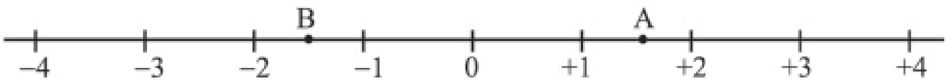
5.2 అకరణీయ సంఖ్య ఆవశ్యకత :

మీకు లెక్కలలో 100 కు 46 మార్కులు వచ్చాయి. అనుకుందాం. దానిని 45 ,100 గా $\frac{45}{100}$ వ్రాయవచ్చు. $\frac{45}{100}$ ఒక భిన్ననునీ మీకు తెలుసుకు. అదే విధంగా 100 రూపాయలు కూరగాయలు కొని అన్నగా 38 రూపాయల నష్టం వచ్చిందన్ని విషయాన్ని 100 పూరాయలకు నష్టం 38 రూపాయలు అంటూరు. ఈ విషయంలో నష్టం 38 రూపాయలు లేక లాభం -38 రూపాయలు అని అంటాం. 100 పూరాయలలో -38 రూపాయలు రాభాన్ని మనం $\frac{38}{100}$ లోని రాస్తాం.

మీ వద్ద ఉన్న మిఠాయిలలో 8 భాగాలు చేసి అందులో 3 భాగాలు పరిక ఇచ్చారనుకుందాం. అప్పుడు హరికి ఇచ్చిన మిఠాయిని $\frac{3}{8}$ గా వ్రావచ్చును. 100 రూ. కు కొని లాభం లేకుండా అమ్మెవచో 100 రూ. కు లాభం లేక నష్టం 0 తెలియచేయుటకై $\frac{0}{100}$ రాయావలెను.

గమనించుము : $\frac{45}{100}, \frac{38}{100}, \frac{3}{8}$ అనునవి ఏ భిన్నభిన్నాలు

సంఖ్యరేఖపై కొన్ని సంఖ్యలను చూద్దాం రండది.



సంఖ్య రేఖలో +1, +2 లో సరిగ్గా మధ్య బిందువు A గా సూచించడమయినది. A గా సూచిఇచబడిన సంఖ్య $1\frac{1}{2}$ లే $\frac{3}{2}$ అవుతుంది. ఇప్పుడు చెప్పండి. 0 నూండి ఎడమప్రక్కమ -1,- 2 ల మధ్య బిందువు. ఏ సంఖ్యకు లభిస్తుంది అది $-1\frac{1}{2}$ ను సూచిస్తుందని మీరు చెప్పగలరా ?

$-1\frac{1}{2}$ లేక $\frac{-3}{2}$ వంటి సంఖ్యలలో మనం ఇదివరకు పరిచయం లేదు. కబట్టి సంఖ్యలను భిన్నాలని చెప్పలేం.

ఇది ఒక అకరణీయసంఖ్య

$\frac{45}{100}, \frac{3}{7}, \frac{0}{100}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}$ వంటి సంఖ్యలు ఒక్కొక్క అకరణీయసంఖ్యలు. క్రింది ఉదాహరణలను చూడండి.

2 అనునది ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య తీని సంకలన విలోమం -2 అయినచో 2

కు ఎంత కలిపిన ఆ మొత్తం 0 అగును?

ఉదా - 5 నకు -5 కలిపిన ఆ మొత్తం 0 అగును.

కావున

+5 నకు ఎంత కవిపితే మొత్తం 0 అవుతుందో చెప్పండి.

+5 నకు -5ఎంత కలివిన మొత్తం 0 అగును?

మీకు తెలుసా ?

ఒక సంఖ్యకు దాని సంకల విలోమాన్ని కూడదనచో ఆమొత్తం 0 అగును.

ఏదైనా ఒక భిన్నానికి దాని సంకలన విలోయంనుకలినచో ఆ మొత్తం 0 అగునని మీరు చెప్పగలరు. అనగా ప్రతీ భిన్నానికి ఒక సంకలన విలోయం కలదని తెలుస్తుంది.

పూర్ణాంకాంలో అన్ని ఋణాపూర్ణసంఖ్యలు, భిన్నాలు, వాటి సంకలన విలోములు కలవు క వలన అకరణీయ సంఖ్యలు ఏర్పడుతున్నాయి.

ఒక సంఖ్యను మనం $\frac{p}{q}$ గా వ్యక్తం చేసినచో అది ఒక అకరణయసంఖ్య అగును. ఇచ్చట p, q రెండు పూర్ణసంఖ్యల q యొక్క విలువ 0 కారాదు.

$\frac{p}{q}$ రూపంలో గల అకరణియ సంఖ్యలలో p ను లవం అని q ను హారం అంటారు.

సమాధానాలును వ్రాయండి.

(క) లవాలు ధనపూర్ణసంఖ్యలుగా గల 3 అకరణీయ సంఖ్యలను ప్రాయుము.

(ఖ) లవాలు ఋణపూర్ణ సంఖ్యలుగా గల 3 అకరణీయ సంఖ్యలు.

(గ) లవాలు 0 గా గల 3 అకరణీయసంఖ్యలు.

(ఘ) హారం ధనపూర్ణసంఖ్యగా గల 3 అకరణీయాసంఖ్యలు

5.2.1. ధన్నాత్మక, ఋణాత్మక అకరణీయ సంఖ్యలు.

$\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{9}{13}, \frac{3}{8}$ వంటి అకరణీయ సంఖ్యలలో లవం, హారం రెండు ధనపూర్ణ సంఖ్యలు.

ఇటువంటి సంఖ్యలను ధన అకరణీయ సంఖ్యలు అంటారు.

ఏదైన ఒక అకరణీయ సంఖ్యలో లవం గాని, హరం గాని ఏదో ఒకటి ఋణాత్మక మైనచో దాని రుణాత్మక అకరణీయా సంఖ్య అని అంటారు.

ఉదా - $\frac{-1}{3}, \frac{-4}{5}, \frac{3}{-7}, \frac{5}{-8}$ మొదలగునవి

$\frac{-3}{-5}$ ఒక అకరగయాసంఖ్య

దీని లవం, హరం రెండును రూణపూర్ణ సంఖ్యలు.

గమనించుము. $\frac{-3}{-5} = \frac{(-3)\times(-1)}{(-5)\times(-1)} = \frac{3}{5}$

అనగా $\frac{-3}{-5}$ అనునది ఒక ధన అకరణీయ సంఖ్య.

మీకు తెలుసా ?
$\frac{0}{-3}$ ఒక అకరణీయసంఖ్య. దీని విలువ 0 అగును.

అనగా ఏదైనా ఒక అకరణీయా సంఖ్యలోని లవం, హరం రెండూ రకల పూర్ణసంఖ్యలైనచో అది ఒక ధన అకరణీయసంఖ్య అగును. 0 అనునది ఒక ధన అకరణీయసంఖ్య. ఇది ధనము, ఋణం కాని సంఖ్య అగును. $\frac{0}{7} = \frac{0}{-3} = \frac{0}{18} = 0$

2,3,5 అనునది ఒక్కొక్క పూర్ణసంఖ్య. వాటి $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{1}$ వ్రాయగలావడఁని క్రింది విధముగా వ్రాయగలం.

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-4 = \frac{-4}{1} = \frac{4}{-1} = \frac{-8}{2} = \frac{8}{-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

చెప్పి చూడండి.
5ను ఈ విధంగా ఎలా రాయగలరో వ్రాయుము.

ఇచ్చట ప్రతీ పూర్ణసంఖ్యను $\frac{p}{q}$ గా వ్రాయువచ్చు. ఇందులో p,q లు ఒక్కొక్క పూర్ణసంఖ్య అగును $q \neq 0$

దీనిని బట్టి ప్రతీ పూర్ణసంఖ్య ఒక అకరణీయసంఖ్య

మీకు తెలుసా ?
$q \neq 0$ ను $q,0$ తో సమానంకాదు అని చదవాలి.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{7}$ లు విభిన్న భిన్నాలు ఈ భిన్నాలు ఒకొక్కక్క అకరణీయ సంఖ్య ఎందుకు అగును ?

$3, \frac{-2}{3}, \frac{0}{2}, \frac{-5}{7}, \frac{3}{-8}$ లు అకరణీయసంఖ్యలు కాని భిన్నాలు కావు.

అన ప్రతీ భిన్నం ఒక అకరణీయసంఖ్య కాని ప్రతీ అకరణీయసంఖ్య ఒక భిన్నకాదు.

సమాధానం ప్రాయండిఁ.

10 అకరణీయ సంఖ్యలను వ్రాయుము.

అందు 5 భిన్నాలు, అకరణీయ సంఖ్యలు రెండు ఉండవలెను. మిగిలిన 5 కేవలం అకరణీయసంఖ్యలు మాత్రమే ఉండవలెను. భిన్నాలు కారాదు.

5.3 అకరణీయ సంఖ్యల ప్రామాణిక రూపం -

క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలను పరిశీలించండి.

$$\frac{3}{5}, \frac{-5}{8}, \frac{4}{7}, \frac{-9}{11}, \frac{-3}{13}$$

పైన గల ప్రతీ అకరణీయ సంఖ్యల లవం, హరం, ల యొక్క సామాన& కారణాంకాలను కనుగొని పరిశీంచించండి.

ఇచ్చట ప్రతీ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క లవం, హరంల సామాన్య కారణంకల 1, ప్రతీ హరం ధనపూర్ణసంఖ్య, కేవలం లవం నందు ధన, ఋణ పూర్ణ సంఖ్యలు కలవు. ఈ అకరణీయ సంఖ్యలు. అకరణీయ సంఖ్యల ప్రామాణిక రూపంలో కలవు.

కింది వానిలో ఏ వి ప్రామాణిక పూరంలో కలవు !

$$\frac{5}{12}, \frac{-5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{-45}{30}, \frac{12}{-19}, \frac{36}{-24}, \frac{28}{35}$$

5.3.1 ప్రామాణిక పూపంలో లేని అకరణీయ సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలోకి మార్చాండి.

ఉదాహరణం $\frac{-45}{60}$ ను ప్రామాణిక పూరంలోకి మార్చండి.

మొదటి పద్ధతి

$$\frac{-45}{60} = \frac{-45 \div 3}{60 \div 3} = \frac{-15}{20} = \frac{-15 \div 5}{20 \div 5} = \frac{-3}{4}$$

రెండవ పద్ధతి

$$\frac{-45}{60} = \frac{-45 \div 15}{60 \div 15} = \frac{-3}{4}$$

ఇప్పుడుచెప్పండి -

- రెండు పద్ధతులలో ఒకే విధమైన జవాబు వచ్చిందా !
- రెండు పద్ధతులలో జవాబు కనుగొనుటకై ఏ ఏ భేదాలు కలవు!

ఉదాహరణ - క్రింది అకరణీయ సంఖ్యల ప్రామాణిక రూపాలను వ్రాయండి.

(క) $\frac{48}{-36}$ (ఖ) $\frac{-21}{-35}$

సాధన -

(క) 48, 36 లగ.సా.భా 12

$\frac{48}{-36}$ యొక్క ప్రామాణిక రూపం తెలుసుకొనుటకై లవం, హరం లు రెండింటిని. (-12) చే భాగించాలి

$$\therefore \frac{48}{-36} = \frac{48 \div (-12)}{-36 \div (-12)} = \frac{-4}{3}$$

35 ల గ.సా.భా 7

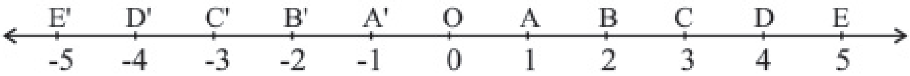
$\frac{-21}{-35}$ ను ప్రామాణిక రూపంలోకి మార్చుటకై లవ, హారాలు రెండంటిని (-7) చే భాగింప వలెను.

$$\frac{-21}{-35}=\frac{-21\div(-7)}{-35\div(-7)}=\frac{3}{5}$$

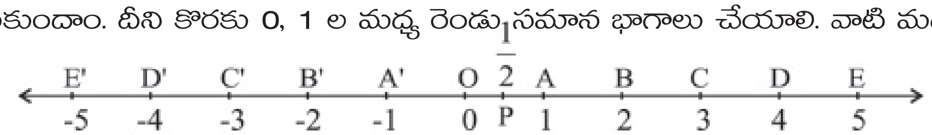
> **మీకు తెలుసా ?**
> ఒక అకరణీయ సంఖ్య యొక్క ప్రామాణిక రూపం కొరకు లవం, హారం లు రెండంటిని గ.సా.భా చే భాగించవలెను. హారంగాని, ఋణాత్మకమైనవో లవం, హారం లు రెండంటి ఋణ సంఖ్యచే భాగించవలెను.

5.3.2. అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యా రేఖపై చూపించుట -

సంఖ్యారేఖపై పూర్ణ సంఖ్యలను చుపించుట గుర్చి మనం ఇది వరకే తెలుసుకున్నాం. ఇప్పుడు అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై ఎలా గుర్తించవలెనో తెలుసుకుందాం. సంఖ్యారేఖ 0 కు కుడివైపున ధనాత్మక సంఖ్యలు, ఎడమ వైపు ఋణాత్మక సంఖ్యలు సూచించబడును.

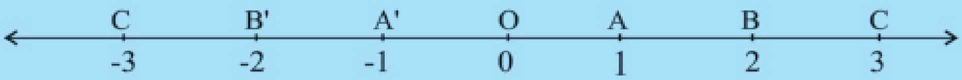


అకరణీయ సంఖ్యలను ఏ విధంగా సంఖ్యా రేఖలో సూచించవచ్చునో చూద్దాం. $\frac{1}{2}$ ను సంఖ్యా రేఖలో చూపించాలనుకుందాం. దీని కొరకు 0, 1 ల మధ్య రెండు సమాన భాగాలు చేయాలి. వాటి మధ్య బిందువును $\frac{1}{2}$ గా గుర్తించాలి.



అందుచే $OP = PA = \frac{1}{2}$

ఇప్పుడు $\frac{-1}{2}$ ను సంఖ్యారేఖలో చిశీనట్లు $\frac{1}{2}$ లో $\frac{-1}{2}$ ను కూడినచో మొత్తం 0 అగును. అనగా సంఖ్యారేఖలో 0 నుండి మధ్య దూరం కుడి ప్రక ఎంత ఉంటుందో 0 నుండి మధ్య దూరం ఎడమ వైపుకు అంతే ఉంటుంది.

> క్రింది సంఖ్యా రేఖ $\frac{-1}{2}$ ను సూచించుము.
>
> 
>

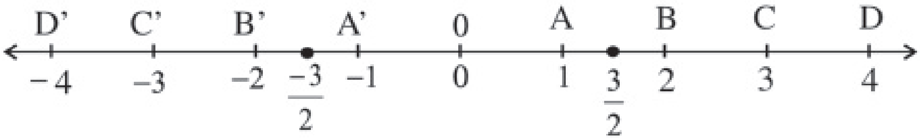
0 నుండి A వరకు దూరం 1 యూనిట్ 0 నుండి ఎడమవైపుకు గల A ను సూచించె సంఖ్య -1 అగును.

0 ,A ల మధ్య బిందువు $\frac{-1}{2}$ అగును.

$\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}$ లను సంఖ్యారేఖలో సూచిద్దాం.

మొదటి $\frac{3}{2}$ ను మిశ్రమ భిన్నంలోకి మార్చండి. $\frac{3}{2}$ యొక్క మిశ్రమ భిన్న $1\frac{1}{2}$ అవుతుంది.

ఇది ( ) 1 మరియు 2 ల మధ్యన ఉంటుంది. అదే విధంగా -1, -2 ల మధ్య ఉన్న కారణం కు కుడిం వైపున ఎంత దూరంలో ఉంటుందో ఎడమ వైపున 0 అంతే దూరంలో ఉంటుంది.



ఉదాహరణ :

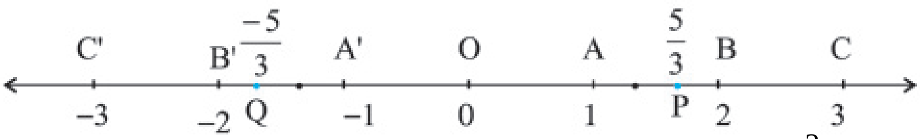
$\frac{5}{3}$, $\frac{-5}{3}$ లను సంఖ్యా రేఖలో చూడండం.

సాధన :

1వ సోపానం : $\frac{5}{3}$ ఒక అపక్రమ భిన్నం $\frac{5}{3}$ ను మిశ్రమ భిన్నంలోనికి మార్చినచో $1\frac{2}{3}$ అగును.

2వ సోపానం : $1\frac{2}{3}$ అనగా 1,1 యొక్క మూడు వంతులలో 2 వంతులు అందుచేత ఇది 1 మరియు 2 ల మధ్య ఉంటుంది.

3వ సోపానం : $\frac{5}{3}$ లేక $1\frac{2}{3}$ ను సంఖ్యా రేఖలో చూపుటకు 1 మరియు 2 ల మధ్య దూరాన్ని మూడు సమాన భాగాలు చేయవలెను. అందులో 2 భాగాలు తీసుకొనవలెను.



4వ సోపానం : A, B ల మధ్య దూరాన్ని మూడు సమాన భాగాలు చేయువలెను. $-1\frac{2}{3}$ ను p బిందువు దూరం సూచించవలెను.

5వ సోపానం : 0 నుండం p ను ఎంత దూరముంటుందో 0 నుండం ఎడమ భాగంలో అంతే తూరంలో గల బిందువు $-1\frac{2}{3}$ లేక $\frac{-5}{3}$ అవుతుంది. దానిని q బిందువు ద్వారా సూచించడమయినది.

సంఖ్యారేఖను గీసి అందులో $\frac{7}{3}$ $\frac{-7}{3}$ లను సూచించండం.

అభ్యాసం 5.1

1. కింది అకరణీయ సంఖ్యలో ధనాత్మక, ఋణాత్మక అకరణీయ సంఖ్యలను ఎన్నుకొని ప్రారాయండి.

$\frac{5}{5}, \quad \frac{2}{9}, \quad \frac{3}{-5}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{-3}{-17}, \quad \frac{-25}{-6}, \quad \frac{-13}{9}, \quad \frac{-15}{28}, \quad \frac{5}{-6}$

2. క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలను వాటి ప్రామాణిక రూపాలలోనికి మార్చి వ్రాయండి.

(క) $\frac{-22}{55}$ (ఖ) $\frac{16}{-24}$ (గ) $\frac{77}{132}$ (ఘ) $\frac{64}{24}$ (ఙ) $\frac{-27}{-15}$

3. $\frac{-55}{-27}$ ను ప్రామాణిక రూపంలోనికి మార్చుటకై అవసరనుగు సోపానాలను వ్రాయండి.

4. క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలను వేరు వేరు సంఖ్యా రేఖలలో చూపించండి ?

(క) $\frac{2}{3}$ (ఖ) $\frac{-4}{5}$ (గ) $\frac{-8}{3}$ (ఘ) $\frac{5}{2}$

5.4. అకరణీయ సంఖ్యలలో నాలుగు మౌళిక గణిత ప్రక్రియాలు -

భిన్నాల కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారం, భాగహారం గూర్చి ఇదివరకే తెలుసుకున్నాం. ఇప్పుడు అకరణీయ సంఖ్యల కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారం, భాగహారం, గూర్చి తెలుసుకుందాం.

5.4.1 అకరణీయ సంఖ్యల కూడికలు -

- సమాన హారం గల రెండు అకరణీయ సంఖ్యల కూడిక చేద్దాం రండి.

$\frac{2}{3}$ $\frac{-4}{3}$ లకు కూడిక చేయుటకై రశ్మి సంఖ్యారేఖను గీసి పూర్ణసంఖ్యలను గుర్తించింది.

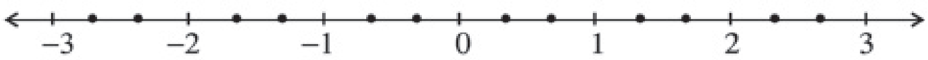
> **మీకు తెలుసా ?**
> 1ను $\frac{3}{3}$ గాను. 2ను $\frac{6}{3}$ గాను 3ను $\frac{9}{3}$ గా వ్రాయివచ్చును.

- మొదట కూడిక చేయవలసిన సంఖ్యలు రెండింటిని మిశ్రమ భిన్నాలుగా మార్చింది.

$\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$ $\frac{-4}{3}=-1\frac{1}{3}$ దీనిట వలన $\frac{9}{3}$

- ఇప్పుడు సంఖ్యారేఖపై -2 నుండి -1, -1 నుండి 0, 0 నుండి 1,1 నుండి 2, 2 నుండి 3 మధ్యగల భాగాలను సమానంగా మూడేసి భాగాలు చేసింది.

$$-2\frac{2}{3}+\left(-1\frac{1}{3}\right)=\left(-1\frac{1}{3}\right)+2\frac{2}{3}$$



ఇప్పుడు చెప్పండి.

- -2 -1 ల మధ్య ఎన్ని చిన్న భాగాలు కలవు ! ప్రతీ చిన్న భాగం పోడవు ఏ సంఖ్యను సూచిస్తుంది?
- $-1\frac{1}{3}$ గది సున్నకు ఏ ప్రక్కన కలదు ?
- $-1\frac{1}{3}$ సంఖ్య ఏ రెండు పూర్ణ సంఖ్యల మధ్య కలదు !
- $-1\frac{1}{3}$ $2\frac{2}{3}$ తో కలుపటు సంఖ్యారేఖపై కుడి ప్రక్కకు లేక ఎడమ ప్రక్కకు పదిశగా వెళ్ళాలి ?
- $-1\frac{1}{3}$ $2\frac{2}{3}$ నుండి గది తూర్పుగా వచ్చినచో ఎచ్చటకు చేరుతాం ?
- రెండు సంఖ్యల మొత్తం ఎఞత అవుతుంది ?

సంఖ్యారెండు గచి మొత్తంను కనుగొనము.

(క) $\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}$ (ఖ) $\frac{3}{4}+\frac{-7}{4}$

సమాన హారం గల అకరణీయ సంఖ్యల కూడిక చేయుటకు మరొక విధానాన్ని తెలుసుకుందాం. కింది ఉదాహరణలను చూడుము.

ఉదాహరణ : (క) $\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{7}\right)$ (ఖ) $\frac{1}{-2}+\frac{3}{-2}$ (గ) $\frac{3}{-4}+\left(\frac{-1}{4}\right)$

సాధన - (క) $\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{7}\right)=\frac{3+(-6)}{7}=\frac{-3}{7}$

(ఖ) $\frac{1}{-2}+\frac{3}{-2}=\frac{1+3}{-2}=\frac{-4}{2}=-2$

(గ) $\frac{3}{4}+\left(\frac{-1}{4}\right)=\frac{3+(-1)}{4}=\frac{2}{4}$

మీకు తెలుసా ?

రెండు సమాన హారంగా అకరణీయ సంఖ్యలు కూడిక చేయునప్పుడు హారాలను సమాన చేసి, రెండు లవాల మొత్తంను లవంగా తీసుకొనవలెను.

సమాధానము కనుగొనండి.

(క) $\frac{5}{7}+\left(\frac{-6}{7}\right)$ (ఖ) $-1\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$

ఇప్పుడు అసమాన హారాలు గల అకరణీయ సంఖ్యల మొత్తంలను కనుగొందాం. రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను కూడిక చేయలనప్పుడు మొదట నాటిని సమాన హారాలుగా మార్చి తరువాత రెండు కొత్త అకరణీయ సశంఖ్య లవాల మొత్తాన్ని తవంగాను, సమాన్య హరాన్ని హరాంఐగాజను తీసుఎకొనన్నుట వలన వచ్చే కొత్త సంఖ్య వాటి మొత్తం అగును.

- రెండు ధన అకరణీయ సంఖ్యల మొత్తం .

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{21}{35}+\frac{10}{35}=\frac{21+10}{35}=\frac{31}{35}$$

ఇచ్చట $\frac{3}{5}$ యొక్క హారం 5, $\frac{2}{7}$ యొక్క హారం 7.

5, 7 ల క.సా.గు. 35 అనగా $\frac{3}{5},\frac{2}{7}$ ల హారం గా గల సంఖ్యలను మార్చిడమయ్యింది.

2. వ పద్ధతి -

1వ సోపానం - 5, 7 ల క.సాగు. 35

2వ సోపానం - 35 ను మొత్తం యొక్క హారాలుగా వ్రాయండి.

3వ సోపానం - హరాల కసాగు (35) ను మొదటి అకరణీయ సంఖ్య హరాచే భాగించినచో వచ్చే భాగఫలంచే ఆ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క లవాన్ని గుణించుట (35 ÷ 5) × 3 ఇది మొత్తంలోని మొదటి భాగం అగును.

హరాల క.సా.కు (35) ను రెండవ అకరణీయ సంఖ్య హరం ద్వారా భాగించి వచ్చిన భాగఫలంచే ఆ అకరణీయ సంఖ్య లవాన్ని గుణించవలెను. (35 ÷ 7) × 2 ఇది మొత్తంలో రెండవ భాగం అగును. లవంలోని ఈ రెండు భాగాలను కలపవలెను. దీనిని క్లుప్తంగా క్రిందివిధంగా చేయవలెను.

$$= \frac{3\times7+2\times5}{35}$$
$$= \frac{21+10}{35}$$
$$= \frac{31}{35}$$

ఇచ్చట రెండు పద్ధతులో మొత్తం కనుగొబడదనది.

ఈ రెండదంటి మధ్య భేధం ఏమిటి ?

ఉదాహరణ -

- ఒక ధనాత్మక అకరణాము సంఖ్యతో ఒక రుణాత్మక అకరణీయ సంఖ్యను కూడదక చేయుము.

$$\frac{11}{2}+(\frac{-5}{4})=\frac{22}{4}+(\frac{-5}{4})+\frac{22+(-5)}{4}=\frac{22-5}{4}=\frac{17}{4}=4\frac{1}{4}$$

ఉదాహరణ -

- రెండు ఋణాత్మక అకరణీయ సంఖ్యల కూడదక

$$(\frac{-8}{5})+(\frac{-7}{11})=(\frac{-88}{55})+(\frac{-35}{55})=\frac{(-88)+(-35)}{55}=\frac{-123}{55}=-2\frac{13}{55}$$

లబ్ధాన్ని కనుగొనండద.

(క) $\frac{5}{3}+\frac{3}{5}$ (ఖ) $(\frac{-3}{7})+\frac{2}{3}$ (గ) $(\frac{-5}{6})+(\frac{-3}{11})$

అభ్యాసం 5.2

1. కింది అకరణీయ సంఖ్యల మొత్తం కనుగొనండద.

(క) $\frac{2}{9},\frac{5}{9}$ (ఖ) $\frac{-3}{7},\frac{5}{7}$ (గ) $\frac{5}{4},\frac{-7}{4}$ (ఘ) $\frac{-17}{6},\frac{-13}{6}$

2. విలువను కనుగొనండద.

(క) $\frac{11}{2}+\frac{5}{4}$ (ఖ) $\frac{-3}{7}+\frac{7}{17}$ (గ) $\frac{5}{4}+\frac{-4}{3}$ (ఘ) $\frac{-1}{2}+\frac{-2}{7}$

3. క్రింది x, y విలువలను ఉపయోగించి $x+y=y+z$ అని బిలుడాపు చేయండిం

(క) $x=\frac{5}{7}, y=\frac{-3}{2}$ (ఖ) $x=-8, y=\frac{9}{2}$

4. విలువలను కనుగొనండిం.

(క) $\frac{-3}{10}+\frac{12}{-10}+\frac{14}{10}$ (ఖ) $\frac{-9}{11}+\frac{2}{3}+\frac{-3}{4}$ (గ) $2+\frac{-1}{2}+\frac{-3}{4}$

5.4.2. అకరణీయ సంఖ్యల తీసివేత

సీత $\frac{5}{9}, \frac{3}{11}$ అకరణీయ సంఖ్యలలో $\frac{5}{9}$ నుండిం $\frac{3}{11}$ తీసివేస్తే ఎంత ఐగుటుంది. అని సోమేషును అడిగింది.

సీత చేసిన తీసవేత ప్రక్రియ

$$\frac{5}{9}-\frac{3}{11}=\frac{55-27}{99}=\frac{28}{99}$$

సోమేషు రెండు అకరణీయ సంఖ్యల తీసివేత ప్రక్రియను కూడిక రూపంలో క్రింది విధముగా చేసెను.

$$n-y=n+(-y)$$

అతడు $\frac{5}{9}$ $\frac{3}{11}$ ల తీసివేతను క్రింది విధముగా చేసెను.

$$\frac{5}{9}-\frac{3}{11}=\frac{5}{9}+\left(\frac{-3}{11}\right)=\frac{55+(-27)}{99}=\frac{28}{99}$$

రెండు విధములుగా చేసిన ఒకే ఫలితం లభించినది.

రెండు పద్ధతులుగా ఉపయోగించి క్రింది దానిని తీసివేత చేయండిం.

(క) $\frac{7}{8}-\frac{5}{11}$ (ఖ) $\frac{7}{11}-\frac{8}{5}$ (గ) $\frac{11}{2}-\frac{5}{4}$ (ఘ) $\frac{-3}{7}-\frac{7}{11}$

సీత ఒక ధనాత్మక అకరణీయ సంఖ్య నుండిం ఒక ఋణాత్మక సంఖ్యను తీసివేసెను. అమె చేసిన విధనమును పరిశీలించుము.

$$\frac{5}{6}-(\frac{-2}{5})=\frac{5}{6}+\frac{2}{5}=\frac{25+12}{30}=\frac{37}{30}$$

రహిం ఒక ఋణ అకరణీయ సంఖ్యనుండిం మరొక ఋణ అకరణీయ సంఖ్యను తీసివేసెను.

$\left(-\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{-3}{8}\right)=\left(\frac{-2}{5}\right)+\left(\frac{-3}{8}\right)$ యొక్క సంకలన విలోమం.

$$=\frac{-2}{5}+\frac{3}{8}$$

$$=\frac{-16}{40}+\frac{15}{40}$$

$$=\left(\frac{-1}{40}\right)$$

మీకు తెలుసా?

అకరణీయ సంఖ్యను తీసి వేయునప్పుడు తీసి వెయవలసిన సంఖ్య యొక్క సంకలన విలోమాన్ని సంకలనం చేయవలెను.

అభ్యాసం 5.3

1. మొదటి అకరణీయ సంఖ్యనుండి రెండవ అకరణీయ సంఖ్యను తీసి వేయుము.

(క) $\frac{11}{2}, \frac{5}{4}$ (ఖ) $\frac{-3}{11}, \frac{7}{11}$ (గ) $\frac{5}{4}, \frac{-4}{3}$ (ఘ) $\frac{5}{42}, \left(\frac{-6}{21}\right)$

2. విలువను కనుగొనుము.

(క) $\frac{6}{7}-\frac{-5}{7}$ (ఖ) $\frac{7}{24}-\frac{5}{36}$ (గ) $\frac{9}{10}-\frac{7}{-15}$ (ఘ) $\frac{8}{23}-\frac{5}{11}$

5.4.3 భిన్నాల గుణకారం గూర్చి మనకు తెలుసు దానిని గుర్తుచేసుకొని క్రింది గుణకారం చేద్దాం.

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=$ ఎంత ?

దీనిని మీరు ఏ విధంగా తెలుసుకోగలరు.

$$\text{రెండు భిన్నాలు లబ్ధం} = \frac{\text{1వ భిన్నం లవమం} \times \text{2వ భిన్నం లవం}}{\text{1వ భిన్నం లవమం} \times \text{2వ భిన్నం లవం}}$$

మీకు తెలుసా ?
ప్రతీ భిన్నం ఒక అకరణీయ సంఖ్య కాని ప్రతీ అకరణీయ సంఖ్య భిన్న కాడలదు

భిన్నాలలోని ఈ గుణకార నియమాన్ని అకరణీయ సంఖ్యలందు కూడా మనం ఉపయోగించు కోవచ్చు. రెండు అకరణీయ సంఖ్యల గుణకారం ఉదాహరణ దిగువున ఇవ్వబజినది వాటిని.

1వ ఉదాహరణ

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4} = \frac{1\times3}{2\times4}=\frac{3}{8}$

2వ ఉదాహరణ

$\frac{1}{4}\times\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{1\times(-1)}{4\times3}=\frac{-1}{12}$

3వ ఉదాహరణ

$\frac{-3}{5}\times\frac{2}{7} = \frac{(-3)\times2}{5\times7}=\frac{-6}{35}$

4వ ఉదాహరణ

$\frac{-2}{5}\times\frac{-3}{11} = \frac{(-2)\times(-3)}{5\times11}=\frac{6}{55}$

పై ఉదాహరణలను పరిశీలించి క్రింది పట్టికను పూరించుము. మీకోసం ఒక ఉదాహరణ ఇవ్వబడిందనది.

ఉదాహరణ	మొదటిది అకరణీయ సంఖ్య	రెండవది అకరణీయ సంఖ్య	లబ్ధం	మొదటిది అకరణీయ సంఖ్య ఎటువంటిది	రెండవది అకరణీయ సంఖ్య ఎటువంటిది	లబ్ధం ఎటువంటి సంఖ్య
మొదటిది	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	ధన అకరణీయ సంఖ్య	ధన అకరణీయ సంఖ్య	ధన అకరణీయ సంఖ్య
రెండవది						
3వవది						
నాల్గవది						

పై పట్టికనుండి మీరు ఏమి గమనించారు.

మొదటి ఉదాహరణ - రెండు ధనాత్మక అకరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం ఒక ధనాత్మక అకరణీయ సంఖ్య అగును.

రెండవ ఉదాహరణ - ఒక ధనాత్మక అకరణీయసంఖ్యను ఒక ఋణాత్మక అకరణీయ సంఖ్య చే గుణించగా వచ్చే లబ్ధం ఒక ఋణాత్మక అకరణీయ సంఖ్య అగును.

మిగిలిన ఉదాహరణలను పరిశీలించి తెలుసుకొనుము.

లబ్ధాన్ని కనుగొనండి -

(క) $\frac{-5}{8}\times\frac{-9}{7}$ (ఖ) $\frac{5}{7}\times\frac{-7}{5}$ (గ) $3\times\frac{-7}{8}$ (ఘ) $\left(\frac{-4}{7}\right)\times\left(\frac{-7}{4}\right)$

అభ్యాసం 5.4

1. లబ్ధాన్ని కనుగొనండి -

(క) $\frac{7}{24}\times-16$ (ఖ) $\frac{-3}{5}\times2$ (గ) $\frac{-7}{6}\times(-24)$ (ఘ) $\frac{5}{7}\times(\frac{-2}{3})$

(ఙ) $\frac{9}{8}\times\frac{32}{7}$ (చ) $\frac{50}{7}\times\frac{14}{7}$ (ఛ) $\frac{4}{7}\times\frac{2}{7}$ (జ) $\frac{13}{15}\times\frac{25}{26}$

2. సూక్ష్మీకరించుము.

(క) $(\frac{-16}{15}\times\frac{20}{8})-(\frac{15}{5}\times\frac{35}{5})$ (ఖ) $(\frac{13}{8}\times\frac{12}{13})+(\frac{-4}{9}\times\frac{3}{2})$

3. $x\times y = y\times x$ అని ఋజువు చేయుము.

(క) $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{3}{5}$ (ఖ) $x=\frac{2}{7}$, $y=\frac{-11}{8}$ (గ) $x=\frac{3}{5}$, $y=\frac{2}{9}$

5.4.4 అకరణీయ సంఖ్య భాగహారం

ఇంతకు మానం అకరణీయ సంఖ్యల గుణకారం గూర్చి మనం తెలుసుకున్నాం. వాటిని గుర్తు చేసుకొనుము.

$\frac{3}{4}$ ను దేనిచే గుణించిన లబ్ధం 1 వచ్చును.

$\frac{3}{4}$ ఒక భిన్నం 1 యొక్క లవం 3 హారం 4.

$\frac{3}{4}$ యొక్క విలోమ భిన్నంచే $\frac{3}{4}$ ను గుణించినచో లబ్ధం 1 వచ్చునని మీరు చెప్పగలరు.

ఖాళీలను పూరించుము.

$5\times\frac{1}{5}=$ ______	$\frac{-5}{8}\times$ ______ $=1$
$8\times$ ___ $=1$	$\frac{3}{-11}\times$ ______ $=1$
$\frac{4}{7}\times$ ____ $=1$	$\frac{7}{15}\times$ _____ $=1$

మీకు తెలుసా ?

రెండు అకరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం 1 అయిన ఆ రెండు సంఖ్యలు ఒక దానికి ఒకటి గుణకార విలోమములు అగును.

- దిగువున గల రెండు అకరణీయ సంఖ్యల భాగహారాన్ని పరిశీలించుము.

మొదటి సోపానం $=\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$ యొక్క విలోమా

రెండవ సోపానం $=\frac{3}{4}\times\frac{2}{1}$

మూడవ సోపానం $=\frac{3\times2}{4\times1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

పై భాగాహారాన్ని పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాదానం వ్రాయుము.

- ఏ భిన్నం ఏ భిన్నాన్ని భాగించినది ?
- భాగ హారంలో మొదటి సోపానంలో ఏం చేయాబడునది !
- భాగా హారంలో రెండవ సోపానంలో ఏమి చేయబడునది !
- భాగా హారంలో మూడవ సోపానంలో ఏమి చేయబడునది !

దీని వలన రెండు భిన్నాలను ఏ విధంగా భాగించాలో తెలుసుకొనగలిగామా! ఒక భిన్నం (విభాజ్యం) ను మరొక భిన్నం (విభాజకం) ద్వారా భాగించగా ఎంత వచ్చునో విభాజ్యనికి. విభాజకం యొక్క విలోమం చే గుణించగా లబ్ధం అంచే వచ్చును.

అకరణీయ సంఖ్యల భాగహారంలో ఈ నియమాన్ని మనం ఉపయోగించుకోవచ్చు.

ఉదాహరణ -1

$$\frac{5}{8}\div\frac{7}{3}=\frac{5}{8}\times\left(\frac{7}{3}\text{యొక్క విలోమం}\right)$$
$$=\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{5\times3}{8\times7}=\frac{15}{56}$$

ఉదాహరణ -2

$$\frac{1}{4}\div\left(\frac{-2}{5}\right)=\frac{1}{4}\times\left(\frac{-2}{5}\text{యొక్క విలోమం}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{5}{-2}=\frac{1\times5}{4\times(-2)}=\frac{5}{-8}=\frac{-5}{8}$$

మీకు తెలుసా ?

$\frac{-2}{5}$ ఏంతో $\frac{2}{-5}$ అంతే

ఉదాహరణ -3

$$\left(\frac{-2}{3}\right) \div \left(\frac{4}{11}\right) = \frac{-2}{3} \times \left(\frac{4}{11} \text{ యొక్క విలోమం}\right)$$

$$= \frac{-2}{3} \times \frac{11}{4} = \frac{-2 \times 11}{3 \times 4} = \frac{-22}{12} = \frac{-11}{6}$$

$$\left(\frac{-8}{5}\right) \div \left(\frac{-6}{7}\right) = \frac{-8}{5} \times \left(\frac{-6}{7} \text{ యొక్క విలోమం}\right)$$

$$= \frac{-8}{5} \times \frac{-7}{6} = \frac{(-8) \times (-7)}{5 \times 6} = \frac{56}{30} = \frac{28}{15}$$

పై నాలుగు ఉదాహరణలను పరిశీలించి క్రింది పట్టికను పూరించుము.

	1వ ఉదా	1వ ఉదా	2వ ఉదా	3వ ఉదా
మొదటి అకరణీయ సంఖ్య (విభాజ్యం)	$\frac{5}{8}$			
రెండవ అకరణీయ సంఖ్య (విభాజకం)	$\frac{7}{3}$			
రెండవ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క విలోమం	$\frac{3}{7}$			
మొదటి అకరణీయ సంఖ్య, రెండవ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క విలోమం ల లబ్ధం.	$\frac{15}{56}$			
మొదటి అకరణీయ సంఖ్య ధనాత్మకమా ! ఋణాత్మకమా !	ధనాత్మక			
రెండవ అకరణీయ సంఖ్య ధనాత్మకమా ! ఋణాత్మకమా !	ధనాత్మక			
భాగఫలం అకరణీయ సంఖ్య ధనాత్మకమా ! ఋణాత్మకమా !	ధనాత్మక			

పై పట్టిక నుండి మీరు ఏమి గమనించారు.

- పైద్రని ఒక ధన అకరణీయ సంఖ్యలో ధన అకరణీయ సంఖ్యచే భాగించినచో వబ్చ, భాగఫలం ఒక ధన అకరణీయ సంఖ్య అగును.
- ఏదైన ఒక ధన అకరణీయ సంఖ్యను ఋణ అకరణీయ సంఖ్యచే భాగించివచో వాజ్య భాగఫలం ఒక ఋణ ను అకరణీయ సంఖ్య అగును.

ఇదే విధంగా మూడు, నాల్గవ ఉదాహరణలను పరిశీలించి వ్రాయుము.

అభ్యాసం 5.5

1. క్రింది సంఖ్యల గుణకార విలోమమును వ్రాయుము.

(క) $\frac{5}{9}$ (ఖ) $\frac{-4}{3}$ (గ) -2 (ఘ) 8

(ఙ) $1\frac{1}{2}$ (చ) $\frac{11}{-12}$ (ఛ) $\frac{-2}{-19}$ (జ) $-2\frac{1}{7}$

2. భాగఫలం ను వ్రాయుము.

(క) $3\div\frac{4}{5}$ (ఖ) $\frac{-3}{5}\div 2$ (గ) $\frac{-4}{7}\div 3$ (ఘ) $\frac{1}{5}\div\frac{6}{7}$

(ఙ) $\frac{-1}{8}\div\frac{3}{4}$ (చ) $\frac{-7}{6}\div\left(\frac{-2}{3}\right)$ (ఛ) $\frac{-5}{6}\div\left(\frac{-1}{4}\right)$ (జ) $\frac{-3}{13}\div\left(\frac{-4}{65}\right)$

5.5. ధనాత్మక అకరణీయ సంఖ్యలను ధశాంశ భిన్నాలుగా మార్చుట -

భిన్నాలను ధశాంశ భిన్నాలుగా మార్చుటను గూర్చి మనం తెలుసుకున్నాం దిగువున కొన్ని భిన్నాలను దశాంశ భిన్నాలిలో మార్చిన విధానము ఇవ్వబడఁనది.

$\frac{7}{10}=0.7$ $\frac{17}{100}=0.17$ $\frac{11}{10}=1.1$

$\frac{123}{10}=12.3$ $\frac{9}{1000}=0.009$ $\frac{231}{1000}=0.231$

మీకు తెలుసా ?
ఏదైన ఒక భిన్నంలో హారం 10, 100, 1000, వంటి సంఖ్యలున్నచో వాటిని సులభంగా దశాంశ భిన్నలుగా మార్చగలం.

క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలించుము.

ఉదాహరణ -

(క) $\frac{1}{2}=\frac{1\times 5}{2\times 5}=\frac{5}{10}=0.5$

(ఖ) $\frac{3}{4}=\frac{3\times 25}{4\times 25}=\frac{75}{100}=0.75$

(గ) $\frac{3}{25}=\frac{3\times 4}{25\times 4}=\frac{12}{100}=0.12$

(ఘ) $\frac{3}{125}=\frac{3\times 8}{125\times 8}=\frac{24}{1000}=0.024$

చెప్పి చూడండి.
ఈ ఉదాహరణలలో భిన్నాలను దశాంశ భిన్నాలుగా మార్చుటకై ఏమి చేయడ మయినది ! అలా ఎందుకు చేయబడినది?

ప్రతీ ఉదాహరణలను భిన్న యొక్క హరాన్ని 10, 100, లేక 1000 వాటి (10 ఆధారం గల ఘతరాశీను) సంఖ్యలుగా మార్చుకొని దశాంశ భిన్నలుగా ఒక అకరణీయ సంఖ్య యొక్క హరంలోని కరణాంకాలు 2 లేక 5 వినహ కారణంకాలు లేనిచో ఆ అకరణీయ సంఖ్య దశాంశభిన్నంగా మారుతుంది.

కింది ధనాత్మక అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశభిన్నాలుగా మార్చి వ్రాయుము.

(క) $\frac{7}{8}$ (ఖ) $\frac{23}{125}$ (గ) $\frac{3}{16}$ (ఘ) $\frac{59}{200}$ (ఙ) $\frac{24}{25}$

5.5.1. భాగాహార పద్ధతి ద్వారా అకరణీయ సంఖ్యను దశాంశ సంఖ్యగా మార్చుట -

ప్రతీ అకరణీయ సంఖ్యను దశాంశ భిన్నంలోకి మార్చువచ్చును.

ఉదాహరణ -

$\frac{3}{4}$ ను దశాంశ భిన్నంలోనికి మార్చుము.

సాధన - మొదటి పద్ధతి - (భిన్నం యొక్క హరాన్ని 10 అధారాగా గల ఘతరాశిలోకి మార్చుకొనుట)

$$\frac{3}{8}=\frac{3\times125}{8\times125}=\frac{375}{1000}=0.375$$

రెండవ పద్ధతి - భాగా హరా ద్వారా

$$\begin{array}{r|l} & .375 \\ \hline 8 & 30 \\ & 24 \\ \hline & 60 \\ & 56 \\ \hline & 40 \\ & 40 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\therefore\ \frac{3}{8}=0.375$$

ఉదాహరణ

భాగాహారం ద్వారా $\frac{16}{5}$ ను దశాంశ భిన్నంలోకి మార్చుము.

సధనా

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3.2 \\
\hline
5 & 16 \\
 & 15 \\
\hline
 & \;\;10 \\
 & \;\;10 \\
\hline
 & \;\;\;0
\end{array}
$$

$\therefore \frac{16}{5} = 3.2$

పైన మనం తెలుసుకున్న దశాంశ భిన్నాలన్ని మరింత దశాంశ భిన్నాలు. ఎందుకన భాగాహారం వలన వచ్చే భాగఫలం పరిమితమై ఉంటుంది. మరియు శేషం 0 వచ్చును.

క్రింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి.

ఉదాహరణ - $\frac{1}{3}$ ను దశాంశ భిన్నలలోకి మార్చుము.

$$
\begin{array}{r|l}
 & .3333 \\
\hline
3 & 10 \\
 & \;\;9 \\
\hline
 & \;10 \\
 & \;\;\;9 \\
\hline
 & \;\;10 \\
 & \;\;\;\;9 \\
\hline
 & \;\;\;10 \\
 & \;\;\;\;\;9 \\
\hline
 & \;\;\;\;\;1
\end{array}
$$

ఉచ్చట మీరు ఏమి గమనించారు.

ఈ భాగహారంలో భాగఫలంలో 3 మళ్ళీ మళ్ళీ వస్తుంది. శేషం 0 కాక పోవడం వలన ఈ భాగహారం ముగియుదు.

$\frac{1}{3} = 0.333...$ (ఇచ్చట 3 నకు అంతం లేదు)

ఈ దశాంశ భిన్నలను క్లుప్తంగా 0.3 గా వ్రాయ్యవచ్చును. (దీనిని పౌనకిపున దశాంశ భిన్నంగా చదువవలేను)

అందువలన $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$ ।

(ఖ) $\frac{6}{11}$ ను దశాంశ భిన్నంలోకి మార్చుము.

$$
\begin{array}{r|l}
 & .545454... \\
11 & 60 \\
 & 55 \\
\hline
 & 50 \\
 & 44 \\
\hline
 & 60 \\
 & 55 \\
\hline
 & 50 \\
 & 44 \\
\hline
 & 60 \\
 & 55 \\
\hline
 & 50 \\
 & 44 \\
\hline
 & 6
\end{array}
$$

మీకు తెలుసా ?
ఇచ్చట భాగఫలంలో 5, 4 లు పునరావృతం అయ్యెను. కావున భాగఫలాన్ని . 54 గా వ్రాయవచ్చును.

ఇచ్చట భాగఫలంలో 5, 4 లు పునరావలీతం అయ్యెను. కావున మనం ఎన్ని సార్లు భాగించినా భాగఫలంలో 5, 4 లు వరుసక్రమంలో వస్తాయి.

$\therefore \frac{6}{11} = 0.545454... = 0.\overline{54}$ ఇచ్చట 5 మరియు 4 లు పునరావలీతం అయ్యెను.

$\frac{25}{12}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2.08333... \\
12 & 25 \\
 & 24 \\
\hline
 & 100 \\
 & 96 \\
\hline
 & 40 \\
 & 36 \\
\hline
 & 40 \\
 & 36 \\
\hline
 & 4
\end{array}
$$

చెప్పి చూడండి.
ఇచ్చట $\frac{25}{12}$ ను దశాంశ భిన్నంలో ఏ విధంగా వ్రాయాలి ? అలా ఎందుకు వ్రాయాలి.

పై ఉదాహరణలలోని దశాంశ భిన్నాలను అపరిమిత ఆవర్తిత దశాంశము అంటారు.

మీకు తెలుసా ?

- ఏదైనా అకరణీయ సంఖ్య యొక్క హారం యొక్క సామాన్య కారణంకాలు 2 లేక 5 తప్ప ఇతర కారణాంకాలు కానిచో అకరణీయ సంఖ్య అపరిమిత దశాంశ భిన్నంగా మారగలదు. అకరణీయ సంఖ్య పరిమిత దశాంశ భిన్నం అగుటకు దాని హరా యొక్క సామాన్య కారణింకాలు కేవలం 2 లేక 5 లేక 2 మరియు 5 అయిఉండవలెను.

  $: \frac{4}{5}, \frac{3}{8}, \frac{7}{25}$ మొదలగునవి.

- ఒక అకరణీయ సంఖ్యలోని సామాన్య కారణాంకాలు 2 మరియు 5 వినహా ఇతర కారణాంకాలు అయినచో దానిని దశాంశ భిన్నంలోకి మార్చినచో అది అపరిమిత అవర్తిత దశాంశ భిన్నలు అగును.

  $: \frac{1}{3}, \frac{6}{11}, \frac{73}{7}, \frac{2}{15}$ మొదలగునవి.

5.5.2. ఋణాత్మక అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ భిన్నాలుగా మార్చుట.

క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

ఉదా-1 $$\frac{-4}{5}=\frac{-4\times2}{5\times2}=\frac{-8}{10}=-\left(\frac{8}{10}\right)=-0.8$$

ఉదా-2 $$\frac{-19}{4}=\frac{-19\times25}{4\times25}=\frac{-475}{100}=-\left(\frac{475}{100}\right)=-4.75$$

ఉదా-3 $$\frac{-1}{3}=-\left(\frac{1}{3}\right)=-(0.333....)=-0.\bar{3}$$

గుర్తించుకొనుము : $-\frac{p}{q}$ యొక్క దశాంశ రూపము $=-(\frac{p}{q}$ యొక్క దశాంశరూపం)

అభ్యాసం 5.6

1. క్రింది అకరణీయ సంఖ్యల హారాన్ని 10 యొక్క ఘతరాశులుగా కూర్చుకొని దశాంశ భిన్నలలోకి మార్చుము.

(క) $\frac{2}{5}$ (ఖ) $\frac{21}{20}$ (గ) $\frac{-5}{4}$ (ఘ) $\frac{-16}{25}$

2. క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలను భాగహార ప్రక్రియాద్వారా దశాంశ భిన్నాలలోకి మార్చుము.

(క) $\frac{3}{5}$ (ఖ) $\frac{7}{8}$ (గ) $\frac{9}{16}$ (ఘ) $\frac{10}{3}$

(ఙ) $\frac{-11}{5}$ (చ) $\frac{5}{11}$ (ఛ) $\frac{2}{15}$ (జ) $\frac{-2}{15}$

3. భాగహారం చేయకుండా కింది అకరణీయ సంఖ్యలలో ఏవి పరిమిత దశాంశాలు ఏవి అపరిమిత దశాంశాలు అగునో వ్రాయుము.

(క) $\frac{9}{4}$ (ఖ) $\frac{17}{40}$ (గ) $\frac{15}{11}$ (ఘ) $\frac{22}{7}$

(ఙ) $\frac{29}{250}$ (చ) $\frac{37}{21}$ (ఛ) $\frac{49}{14}$ (జ) $\frac{126}{45}$

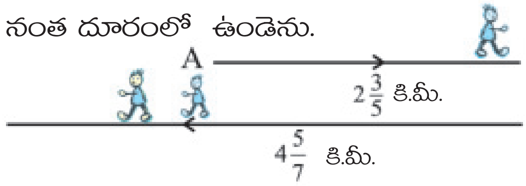
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ ను దశాంశ భిన్నాలలోకి మార్చి అది పరిమిత లేక అపరిమిత దశాంశమా వ్రాయుము.

$\frac{11}{135}$ ను దశాంశ భిన్నంలోనికి మార్చి ఆ భాగహారం చేయకుండానే అది పరిమిత లేక అపరిమిత దశాంశ భిన్నమా ఏవిధంగా తెలుసుకోగలరో వ్రాయుండి.

5.6 అకరణీయ సంఖ్యలను గణిత ప్రక్రియలందు ప్రయోగించుట -

ఉదా-

ప్రకాశ్ A స్థానం నుండి $2\frac{3}{5}$ కి.మీ. తూర్పు దిశగా నడచిన తరువాత అచ్చట నుండి పడమరగా $4\frac{5}{7}$ కి.మీ. వెనుకకు వచ్చెను. అయిన అతడు A నుండి ఏ దిక్కులో నంత దూరంలో ఉండెను.



సాధనా - A నుండి తూర్పు వెళ్ళిన దూరం ధనాత్మకము అయినచో పడమర దిశగా వెళ్ళిన దూరం ఋణాత్మకం అగును. అనుకుంటాం.

కావున ప్రకాష్ నడచిన దూరం $= 2\frac{3}{5} + \left(-4\frac{5}{7}\right) = \frac{13}{5} + \left(\frac{-33}{7}\right) = \frac{13\times7+(-33)\times5}{5\times7}$

$$= \frac{91+(-165)}{35} = \frac{-74}{35} = -2\frac{4}{35}$$

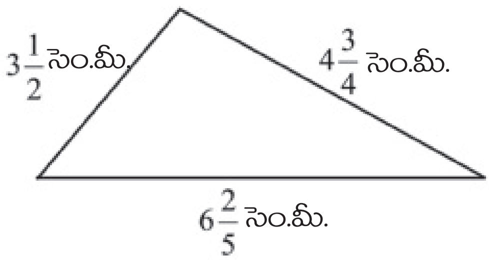
ఇచ్చట దూరం ఋణ సంఖ్య అగుటవలన ప్రకాష్ A స్థానం నుండి పడమర దీశగా $2\frac{4}{35}$ కి.మి. దూరంలో ఉండెను.

ఉదా-2

ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాల పొడవులు వరుసగా $4\frac{3}{4}$ సెం.మి., $3\frac{1}{2}$ సెం.మి. $6\frac{2}{3}$ సెం.మి. అయిన దాని చుట్టుకొలత ఎంత ?

సాధన -

త్రిభుజ చుట్టుకొలలు = $4\frac{3}{4}$ సెం.మీ.+ $3\frac{1}{2}$ సెం.మీ.+ $6\frac{2}{5}$ సెం.మీ.



$= \left(\frac{19}{4} + \frac{7}{2} + \frac{32}{5}\right)$ సెం.మీ.

$= \left(\frac{19\times5+7\times10+32\times4}{20}\right)$ సెం.మీ.

$= \left(\frac{95+70+128}{20}\right)$ సెం.మీ.$= \frac{293}{20}$ సెం.మీ.

$= 14\frac{13}{20}$ సెం.మీ.

మీకు తెలుసా ?
త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాల పొడవుల మొత్తం దాని చుట్టుకొలత అగును.

$\therefore$ త్రిభుజ చుట్టు కొలత $14\frac{13}{20}$ సెం.మీ.

ఉదాహరణ - 3

ఒక దీర్ఘ చతురస్రం పోడవు వెడల్పులు వరుసుగా $41\frac{2}{3}$ మీ.$18\frac{3}{5}$ మీ. అయిన దాని వైశల్యం ఎంత ?

సాధనా -

దీర్ఘ చతురస్రం పోడవు= $41\frac{2}{3}$ మీ.= $\frac{125}{3}$ మీ.

వెడల్పు $= 18\frac{3}{5}$ మీ. $= \frac{93}{5}$ మీ.

$\therefore$ దీర్ఘ చతురస్రం వేశాల్యం $\times$ పోడవు వెడల్పు

$$= \left(\frac{125}{3}\times\frac{93}{5}\right) \text{ చ.మీ.}$$

$$= \left(\frac{25}{1}\times\frac{31}{1}\right) \text{ చ.మీ.}$$

$$= 775 \text{ చ.మీ.}$$

చెప్పి చూడండి.
ఈ దీర్ఘ చతురస్రం పాడవును సగానికి. తగ్గించి వెడల్పును రెండంత చేసిన ఏర్పడే కొత్త దీర్ఘ చతురస్రం వైశాల్యం, మొదటి దీర్ఘ చతురస్రం వైశాల్యం, అనుపాతమెంతో తెలుసుకొని వ్రాయండం.

$\therefore$ దీర్ఘ చతురశ్ర వేశాల్య 775 చ. మీ.

ఉదా-4

రెండు అకరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం $\frac{-8}{65}$ అందులో ఒకటి $\frac{5}{26}$ అయినచో రెండవది ఎంత ?

సాధన -

రెండు అకరణీయ సంఖ్యల లబ్దం $= \frac{-8}{65}$

అందు ఒక సంఖ్య $= \frac{5}{26}$

$\therefore$ రెండవ సంఖ్య$= \frac{-8}{65} \div \frac{5}{26}$

$$= \frac{-8}{\cancel{65}_{5}} \times \frac{\cancel{26}^{2}}{5}$$

$$= \frac{-16}{25} \quad \text{(జవాబు)}$$

మీకు తెలిసా ?

a,bలు రెండు సంఖ్యలు అయిన

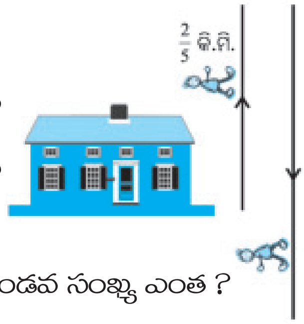
$a \times b = ab$

$ab \div a = b$

$ab \div b = a$

అభ్యాసం 5.7

1. ఒక త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాల పోడవులు వరుసగా $2\frac{1}{3}$ సెం.మీ., $3\frac{1}{2}$ సెం.మీ., $4\frac{2}{5}$ సెం.మీ. అయిన ఆ త్రిభుజం చుట్టుకొలత ఎంత ?



2. కమల్ తన ఇంటి నుండి $\frac{2}{5}$ కి.మీ. ఉత్తర దిశగా వేళ్లి అచ్చట నుండి $1\frac{3}{4}$ కి.మీ. దక్షిణ దిశగా వెళెను. అయిన ఇపుడు అతడు తన ఇంటికి ఏ దిశలో ఎంత దూరంలో ఉన్నాడు !

3. రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మొత్తం-9 అందులో ఒకటి $\frac{15}{8}$ అయిన రెండవ సంఖ్య ఎంత ?

4. మేరి ప్రతిదినం $5\frac{2}{3}$ గంటలు చదువును. అమె $2\frac{4}{5}$ గం. గణితం స్తస్తం చదువుతుంది. అయిన ఇతర విజ్ఞాన చదువుటకై ఎంత సమయా వినియోగిస్తుటుంది.

5. $9\frac{4}{3}, 5\frac{5}{6}$ మొత్తం $11\frac{2}{5}, 7\frac{1}{3}$ ల మొత్తం ల మధ్య భేదం ఎంత ?

6. ఒక చతురస్రాకారపు అడస్థలం యొక్క భుజం పోడవు $5\frac{3}{4}$ మీ. అయిన దాని వైశాల్యం ఎంత ? చుట్టుకొలత ఎంత ? అటస్థలం చుట్టూ కంటె వేయటకు మీటరుకు రూ.8 చావున ఎఇాత ఖర్చు అగును.

7. ఏ సంఖ్యకు $\frac{-8}{5}$ చే గుణించిన లబ్ధం 36 వచ్చును ?

8. రెండు అకరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం $\frac{-16}{9}$ అందు ఒకటి $\frac{-4}{3}$ అయిన రెండవది ఎంత ?

5.7 అకరణీయ సంఖ్యల పరమమానం

పూర్ణ సంఖ్యల పరమమానం కనుగొనుటకు గూర్చి మనం ఇది వరకే తెలుసుకున్నాం.

3 యొక్క పరమానం $= |3| = 3$

7 యొక్క పరమానం $= |7| = 7$

-6 యొక్క పరమమానం$= |-6| = 6$

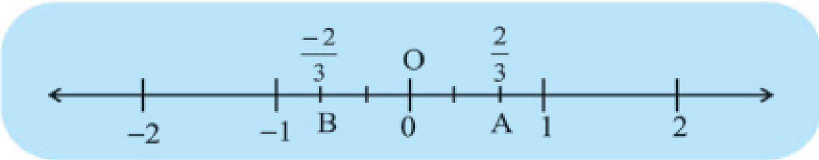
-15 యొక్క పరమమానం$= |-15| = 15$

మీకు తెలుసా ?

ఒక పూర్ణ సంఖ్య అయినచో దాని పరమమానంను lml రూపంలో వ్రాయవలెను. దానిని m యొక్క పరమమానం అని చదవవలెను.

అదే విధంగా అకరణీయ సంఖ్యలలో కుడ పరమమానం కలదు. ఎందుకంటే అకరణీయ సంఖ్యలను సఅఖ్యారేఖ చుపించగలుగుచున్నాం.

$\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}$ లను క్రింది విధంగా సంఖ్య రేఖలపై చూడండి.



$\therefore$ O మూల బిందువును సంఖ్యారేఖలో 0 (సున్న) గా తీసుకోబడదనది.

ఇప్పుడు సంఖ్యారేఖపై O, A ల మధ్య దూరం $\frac{2}{3}$ యూనిట్లు. O, B మధ్య దూరం కూడా $\frac{-2}{3}$ యునిట్లు

$\therefore$ $\frac{-2}{3}$ యొక్క పరమమానం $= \left|\frac{-2}{3}\right| = -\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$ యొక్క పరమమానం $= \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$

మీకు తెలుసా?

x ధనాత్మకం అయిన $|x|$ ధనాత్మకం

x ఋణాత్మకం అయిన $|x|$ ధనాత్మకం

x = 0 అయిన $|x|$ = 0

అకరణీయ సంఖ్యల పరమమానం అనగా మీరు ఏమి గమనించారు ?

- x ఒక ధనాత్మక అకరణీయ సంఖ్య అయినచో అది $|x| = x$ అగును.
- x ఒక ఋణాత్మక అకరణీయ సంఖ్య అయినచో అది $|x| = x$ అగును.

ఉదాహరణ

సరి చూడుము.

క) $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{-4}{3}$, అయిన $|x+y| < (|x|+|y|)$

ఖ) $x = \frac{4}{7}$, $y = \frac{5}{3}$, అయిన $|x+y| = |x|+|y|$

గ) $x = \frac{-2}{5}$, $y = \frac{-3}{2}$, అయిన $|x+y| = |x| + |y|$

సాధన

క) $x = \frac{3}{5}$ $y = \frac{-4}{3}$

ఎడమ వైపు $|x+y| = \left|\frac{3}{5} + \left(\frac{-4}{3}\right)\right|$

$= \left|\frac{9+(-20)}{15}\right|$

$= \left|\frac{(-11)}{15}\right|$

$= \frac{11}{15}$

కుడి వైపు. $= |x|+|y|$

$= \left|\frac{3}{5}\right| + \left|\frac{-4}{3}\right|$

$= \frac{3}{5} + \frac{4}{3}$

$= \frac{9+20}{15}$

$= \frac{29}{15}$

$\therefore$ ఎడమ వైపు విలువ < కుడి వైపు విలువ

అనగా $|x+y| < (|x| + |y|)$

$x = \frac{4}{7}$ $\quad$ $y = \frac{5}{3}$

ఎడమ వైపు $= |x+y| = \left|\frac{4}{7}+\frac{5}{3}\right| = \left|\frac{12+35}{21}\right| = \left|\frac{47}{21}\right| = \frac{47}{21}$

కుడి వైపు $= |x|+|y| = \left|\frac{4}{7}\right| + \left|\frac{5}{3}\right| = \frac{4}{7}+\frac{5}{3} = \frac{12+35}{21} = \frac{47}{21}$

$\therefore$ ఎడమ వైపు = కూడిన వైపు

అనగా $|x+y| = (|x|+|y|)$

(గ) $x = \frac{-2}{5}$ $\quad$ $y = \frac{-3}{2}$

ఎడమ వైపు $= \|x+y\| = \left\|\frac{-2}{5}+\left(\frac{-3}{2}\right)\right\| = \left\|\frac{(-4)+(-15)}{10}\right\| = \left\|\frac{-19}{10}\right\| = \frac{19}{10}$	కూడిన వైపు $= \|x\|+\|y\| = \left\|\frac{-2}{5}\right\|+\left\|\frac{-3}{2}\right\| = \frac{2}{5}+\frac{3}{2} = \frac{4+15}{10} = \frac{19}{10}$

అనగా $|x+y| = |x|+|y|$

ఉదాహరణ -

$x = \frac{-3}{5}$ మ $y = \frac{-2}{7}$ అని ఋజువు చేయుము.

$|x \times y| = |x| \times |y|$

మీకు తెలుసా ?

x ధనాత్మకం లేక ఋణాత్మకం అయిన మరియు y ధనాత్మక లేక ఋణాత్మక అయినప్పటికి అగును.

$|x \times y| = |x| \times |y|$

ఎడమ వైపు $= |x \times y| = \left|\frac{-3}{5} \times \frac{-2}{7}\right|$

$= \left|\frac{(-3)\times(-2)}{5\times 7}\right|$

$= \left|\frac{6}{35}\right| = \frac{6}{35}$

కూడిక వైపు $= |x| \times |y| = \left|\frac{-3}{5}\right| \times \left|\frac{-2}{7}\right|$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{3\times 2}{5\times 7}$$

$$= \frac{6}{35}$$

అనగా ఎడమ వైపు = కూడిక వైపు

$|x\times y| = |x| \times |y|$ విలువ

అభ్యాసం 5.8

1. క్రింది అకరణీయ సంఖ్యల పరమమానం నిర్ణయించండి.

   క) $\frac{1}{-5}$ ఖ) $\frac{1}{2}$ గ) $\frac{-3}{-2}$ ఘ) $\frac{-26}{21}$

2. x విలువ ను ఉపయోగించి $|x| = |-x|$ అని ఋజువు చేయండి.

   క) 4 ఖ) -9 గ) $\frac{-3}{7}$ ఘ) $\frac{3}{-8}$

3. x, y విలువలను ఉపయోగించి $|x + y| = |x| + |y|$ అవి ఋజువు చేయండి.

   క) $x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{5}$ ఖ) $x = \frac{-3}{4}, y = \frac{-3}{2}$

4. విలువలను ఉపయోగించి $|x + y| < (|x| + |y|)$ అగునో ! కాదో ! ఋజువు చేయుము.

   క) $x = -8,\ y = 5$ ఖ) $x = \frac{4}{3}, y \frac{-7}{9}$

5. x, y విలువలను ఉపయోగించు $|x \times y| = |x| \times |y|$ అని ఋజువు చేయుము.

   క) $x = \frac{-4}{5}$, $y = \frac{2}{3}$ ఖ) $x = \frac{-5}{11}$, $y = \frac{-3}{7}$

5.8 రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య గల అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుట -

అకరణీయ 7 సహజ సంఖ్యలు కలవని మనకు తెలుసు. అవి 3,4,5,6,7,8,9 కలవని సరికు చేప్పెను. అదే విధంగా -4 మరియు 4 మధ్య 7 పూర్ణసంఖ్యలు కలవని, అవి -3, -2, -1, 0 1, 2, 3 అవి అబ్దుల్ చెప్పెను రెండు పూర్ణ సంఖ్యల మధ్య ఒక నిర్ధిష్ట సంఖ్యలో పూర్ణ సంఖ్యలు కలవు.

రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య ఎన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు కలవున లేదా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను తీసుకొని రెండఽంటిని సమాన దారాలు $\frac{-2}{3}$ ఆ $\frac{-3}{7}$ గల అకరణీయం సంఖ్యలుగా మార్చి క్రింది విధముగా వ్రాసినవి.

$$:\frac{-2}{3}=\frac{-2\times7}{3\times7}=\frac{-14}{21} \text{ ఆ } \frac{-3}{7}=\frac{-3\times3}{7\times3}=\frac{-9}{21}$$

$$\frac{-14}{21}<\frac{-13}{21}<\frac{-12}{21}<\frac{-11}{21}<\frac{-10}{21}<\frac{-9}{21}$$

$$\frac{-2}{3}<\frac{-13}{21}<\frac{-12}{21}<\frac{-11}{21}<\frac{-10}{21}<\frac{-3}{7}$$

చెప్పి చూడండం ?
-1,1 మధ్య ఎన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు కలవు ! -2,-30 మధ్య ఎన్ని అకరణీయసంఖ్యలు కలవు

లేక $\frac{-2}{3}$ ఆ $\frac{-3}{7}$

అనగా $\frac{-2}{3}$ ఆ $\frac{-3}{7}$ మధ్య ఎన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు కలవు. తిరిగి అబ్దుల్ ల హరాలు సమానం చేయుటకై క్రింది విధంగా చేసెను. అతను రెండు అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క హరం 42 గా మార్చెను.

$$\frac{-2}{3}=\frac{-2\times14}{3\times14}=\frac{-28}{42} \text{ ఆ } \frac{-3}{7}=\frac{-3\times6}{7\times6}=\frac{-18}{42}$$

మరియు $\frac{-28}{42}$ ఆ $\frac{-18}{42}$ మధ్య గల అకరణీయ సంఖ్యలను క్రింది విధంగా వ్రాసెను.

$$\frac{-28}{42}<\frac{-27}{42}<\frac{-26}{42}<\frac{-25}{42}<\frac{-24}{42}<\frac{-23}{42}<\frac{-22}{42}<\frac{-21}{42}<\frac{-20}{42}<\frac{-19}{42}<\frac{-18}{42}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}<\frac{-9}{14}<\frac{-13}{21}<\frac{-25}{42}<\frac{-4}{7}<\frac{-23}{42}<\frac{-11}{21}<\frac{-1}{2}<\frac{-10}{21}<\frac{-19}{42}<\frac{-3}{7}$$

లీనా $\frac{-2}{3}$ ఆ $\frac{-3}{7}$ మధ్య గల 4 అకరణీయ సంఖ్యలను వ్రాయగా అబ్దుల్ 9 అకరణీయ సంఖ్యలను వ్రాసెను.

కావున మనము వెలేని రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అనంత అకరణీయ సంఖ్యలను ఉంచగలము.

సాధించుము

క) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{5}$ మధ్య గల ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను వ్రాయుము.

ఖ) $\frac{2}{7}$ $\frac{-1}{7}$ ల మధ్య గల మూడు అకరణీయ సంఖ్యలను వ్రాయుము.

2,3 ల మధ్య మూడు అకరణీయ సంఖ్యలను ఉంచుము.

మొదట - 2, 3 లను సమాన హారము గల అకరణీయ సంఖ్యలుగా మార్చవలెను. 2, 3 లను 4 హారంగాగల అకరణీయ సంఖ్యలుగా మార్చినాటు అనుకుందాం.

$$2 = \frac{8}{4}$$

$$3 = \frac{12}{4}$$

$$\frac{8}{4} < \frac{9}{4} < \frac{10}{4} < \frac{11}{4} < \frac{12}{4}$$

$$\Rightarrow 2 < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < \frac{11}{4} < 3$$

మీకు తెలుసా ?

$\Rightarrow$ దీనీ అర్థం ఇది దీనిని తెలియజేయును

అనగా 2, 3 ల మధ్య గల మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}$

ఈ విధంగా 2, 3 ల మధ్య అసంఖ్యకమైన అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనవచ్చును.

అభ్యాసం 5.9

1. 3, 4 మధ్య గల మూడు అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

2. -1 1 మధ్య గల మూడు అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

3. $\frac{-2}{5}$ $\frac{2}{5}$ ల మధ్య గల నాలుగు అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

4. $\frac{-1}{2}$ $\frac{1}{2}$ ల మధ్య గల మూడు అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

6వ అధ్యాయం

బీజ గణితం

6.1. ఉపోద్ఘాతం

అరవ తరగతిలో చలరాశులు, బీజగణిత రాశులకు సంబంధించిన పదాలు, పదాల గుణకాల గూర్చి కొంత తెలుసుకున్నాం. వాటిని గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

చలరాశి

మొదట బీజగణితంలో చలరాశుల అవశ్యకతను గూర్చి తెలుసుకుందాం చలరాశులు $x, y, l, m,$........ ద్వారా కేవలం ఘుచించబడును. $x, y, l, m,$........ లను అక్షర బీజాలు లేక బీజీయాలు అంటారు. ఇవి ఏనో ఒక సంఖ్యకు సంకేతం. అనగా ఒక నిర్దిష్టమైన విలువ లేనిచో స్థిరసంఖ్య విలువలో మార్పులేదు.

పదాలు - బిజయ సమాసాలు -

చలరాశి, స్థిరరాశి విలువలు తీసుకొని పదాలు ఏర్పడతాయి. కొన్ని పదాలలో ఒక బీజ గణితరాశి ఏర్పడుతుంది. క్రింది ఉదాహరణలను గమనించండి -

$4x+5$ ఒక బీజీయ సమాసము

$4x, 5$ లు విచిన్న పదాలు.

అదే విధంగా $3-4xy+5x^2, 10y-x$ మొదుగునవి దిక్కొక్క బీజీయ సమసాం ఆ రాశులలో గల x, y లు ఒక్కొక్క చలరాశులు.

$3-4xy+5x^2$ అనునది మూడు పదాలుగల బీజీయసమానం కాగా, $10y-x$ రెండు పదాలు గల బీజయ సమనం రెండుకాని అంతకంటె ఎక్కువ (గాని) పదాలు గలబిజస మాసాలను బిహ పదులు అంటారు.

గుణకము -

ఒక పదులో గల రెండు కారకాలలో ఒకలు మరొక దానికి గుణకము అనిఅంటారు.

ఉదాహరణ -

$2ab$ పదంలో 2 ఒక సంఖ్యా పరమైన గుణకం.

$2a, b$ యొక్క గుణకం.

$2b, a$ యొక్క గుణకం.

సజాతి - విజాతి పదాలు -

పదమునుదలి చలరాశులు సమానమైన, చలరాశుల ఘాతాలు సమానమువైన ఆ పదాలను సజాతి పదాలు అంటారు. మిగిలిన వాటిని విజాతి పదాలు అంటారు.

ఉదా -

$12x, -2x, 7x, x$ మొదలగునవి సజాతి పదాలు.

$7xy, 3x^2y, -2x$ మొదలగునవి విజాతి పదాలు.

అభ్యాసం 6.1

1. క్రింది బీజాయ సమాసాలలోనిట పదాలనే నిర్ణయించి వాటిని వేరు వేరుగా వ్రాయండి.

క) $-4x+5$ ఖ) $-4x+5y$ గ) $3y+2y^2$

ఘ) $1+x+x^2$ ఙ) $5xy^2+5x^2y-3xy$ చ) $Pq+q$

ఛ) $4p^2-3q^2$ జ) $2x+\frac{1}{4}$

2. ఇచ్చట బీజయ సమాసలలోని స్థిరసంఖ్యలను, బిన్నమైన ఇతర ప్రతి పదం యొక్క సంఖ్యల గుణకాలను వ్రాయండి.

క) $5-3t^2$ ఖ) $7xy-5x^2-2$ గ) $-P^2q^2+7pq$

ఘ) $x+2xy+3y$ ఙ) $m+3n$

3. చలరాశులుగల పదాలను గుర్తించి, ఆ పదాలలోని యొక్క గుణకాన్ని నిర్ణయించండి.

క) xy^2+x ఖ) $13y^2-8xy$ గ) $2-x$

ఘ) $x+y+2$ ఙ) $12xy^2+25$ $7xy+xy^2$

4. క్రింది వానిలో సజాతి పదాలను ఒకటిగా వ్రాయుము.

క) $4-xy^2, -4yx^2, 8x^2, 2xy^2, 7y, -11x^2, -100x, -11yz, 20x^2y, 5x, -3$

ఖ) $10pq, 7p, 8q, p^3q^2, 7qp, -100p, -23, 12q^2p^2, -3p, 7, 20q^2p^3, 78pq, 13p^2q, qp^2, 701p^2$

6.2. బీజయ సమాసం కూడికలు - తీసివేతలు -

క్రింది పరిస్థితులను పరిశీలించండి.

మొదట పరిస్థితి - ఒక పండ్ల దుకాణంలో నవీన్ ఎన్ని కమలాపండ్లు, కొనెనో, దానికి రెట్లు వంతుల కంటె మూడు తక్కువగా సిమన్ కమలా పండ్లను కొన్నడి. నవీన్ కొన్ని పండ్లు సంఖ్య మనకు తెలిసినట్లైతే సిమన్ కొన్న పండ్లు సంఖ్య మనం తెలుసుకొగలం. నవీన్ కొన్న పండ్లు సంఖ్యను టలరాశి x తో సూచించుదాం.

అనగా నవిన్ కొన్ని పండ్లు సంఖ్య = x అనుకొనుము.

ఇప్పుడు నవీన్, సిమన్ మొత్తం ఎన్ని పండ్లు కొన్నారో తెలుసుకొనుటకు ప్రయత్నించుదాం.

నవీన్, సిమన్ కొన్ని మొత్తం పండ్లు తెలుసుకొనుటకై $x, 2x-3$ కూడిక చేయవలెను.

$x, 2x-3$ లు ఒక్కొక్కటి ఒక్కొక్క బీజీయ సమాసము. ఆ రెండు రాశులను కూడిక చేసినచో నవీన్, సిమన్ కొన్ని పండ్లు సంఖ్య తెలుస్తుంది.

రెండవ పరిస్థితి -

x మీ పొడవు y మీ వెడల్పు గల దీర్ఘ చరురస్రం యొక్క వైశాల్యం 15 చ. మీ. అధికంగా కాగా మరొక చతురస్ర వైశాల్యం కంటె 7 చ. మీ. తక్కువ అయిన మొదటి చతురస్ర వైశాల్యం, రెండవ చతురస్రవైశాల్యం కంటె ఎన్ని చ.కీ.మీ. అధికం.

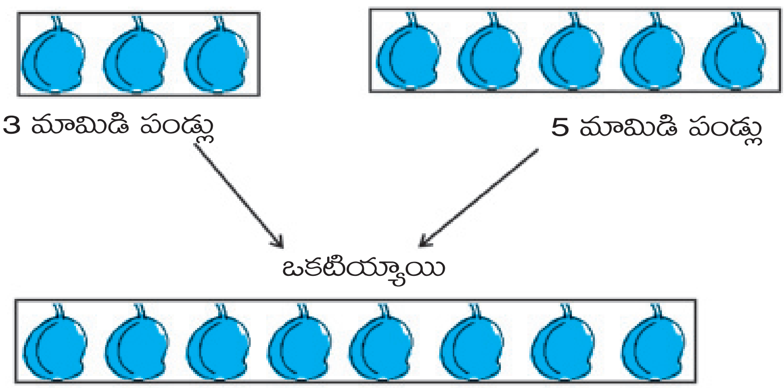
ఇచ్చట దీర్ఘ చతురస్త్ర వైశాల్యం = పొడవు × వెడల్పు

$= x \times y = xy$ చ.మీ.

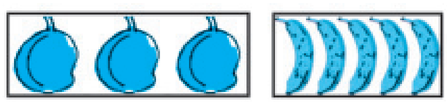
మొదటి చతురస్త్రం వైశాల్య $= (xy+15)$ చ.మీ.

రెండవ చతుస్త్రం వైశాల్యం $= (xy-7)$ చ.మీ.

ఈ రెండు బీజయ సమాసాల తీసివేత వలన మన ప్రశ్నకు సమాధానం లభిస్తు సజాతి పదాల కూడిక, తీసివేతలను గూర్చి మనం అరవ తరగతిలో తెలుసుకున్నాం. వాటిని గుర్తుకు తెచ్చుకొండి.



మొత్తం ఎన్ని మామిడి పండ్లు అయ్యాయి



ఇచ్చట 3 మామిడి పండ్లు + 5 మామిడి పండ్లు =................................పండ్లు

3 మామిడి పండ్లు, 5 అరటి పండ్లు, ఒక్కటైనచో 8 మామిడి పండ్లు లేక అరటి పండ్లు అని చెప్పగలమా.
ఒకే రకానికి చెందిన పండ్లును ఒక్కటి చెసిమొత్తాన్ని చెప్ప గలము.

మీకు తెలుసా ?

రెండుగాని, అంతకంటె ఎక్కువ సజాతి పదాలను కలుపునప్పుడు సజాతి పదాల సంఖ్యా గుణాల మొత్తం తెలుసుకొనవలెనం.

> మీకు తెలుసా?
> రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ సమజాతీయ పదాలను కూడిక చేయుటకు మొదట వాటి సంఖ్యా గుణకాలను కూడిక చేయవలెను

ఉదాహరణ-1

$3x$, $4x$ ల మొత్తం ఎంత ?

సాధన :

$$3x+4x = 3\times x+4\times x$$
$$=(3+4)\times x$$
$$=7\times x = 7x$$ (ఇచ్చట విజగన్యయం ఉపయోగించబడినది)

$$\therefore 3x+4x = 7x$$

ఉదాహరణ -2

$2xy, 3xy$ మరియు $5xy$ మొత్తం ఎంత ?

సాధన :

x

$$2xy+3xy+5xy = 2\times xy+3\times xy+5\times xy$$
$$=(2+3+5)\times xy$$
$$=10\times xy = 10xy$$

$$\therefore 2xy+3xy+5xy = 10xy$$

> **మీకు తెలుసా ?**
> సజాతి పదాలను తీసివేయు నపుడు పదాల సంఖ్య గుణకాలను తీసివేయవలెను. ఇది సజాతి పదాల సమాన ధర్మం.

ఉదాహరణ - 3

$5ab$ నుండి $3ab$ ను తీసివేయుము.

సాధన :

$$5ab-3ab = 5\times ab-3\times ab$$
$$=(5-3)\times ab$$
$$=2\times ab = 2ab$$

> గుర్తుంచుకొండి -
> విజాతి పదాల కూడిక, తిసివేత వలన కొత్త పదం లభించదాం $2x^2, 3xy$ ల మొత్తం $2x^2+3xy$ అగును.

6.2.1 బీజీయ సమసాల మొత్తం కనుగోనుట -

ఉదాహరణ -4

లను కుడము $7x-3y-2x+7y-4x$

సాధనా $7x-3y-2x+7y-4x$

$=7x-2x-4x-3y+7y$

$=(7-2-4)x+\{(-3)+7\}y$

$=(7-6)x+(7-3)y$

$=1\times x+4\times y=x+4y$

పై ఉదాహరణను పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానం రాయండి.

- ఏ గణిత అంశాలు సూక్షకరించవలెను?
- ఇందులో మొత్తం ఎన్ని పదాలు కలవు ?
- చలరాశి, చలరాశిలు గల పదాలను గుర్తించండి.
- చలరాశి గల పదాల మొత్తం ఎంత !
- చలరాశి గల పదాల మొత్తం ఎంత !
- మొత్తం జవాబు ఎంత ?

ఉదాహరణ - 5

$2x+5y-8$ మరియు $4x-3y$ బిజయ సమాసాల మొత్తం ఎంత ?

సాధన

$2x+5y-8$ $4x-3y$ ల మొత్తం $=2x+5y-8+4x-3y$

$=(2x+4x)+\{5y+(-3y)\}-8$ (సజతి పదాల

$=(2+4)x+\{5+(-3)\}y-8$

$=6x+2y-8$

$\therefore 2x+5y-8$ ఴ $4x-3y$ మొత్తం $6x+2y-8$

ఉదాహరణ - 6

$3x^2-6x-2, 8x+5-x^2, -4+x+2x^2$ మొత్తం ఎంత !

సాధన :

మొదటి పద్ధతి :

(అడ్డువరుస పద్ధతి) $=3x^2-6x-2+8x+5-x^2-4+x+2x^2$

$=3x^2-x^2+2x^2-6x+8x+x-2+5-4$ (ఎందుకు ఇలా వ్రాశారు)

$=(3-1+2)x^2+\{(-6+8+1)\}x-2+5-4$ (ఎందుకు ఇలా వ్రాశారు)

$=(3+2-1)x^2+(8+1-6)x+5-2-4$ (ఎందుకు ఇలా వ్రాశారు)

$=4x^2+3x-1$

రెండవ పద్ధతి (నిలువ వరుస పద్ధతి)

$3x^2-6x-2,\qquad 8x+5-x^2,\qquad -4+x+2x^2$

ఈ కూడింటిని క్రింది విధంగా కూడా వ్రాయవచ్చును.

$3x^2-6x-2,\qquad -x^2+8x+5,\qquad 2x^2+x-4$

మూడు సమాసాలలోని సజతి ఎదాలును ఒక దాని దిగువ మరొకటి వ్రాయవలెను.

$$\begin{array}{r} 3x^2-6x-2 \\ -x^2+8x+5 \\ 2x^2+x-4 \\ \hline 4x^2+3x-1 \end{array}$$

పై సమాదానాన్ని పరిశీలించండి.

- మొదట బిజీయ సమాసలలోని పెద్ద ఘతం నుండి చిన్న ఘతంలోనికి వరుసలో వ్రాయడమయ్యినది. అనగా పదం మొదట పద్, తరువాత పదం తరువాత లేని పదాలు చివరకు వ్రాయడమయినది.
- సజతి పదాలు ఒక దాని దిగువన మరొక దానిని రాయబడినది.
- సజాతి పదాలను కూడిక చేసి మొత్తం కనుగొనబడినది.

అభ్యాసం 6.2

1. సజాతి పదాలను ఒకటిగా చేసి సూక్షికరించండి.

క) $21b-7a+3b-2a$

ఖ) $-z^2+13z^2-5^z+7z^3-15z$

గ) $3a-2b-c-5b+6c+2a$

ఘ) $6ab+2a-3ab-ab+5a$

ఙ) $5x^2y-5x^2+3yx^2-3y^2+x^2+y^2+4xy^2-2y^2$

2. మొత్తం కనుగొనండి.

క) $3mn, -5mn, 8mn, -4mn$ ఖ) $5a, 8a, -9a, -2a$

గ) $a+b-3, b\ -2a+3$ ఘ) $-7mn+5, 2mn+2$

ఙ) $x^2-\ 2y+3, 3y^2+5y-7$ చ) $14x+10y-12xy-13, 18-7x-10y+8xy$

ఛ) $5m-n+5, 3m+4n-1$ జ) $x^2-y^2-1, y^2-1-x^2, 1-\ x^2y^2$

6.2.2 బీజగణిత సమాసాల తీసివేత -

పూర్ణ సంఖ్యల తీసివేతను గూర్చి అరవ తరగతిలో

తెలుసుకున్నాం.

ఉదాహరణకు -

$$5-(-3)=5+3=8$$

అనగా a, b లు రెండు పూర్ణసంఖ్యలైనచో $\mathbf{a-b=a+(-b)}$

ఉదాహరణ 7

$8xyz \quad -5xyz$

సాధన -

$8xyz-(-5xyz)$

$=8xyz+5xyz \quad [-5xyz$ (యొక్క విలోమమును కూడిక చేయబడైను)

$=(8+5)xyz=13xyz$ (విభాగ న్యాయం)

ఉదాహరం-8

$2a+5b-3c$ నుండి $a+3b-2c$ ను తీసివేయుము.

సాధన -

అడువరుసపద్ధతి

$(2a+5b-3c)-(a+3b-2c)$

$=2a+5b-3c-a-3b+2c$ (ప్రతీ పదంయొక్క విలోమం)

$=2a-a+5b-3b-3c+2c$ (సజాతీయ పదాలు కుడిక)

$=(2-1)a+(5-3)b+\{(-3)+2\}c$ (సజాతి పదాల కూడిక)

$=a+2b-c$

రెండవపద్ధతి నిలువ వరుస పద్ధతి

$$\begin{array}{r} 2a+5b-3c \\ -a\ -3b+2c \\ \hline a\ +2b-c \end{array}$$

ఉదాహరణ 9

$3a-2b+c,\ 3b-5c+2a \quad c-a+2b$ లను కూడి అమొత్తం నుండి $4c-2a+2b$ ను తీసివెయండి.

సాధన -

$3a-2b+c,\ 3b-5c+2a$ మరియు $c-a+2b$

$=3a-2b+c+3b-5c+2a+c-a+2b$

$=3a+2a-a-2b+3b+2b+c+c-5c$

$=(3+2-1)a+\{(-2)+3+2\}b+(1+1-5)c$

$=4a+3b-3c$

ఇప్పుడు - $4a+3b-3c$ నుండి $4c-2a+2b$ ను తీసివేయండి.

$=(4a+3b-3c)-(4c-2a+2b)$

$=4a+3b-3c-4c+2a-2b$

$=4a+2a+3b-2b-3c-4c$

$=(4+2)a+(3-2)b+\{(-3)+(-4)\}c$

$=6a+b-7c$

జవాబు $=6a+b-7c$

అభ్యాసం 6.3

1. తీసివేయుము -

క) $-5y^2$ y^2 ఖ) $-12xy$ $6xy$ గ) $5mn$ $3nm$

ఘ) $3a^2b$ $-2a^2b$ ఙ) $-8xyz$ $7xyz$ చ) $-7xy$ $-8xy$

2. తీసివేయుము -

క) $5a+b$ $3a-2b$ ఖ) $5xy-4xyz-2xy$ $3xyz+5xy-2xy$

ఘ) $5p-q-2r$ $3p-2q+r$ ఙ) $-m^2+5mn+2n^2$ $4m^2-3mn+5n^2$

3. క) $2x$ నకు ఎంత కూడిన మొత్తం $5x$ అగును ?

ఖ) $7xy$ నకు ఎంత కూడిన మొత్తం $3xy$ అగును ?

గ) x^2+xy+y^2 నకు ఎంత కలిపిన మొత్తం $2x^2+3xy$ అగును?

ఘ) $8x^2y$ నుండి ఎంత తీసివేసిన $3x^2y$ వచ్చును.

ఙ) $2a+8b+10$ నుండి ఎంత తీసివేసిన $-3a+7b+16$ వచ్చును.

చ) $x^2-2xy+3y^2$ కంటె $-x^2-5xy-2y^2$ ఎంత ఎక్కువ ?

4. క) $2xy-zy-zx$, $2yz-zx+xy$ మొత్తం నుండి $xy-yz-zx$ ను తీసివేయబడిన వచ్చునది ఎంత ?

ఖ) $3x-y+11$, $-y-11$ ల మొత్తం $4x-3y+5$ కంటె ఎంత తక్కువ ?

గ) $2x+y-3z$, $x-y+z$ మొత్తం కంటె $5x-7y+z$ ఎంత ఎక్కువ ?

6.3 సమకరణాలు - పాట సాధన -

ఐదవ అధ్యాయంలో ఒకటిగాని అంతకంటె ఎక్కువ చలరాశులను తీసుకొని వేరువేరు బిజాయ సమాసాలను నిర్మంచిటకు తెలుసుకున్నాం. ఒక చలరాశి వివిధ సంఖ్య విలువలును సూచించునవి. అవి వేరు వేరు అక్కరాలు ద్వారా గుర్తించుబడునని తెలుసుకున్నాం సాధరణంగా x, y, z, l, m, n మొ అక్షరాల ద్వారా చలరాశులను సూచించబడును.

కింది తరగతిలో మనకు విధముగ ప్రశ్నలు అడగబడనని ఒక ప్రశ్నను వేరు రుపాలలో తెలియచేయుటకు ఒక ఉదాహరణను చూడండి.

మొదట ప్రశ్న - ఏ సంఖ్యకు 7 కలిపిన 11 వచ్చును.

రెండవ ప్రశ్న - శాళీలను పూరించుము ....తో 7 ను కూడిన మొత్తం 11 అగును.

మూడవ ప్రశ్న - $*+7=11$

($*$) గుర్తులో గల అంకె ఏది ?

మొజటి ప్రశ్నలో ఏ సంఖ్య, రెండవ ప్రశ్నలో ఖాళీ సూచన (..................గుర్తు) మూడవ ప్రశ్నలో ($*$) గుర్తులన్ని ఒక తెలయని సంఖ్యకు గుర్తులు ఇప్పుడు తెలియని సంఖ్యను మనం ద్వారా సూచిస్తు తిరిగి మూడవ ప్రశ్నను రాద్దం. ఇప్పుడు మూడవ ప్రశ్న యొక్క మరొక రూపం - $x+7=11$

అనగా ఈ ప్రశ్నను క్రింది విధంగా ప్రాయవచ్చును.

నాల్గవ ప్రశ్న - "$x+7=11$ అయినచో x విలువ ఎంత ?

ఇచ్చట బీజయ సరూపం $x+7$ ను మరొక రాశి 11 లో సమాసం అని చెపుబడినది. రెండు రాశులను సమానం అనే ఒక గుర్తు ఇది. దీనినే సమీకరణం అంటారు. సమీకరణంలో గల x ను సమికరణంలో చలరాశి అని అంటారు. మొదటి ప్రశ్నకు బివాడలను మనం క్రింది తరగతులో కింది విధంగా చెప్పబడినది.

నిర్ణయ సంఖ్య $=11-7=4$

ప్రశ్న 4 లలో గల సమికరణంలో చలరాశి x నకు 4 తీసుకున్నాచో అది కాస్తంవం అగును

$x+7=11, x$ స్థానంలో 4 ను తీసుకొనినచో $4+7=11 or 11=11$ అది వాస్తవం.

ఒక వేళ ఈ సమకరణంలో x స్థానంలో 5 ను తీసుకొనినచో ఏమగును?

$x+7=11$

$5+7=11$ (x స్థానంలో 5 ను తీసుకొనబడినది)

$\Rightarrow 12=11$

ఇది సర్రసదికాదు

ఈ విధంగా పరీక్షించి x స్థానంలో 4 మినలో లే టతర సంఖ్యల రావని మనం తెలుసుకొగలుగుతాం.

x విలువ 4 అయినచో సమకరణం సాధన అగును.

కాబట్టి $x+7=11$

$\therefore$ సమీకరణం సమాధానం $x=4$

క్రింది సమీకరణంలోని ఖాళీగదులను పూరించుము. జవాబు ఔను లేక

వరుస సంఖ్య	సమికరణం	విలువ	సమికరణం సాధన అగును/కాదా ?
1	$x+3=0$	$x=3$	
2	$x+3=5$	$x=2$	
3	$3x=1$	$x=1$	
4	$\frac{3}{x}=5$	$x=15$	
5	$5x=16-1$	$x=3$	
6	$\frac{m}{3}=2$	$m=6$	
7	$a-7=1$	$a=6$	
8	$a+3=2a$	$a=3$	

కింది పట్టికలో విషయాన్ని ఎడమ ప్రక్క దానికి సరైన గణిత సంకేతాన్ని కుడి ప్రక్కన రాయబడినది.

విషయం	గణిత సంకేతం
(A) 4 లో ను కూడిన 9 వచ్చును.	(1) $4+x=9$
(B) నుండి 7 తగ్గించినచో 6 అగును.	(2) $x-7=6$
(C) యొక్క 9 రెట్లు 12 లో సమానం.	(3) $9x=12$
(D) యొక్క 2 రెట్లు 6 కలిపినచో 18 అగును.	(4) $2y+6=18$
(E) యొక్క రెండు రెట్లు 6 కలిపినచో 18 అగును.	(5) $x+2b=15$

పై పట్టికలో కుడి ప్రక్కన గల సమికరణంలోని రెండురాశులు సమానంగా కలపు వీటిని ఒక్కొక్క సమికరణం అంటారు. మొదటి నాలుగు సమికరణాలలో ఒక్కొక్క చలరాశి లేక కలవు. వీటిని ఒకే చలరాశి గల సమికరణ అంటారు. (5) లో గల కమికరణ ను రెండు చల రాశులు గల సమికరణం అంటారు. ఒక సమికరణంలోని చలరాశి యొక్క అత్యధిక పరిమాణం 1 అయినచో దానిని సరళ లేక ఏకఘత సమీకరణ అంటారు. పై పట్టికలోని సమికరణాలన్ని ఏకఘత సమికరణాలే.

ఈ అధ్యాయంలో మనం కేవలం ఒకే చలరాశ ఏకఘత సమికరణాంను గుర్చి తెలుసుకుందాం.

- రెండు బిజయ సమాసల మధ్యగల సమానతను సమికరణం అంటారు.
- సమికరణంలో రెండు ప్రక్కలుంటాయి. ఎడమ ప్రక్క, కుడి ప్రక్క సమీకరణంలోని రెండు ప్రక్కలలో కనీసం ఒక ప్రక్కనందు చలరాశి ఉండుట తపునిసరి.

- సమీకరణంలో వున్న చలరాశుల అత్యధిక ఘాతంను అనుసరించి సమీకరణం పేర్లు ఉండును. అవి - ఏకఘాతీయ, ద్విఘాతీయ, మొదలగునవి.
- సమీకరణంలోని చలరాశుల సంఖ్యను అనుసరించి కూడి వాటికి పేర్లు కలవు. అవి ఒకే చలరాశి గలవి. రెండు చలరాశులు కలిపి మొదలగునవి.
- సమీకరణంలో లభించిన విలువను సమాధానం అంటారు. ఒకే చలరాశి గల ఏకఘాతీయ సమీకరణం, నకు ఒకే సమాధానం ఉండును.

అభ్యాసం 6.4

1. క్రింది సమీకరణాలలో ఒకే చలరాశి గల సరళరేఖ లేక ఏకఘాతీయ సమీకరణాలను వ్రాయండి.

(క) $2x + 3 = 7$ (ఖ) $y + 5 = x + 2$ (గ) $z + 2 = 7z - 4$

(ఘ) $2x + 7 = 5 + x$ (ఙ) $y - 7 = 5y - 8$ (చ) $xy - 5 = x + 3$

(ఛ) $x^2 - 3x = 2$ (జ) $2x - 7 = 8$

2. x ను ఒక చలరాశిగా తీసుకొని కింది వాటిని సమీకరణాలుగా మార్చండి.

క) ఒక సంఖ్య నుండి 3 తీసివేసినచో 7 మిగులును.

ఖ) 10 ఒక సంఖ్య యొక్క రెండు రెట్లు కంటె 4 తక్కువ.

గ) ఒక సంఖ్య యొక్క మూడువంతులలో ఒక వంతు 6 అగును.

ఘ) ఒక సంఖ్య 5 కంటె ఎంత ఎక్కువో 15 కంటె అంత ప్రక్కన.

ఙ) ఒక సంఖ్య యొక్క 6 వంతులలో 7 తీసివేస్తే 3 మిగులును.

చ) రమ ప్రస్తుత వయసు సంవత్సరాలు (i) 5 సంవత్సరాల తరువాత ఆమె వయిసు ఎంత ?

(ii) 3 సంవత్సరాలకు మూడు అమె వయుసు ఎంత ?

3. క్రింది సమీకరణాలను సాధరణ వాక్యాలలో మార్చి వ్రాయండి.

(క) $x - 5 = 9$ (ఖ) $5p = 20$

(గ) $3n + 7 = 1$ (ఘ) $x = -2$

4. క్రింది ప్రచనాలలోని చలరాశులను x గా తీసుకొని వాటిని సమీకరణాలుగా మర్చి వ్రాయండి.

క) ఏ సంఖ్య యొక్క రెండు వంతులు 16 అగును ?

ఖ) ఏ సంఖ్య నుండి 7 తీసివేస్తే 12 విగులును ?

గ) ఏ సంఖ్య యొక్క మూడవ వంతు 5 లో సమనం.

ఘ) ఏ సంఖ్యలో నాల్గవ 5 వంతు 5 అగును.

ఙ) ఏ సంఖ్య కంటె 8 అధికమైనచో అది 15 అగును.

5. క్రింది సూచనలను ఆధాంగా చేసుకొని సమీకరణాలను వ్రాయండి.

క) రోజీ నాన్నగారి వయస్సు 49 సం॥ నాన్నగారి వయసు రోజీ వయస్సు యొక్క మూడు రెట్ల కంటె 4 సం॥ ఎక్కువ. రోజీ వయసును సం॥ గా తీసుకొండి.

ఖ) ఇర్ఫాన్ వద్ద 37 మార్బల్స్ కలవు. పరిమిళ వద్ద గల మార్బుల్ యొక్క 5 రెట్లు కంటె 7 అధికంగా ఇర్ఫాన్ వద్ద కలవు. అయిన పరిమిళ వద్ద ఎన్ని మార్బల్స్ కలవు ?

6.4 సమీకరణాలను సాధించు పద్ధతి -

ఇంతకు ముందు సమీకరణం, దాని సాధన గూర్చి తెలుసుకున్నాం. వాటిని గుర్తు చేసుకుందాం.

$4x+5=17$ ఒక సమీకరణం. దానిలోని చలరాశి యొక్క విలువను సమికరణం యొక్క సాధన అంటారు ఏ సంఖ్య యొక్క 4 రెట్లును 5 అధికం అయినచో అది 17 తో సమానమగును. అ సంఖ్యను తెలుసుకుందాం రండి. అందు కొరకు క్రింది ప్రణాళికను అనుసరించాలి.

ను 0 అనుకుందాం.

$4x+5=4\times0+5=0+5=5$

ఒక వేళ x ను 1 అనుకున్నాచో - $4x+5=4\times1+5=4+5=9$

x ను 2 అనుకుందాం అవుడు - $4x+5=4\times 2+5=13$

x విలువ 3 అయినచో - $4x+5=4\times3+5=12+5=17$

ఈ విధంగా $4x+5=17$ సమీకరణం యొక్క సమాధానం 3 అగును.

$\therefore 4x+5=17$

ఉదాహరణ-10

$x-7=-3$ సాధించండి.

సాధన -

అనునది ఇచ్చట ఇచ్చట x - 7 = 3 ఒక సమికరణం సమికరణం ఎడమ వైపు x - 7 కుడివైపు 3 ఇప్పుడు సమీకరణంలోని విలువను వరుసగా 0, 1, 2... మొదలైన విలువలను తీసుకొని ఎడమ వైపు భాగాన్ని సూక్షికరించాలి. ఏ విలువలో ఎడమ వైపు కుడివైపు విలువలు సమానం అగునో చుడండి.

సమికరణం	చలరాశి విలువ	ఎడమవైపు	కుడివైపు
$x-7=-3$	0	-7	-3
	1	-6	-3
	2	-5	-3
	3	-4	-3
	4	-3	-3

ఇచ్చట విలువ   అయినచో సమికరణంలోని ఎడమ భాగం, కుడిభాగం సమానం అందుచేత   అగును.

మరొక ఉదాహరణలో ఐదే ప్రణాళికలో చేద్దాం రండి.

మీకు తెలుసా ?

సమీకరణంను సాధించు చల రాశి విలువే సమీకరణా సమాధానం అగును.

ఉదాహరణ - 11

$2y+7=1-y$ ను సాధించండి.

సాధన

$2y+7=1-y$ సమికరణంలో రెండుప్రక్కలందు చలరాశి y కలదు. y ను వివిధ విలువలను ఇచ్చి సమికరణంలోని ఎడమ భాగాన్ని కుడి భాగాన్ని సూక్షికరణంచిలి. y యొక్క ఏ విలువలో సమికరణం సాధిచబడుతూందో చూద్దాం.

సమీకరణం	చలరాశి y విలువ	ఎడమ వైపు	కుడివైపు
$2y+7=1-y$	0	7	1
	1	9	0
	-1	5	2
	-2	3	3

పట్టికలో y కొరకు తీసుకున్న సంఖ్యలను చూసి రోశణ మొదట ఉదాహరణలో మనం 0,1,2,3..... మొదలైన విలువలను తీసుకలనోం. ఇచ్చట y విలువలను 1 తరువత -1 ఎఌదుకు తీసుకున్నాం.

అమె ప్రక్కన వాళ్ల పెద్దక్క సీమ ఉండెను. అమె విలువ 0 తీసుకున్నా మో ఎడమ పై పు కుడి ప్రక్క లందు వచ్చే విలువల భేదం ఎంతో చెప్పండి ?

రోషణ లెక్కించి $7-1=6$ అన్నది.

తిరిగి విలువ 1 తీసుకొవడం వలన ఎడమ, కుడి వైపులందు వచ్చిన విలువల భేదం ఎంత అవుతుంది ? రోషతీ మళ్ళి లెక్కించి 9-0 9 అనినది. ఇపుడు సీమ రెండు ప్రక్కలందు వచ్చే విలువల భేదం అధికం కావడం కనిపిస్తుంది. ఒక వేల విలువ 2 తీసుకున్నచో రూ భేదం ఇంకా పెరుగుతుంది తీనిని పరిక్షచేసి చెప్పవచ్చును. కావున విలువను ధనాత్మక సంఖ్యలకు భదులు ఋణాత్మక సంఖ్యలనే తీసుకొకలేను.

ఇప్పుడు రోషణకు 1 తరువాత -1 ఎందుకు తీసుకోవలెనో అర్థం అయినది. ఇచ్చట y విలువ -2 తీసుకున్నాచో సమీకరణం రెండువైపులందు గల విలువలు సమానం అగును. అనగా y విలువ -2 అయినచో సమికరణం సాధించబడినది.

$\therefore$ సమికరణం సమాధానం $y = -2$

దీనికి అధిక సమయం పడుతుంది. సమికరణం యొక్క విలువ పెద్ద సంఖ్య అయినచో ఈ పద్ధతిలో సమాధానం పొందుటకు అధిక సమయం కూడా పడుతుంది. అందుచేత సమాధానికి ఒక సరళమైన ప్రణాలికను అవలంబించాలిట. దానిని గూర్చి తెలుసుకుందాం.

సమికరణాన్ని ఒక సామాన్య త్రాసులో సరిపోల్చినచ్చో దీని రెండు పోలియుండును. సమానం (=) గుర్తునకు ఎడమ వైపునగల భాగం, ఎడమ పణింలోని గుర్తు కుండి వైపులోని భాగం కుడి పణింలోని పదార్ధాలను సరిపోలును. సమానం (=) గుర్తు రెండింటి సమానతను సూచించినం.

ఎడమ పళింలోని గుర్తు, కుడి పళ్ళింలోని పదార్ధాలు రెండుంటి బరువు సమానమైనచో త్రాసురండం భుమికి సమాంతరంగా ఉంటుంది. అపుడు త్రాసు సమతుల్య స్థితిలోనే ఉందని అర్ధాం. ఎడమ వైపున అధిక గుళ్ళవేస్ కుడీవైపు అందుకు తగిన పదార్ధాలు తీసినచో వ్రాసు సమతళస్థితిలో ఉంటుంది. అదే విధంగా సమాన బరువు గల గుళ్ళను, పదార్ధాలను త్రాసునుండి తీసివేసిన దాని స్థితిలో మార్పురాదు.

ఒక సమికరణం కూడా త్రాసును పోలింటుఇది. అందుచేత సమీకరణం దిగమంలో కింది నియమలను పాటించవలసి ఉంటుంది.

క) ఒక సమీకరణంలోని రెండు వైపులందు సమాన సంఖ్యను కూడినచో సమానత్వంలో మార్పు రాదు స్రంకలన నియమం)

$x+3=7$ అయినచో $x+3+5=7+5$

ఖ) ఒక సమికరణంలోని రెండు ప్రక్కల నుండి సమాన సంఖ్యను తీసివేసినచో సమాన మార్పురాదు. (వ్యవకలన నియమం)

$3x+7=10$ అయినచో $3x+7-7=10-7$ అనగా $3x=3$

గ) ఒక సమికరణంలోని రెండు వైపులను ఒక సమాన సంఖ్యచే గుణించినచో సమానతల మార్పురాదు. (గుణకార నియమం) $\frac{x}{2}=5$ అయినచో $\frac{x}{2}\times 4=5\times 4$

$2x=20$

ఘ) ఒక సమికరణంలోని రెండువైపులను ఒక సమాన సంఖ్యచే భాగించినచో సమానతల మార్పు రాదు

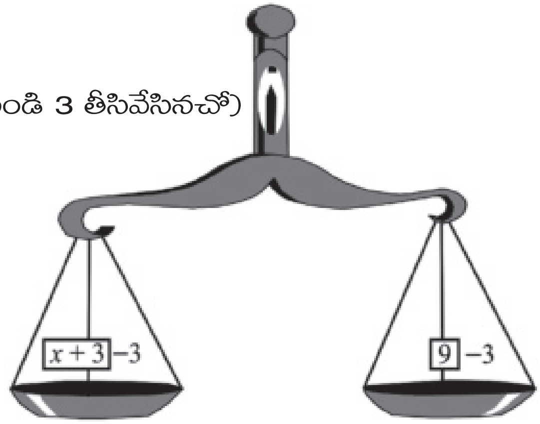
$3=20$, $\frac{x}{2}\times 4=5\times 4$

$x=7$

ఉదాహరణ - 12

సమాధానము చేయండి : $x+3=9$

(ఇరువైద్యల నుండి 3 తీసివేసినచో)



సమాధానము

$$x+3=9$$

లేద $$x+3-3=9-3$$

$$x=6$$

$$\therefore \quad x=6$$

చూసి చెప్పండి -
పైనున్న సమీకరణం నుండి కేవలము పడమవైపు నుండి 3 ను తీసివేసినచో సమీకరణం సమానమగునా ? ఎందు చేత ?

ఈ సమాధాన ప్రక్రియను చూసి రేఖ తీన స్నేహితుడు విల్లుని అడిగెను్యా సమీకరణము యొక్క ఇవువైదుల నుండి 3 ను తీసివేయ వలెనని ఎట్లు తెలుసుకొంటేరి ?

సమీకరణం ఎడమ వైపులో గల అజ్ఞాతరాశి x లో +3 గలదు. నునకు విలువ అవసరము కాబట్టి ఎడమ వైపులో కేవలము ను ఉంచవలెను. అందువలన ఎడమ వైపున గల x తో కలుపబడిన 3 ను తీసివేయవలెను. కలపబడిన 3ను తీసివేయుటకై 3 ను తీసి వేయవలెను.

దీనిని వినిరేఖ ఇట్లు చెప్పెను. ఒకనీళ ఎడమవైపులో x-3 ఉన్న ఎడల మనము ఇరువైపులు ను కలిసి ఉ ంటెయి.

చూసి చెప్పండి-
సమీకరణం యొక్క ఎడమ వైపున ఒకవేళ $2x$ ఉన్నచో సమాధానము ఏమి చేసి ఉండేవాళ్లం?

ఉదాహరణ - 12

సమాధానము చేయండి : $x-3=7$

సమాధానము $$x-3=7$$

$$x-3+3=7+3$$

$$x=10$$

చూసి చెప్పండి -
ఉదాహరణ 13 లో ఎడమవైపులో గల 'x'లో 3 ను ఎందుచే కలుపబడినది ?

స్వచ్ఛత పరీక్ష :

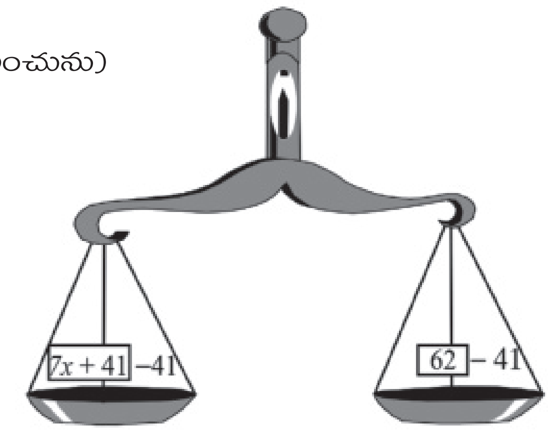
=10 అయిన, సమీకరణం ఎడమ వైపు $= x-3=10-3=7=$ కుడివైపు

$\therefore$ ఎడమ వైపు = కుడివైపు

ఉదాహరణ -14

సాధించండి : $7x+41=62$

సాధన :



$7x+41=62$

లేక $7x+41-41=62-41$

(రెండువైపుల నుండి 41 ని తీసిన xx యొక్క విలువ లభించును)

లేక $7x+0=21$

లేక $7x=21$

లేక $\frac{7x}{7}=\frac{21}{7}$ (రెండువైపుల 7 చే భాగించిన)

లేక $x=3$

స్వచ్ఛత పరీక్ష :- x విలువ ఎడమ వైపు 3 తీసుకొన్నచో

ఎడమ వైపు $= 7x+41=62$

లేక $7\times 3+41=21+41=62=$ కుడివైపు

$\therefore$ ఎడమ వైపు = కుడివైపు

ఉదాహరణ 15

సాధించండి $: 2x-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

సాధన: $2x-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

లేక $2x-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$

లేక $2x=\frac{2+1}{3}=\frac{3}{3}$

లేక $2x=1$

లేక $x=\frac{1}{2}$

స్వచ్ఛత పరీక్ష :-

ఎడమ వైపు $= 2x-\frac{1}{3}$

కుడివైపు

ఎడమప్రక్క = కుడివైపు

గుర్తుంచుకొండి -

సమీకరణం ఎడమ వైపు చలరాశి (x, y లేక ఏదైనా) గల పదంలో కలిసియున్న నియమాన్ని తీసివేయునప్పుడు కూడిక నియమాన్ని పాటించవలెను.

ఎడమ వైపు కేవలం రాశి x గల మనం ఉన్నప్పుడు దాని గుణకంగా ఉన్న సంఖ్యను తీసివేయుటకై అసంఖ్య x ను గుణిస్తనచో భాగహర నియమాన్ని భాగిస్తున్నచో గుణకారనియమాన్ని పాటించవలెను.

క)

(ఇచ్చట ఎడమవైపు -10 ఉండుట వలన దానిని తోలగించు ఒక్ర ఎడమవైపు +10 ను చేర్చ వలెను)

దాని వలన ఎడమవైపు -10 ను తొలగించుటకై ఇరువైపులావ 10 చేర్చడమైనది.

ఖ)

పై విధంగానే ఎడమవైపున గల 12 ను తలగించుటకై ఇరుమైపు లా 12 ను తీసివేయాలి.

గ) విషయంలో ఎడమ వైపు 3 ను తోలగించుటకై ఇడమవైపులా 3 చే భాగించవలెను.

ఎడమ వైపు ను గుణిస్తున్న 3 కుడివైపు భాగహారం చేయబడినది.

$\frac{x}{5}=2$ విషయంలో ఎడమ వైపు 5 ను తొలగించుటకై ఇరువైపులో 5

`

$$\frac{x}{5}=2$$

$$\frac{x}{5}\times 5=2\times 5$$

$$x=2\times 5=10$$

ఇచ్చట ఎడమ వైపున గల యొక్క విభజకం 5 ను తొలగించుటకై మనం ఇరువైపు లందు 5 చే గుణించం. దాని వలన.

$-\frac{x}{5}=2$ లేక

$$x=2\times 5=10$$

ఎడమ వైపున తొలగించిన సంఖ్య నుండి. కుడివైపుకు వచ్చింది. దీన్ని పార్శ్వపరివర్తన ప్రక్రియ అంటారు. మనం సమీకరణాన్ని సాధించునపుడు సంకలన నియం, వ్యవకలన నియమం ప్రయోగించకుండానే పార్శ్వ పరివర్తన పద్ధతిలో సమికరణాన్ని సాధించవలెను.

ఉదాహరణ 16

: $4m+12=20$ ను సాధించండి.

సాధన

$4m+12=20$

$4m=20-12$ (12 యొక్క పార్శ్వ పరివర్తనం)

$4m=8$ (4 యొక్క పార్శ్వ పరివర్తనం)

$m=\frac{8}{4}$ లేక $m=2$

$\therefore$ సమీకరణం యొక్క $m=2$ సమాధానం

మీకు తెలుసా ?

ఒక రాశిని పార్శ్వపరివర్తనం చేయనప్పుడు దాని గుర్తు మారుతుంది.

ఉదాహరణ 17

: $2p-1=p+5$ ను సాధించండి.

సాధన -

$2p-1=p+5$

$2p-p=1+5$ (ఇచ్చట -1 పార్శ్వ పరివర్తనం వల్ల కుడి వైపుకు పార్శ్వ

$p=6$ (జవాబు)

పరివర్తనం వలన ఎడమ వైపుకు చేరును. ఇప్పుడు దానికి వ్యతిరేక పరిస్థితులను పరిశీలిందాం.

వల్ల బల్ల పై $x=4$ అని వ్రాసింది.

దీనిని పరిశీలించిన కమల $x+5=9$ అని వ్రాసింది.

సుబ్రత్ హఠాత్తుగా నిలబడి $3x+2=14$ అని వ్రాశాడు.

కమల, సుబ్రత్ లు వ్రాసిన సమీకరణాలు రెండింటిని సాధించండి. దీవళ నల్లబల్ల తీసుకొని మరిరెండు సమీకరణాలను సాధించండి.

ప్రయత్నించండి.

- $a=6$ తీసుకొనుము.
- దీనిలో నాలుగు వేరువేరు సమీకరణాలను తయారు చేయుము.
- మీరు తయారు చేసిన నాలుగు సమీకరణాలను మీ తరగతిలోని నలుగురు పిల్లలకు ఇచ్చ వాటిని సాధరంచమని చెప్పండి.
- వారికి a విలువ ఎంత వచ్చింది.
- వారికి $a=6$ వచ్చిందా ?

అభ్యాసం 6.5

1. ప్రతీ సమీకరణం కొరకు బ్రాకెట్లులో ఇచ్చిన జవాబులలో సరైన దానిని ఎన్నుకొని వ్రాయండి.

క) $3x-7=2$ [0, 1, 2, 3]

ఖ) $2y+3=y+2$ [0, 1, −1, 2]

గ) $\frac{z}{5}=3$ [12, 15, 18, 9]

ఘ) $\frac{y}{5}-2=1$ [4, 8, 12, 15]

ఙ) $30-5x=x-6$ [2, 5, 6, −6]

2. చలరాశి కొరకు వివిధ విలువలను తీసుకొని సాధింతి ఋజువు చేయండి.

క) $2x+3=13$ ఖ) $3-x=x-5$

గ) $4x=20$ ఘ) $3y-2=7$

3. సమీకరణంలో సంకలన, వ్యవకలన, గుణకార, భాగాహారాలలో సరైన నయమం వినియోగించుకొని సమీకరణాలను సాధించండి ?

క) $x+5=2$ ఖ) $z-4=0$

గ) $y-3=2-y$ ఘ) $5x-3=2$

4. పార్శ్వ పరివర్తన ప్రక్రియను ఉపయోగించి సమీకరణాలను సాధించండి.

క) $3x-2=46$ ఖ) $5m+7=17$ గ) $2q+6=12$

ఘ) $\frac{2a}{3}=6$ ఙ) $\frac{3p}{3}=6$ చ) $2q+7=q+9$

పయత్నించండి -

నీ వయసు ఎంత ?

- నీ వయసు ఎవ్వరితో కొంత అనుకొని దానికి 5 కూడండి.
- వచ్చిన మొత్తానికి 2 చే గుణించండి.
- లబ్ధం నుండి 10 ను తీసువేయండి.
- వచ్చిన సంఖ్యలో నీవు ఊహించిన వయసు సంఖ్య తీసివేయుము.
- ఇప్పుడు నీకు వచ్చిన సంఖ్య నీవు అనుకున్న సంఖ్య అయిందా ?

దీనిని ఎలా తెలుసుకొగలరు. దీనిని క్రింది విధంగా వ్రాయండి.

నీ వయసు అనుకొనుము.

వయసునకు 5 ను కుడగా $=x+5$

మొత్తానికి 2 చే గుణించగా $=2(x+5)=2x+10$

దానినుండి 10 ను తీసివేయగా $=2x+10-10=2x$

నీవు అనుకున్న నీ వయసు వచ్చింది. $2x-x=x$

ఈ విధంగా మనం అనేక సమస్యలను తయారుచేసి సాధించవచ్చు.

ఏదైనా ఒక సంఖ్యను 2 చే గుణించి 3 కలిపిన 5 వచ్చును.

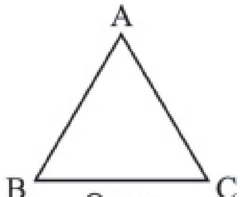
$,2x+3=5$

ఇటువంటి సమీకరణాలు అనేకం చేయవచ్చును.

త్రిభుజ ధర్మాలు

7.1 ఉపోద్ఘాతం -

A, B, C లు ఒకే సరళరేఖలో లేని మూడు బిందువులు అయినచో $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ లు రేఖ ఖండాలు మాడింది ద్వారా ఏర్పడిన బొమ్మ ఒక త్రిభుజం అగును. దానిని ΔABC (పటం 7.1) త్రిభుజం ఇది ఒక సంవృత పటం.



పటం 7.1

A, B, C లను ΔABC యొక్క శీర్షబిందువులు అందురు.

$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ లు ΔABC యొక్క భుజాలు అందురు.

$\angle A, \angle B, \angle C$ లు ΔABC యొక్క మూడు కోణాలు.

$\angle A$ కు ఎదురుగా ఉన్న భుజా $\overline{BC}, \overline{BC}$ భుజానికి ఎటురుగా ఉన్న కోణం $\angle A$ అయింది.

క) అదేవిధంగా $\angle B, \angle C$ లను ఎదురుగా ఉన్న భుజాలను వర్తించండి.

ఖ) xyz పేరు గల ఒక త్రీభుజాన్ని నిర్మించాలి. దాని $\overline{xy}, \overline{yz}, \overline{zx}$ భుజాలకు ఎదురుగా నున్న కోణాలన వ్రాయుము.

భుజలు పొడవులను అనుసరించి త్రిభుజలు మూడు రకాలు

(క) సమబాహు త్రిభుజ (ఖ) సమద్విబాహుత్రిభుజ (గ) విషమ బాహు త్రిభుజ

కోణల అనుసరించి త్రిభుజాలు మూడు రకాలు

(క అల్పకోణ త్రిభుజ (ఖ) అధిక కోణ త్రిభుజ (గ) లంబకోణ త్రిభుజాలు

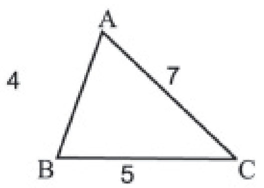
అభ్యాసం 7.1

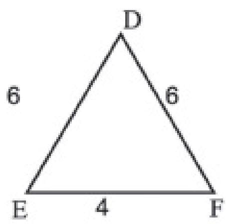
1. (క) ΔPQR లో $\overline{QR}$ నకు ఎదురుగా ఉన్న కోణం పేరు వ్రాయండి.

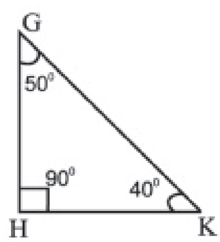
   (ఖ) ΔDEF లో $\angle E$ నకు ఎదురుగా ఉన్న భుజ పేరు వ్రాయండి.

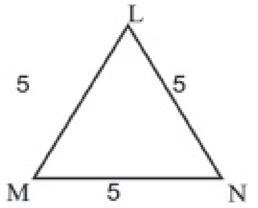
   (గ) ΔKLM లో M శీర్షమునకు ఎదురుగా నున్న భుజం పేరు వ్రాయండి.

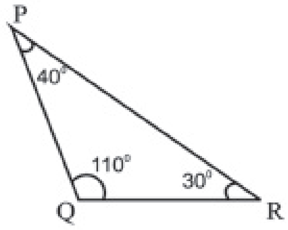
2. క్రింది త్రిభుజలలో భుజాల పొడవులు, కోణాల పరిమాణం ఇవబడినది. వాటిని చూసి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి.

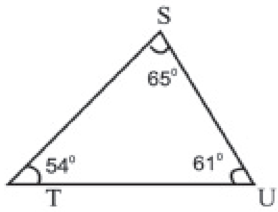










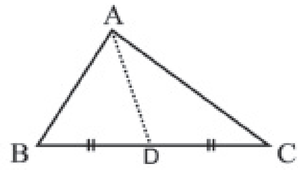


సంబంధించిన త్రిభుజా పేరు వ్రాయండి.

క)	విషమబాహు త్రిభుజ	ఖ)	సమద్విబాహు త్రిభుజ	(గ)	సమబాహు త్రిభుజ
(ఘ)	లంబకోణ త్రిభుజ	(ఙ)	అధికకోణ త్రిభుజ	(చ)	అల్పకోణ త్రిభుజ

7.2. త్రిభుజమునకు సంబంధించిన విభిన్న స్వతంత్ర రేఖా ఖండాలు.

క) త్రిభుజ మధ్య గత రేఖ -



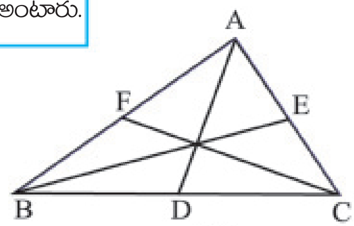
7.2

ఘటం 7.2 లో గల ΔABC లో $\overline{BC}$ భుజాన్ని చూడండి.

$\overline{BC}$ భుజం మధ్య బిందువు D. $\overline{BC}$ భుజానికి ఎదురుగా నున్న శీర్షం $A, \overline{AD}$ ను ΔABC యొక్క మధ్యను గలరేఖ అంటాయి.

అందుచేత

> త్రిభుజంలోని ఒక భుజం యొక్క మధ్య బిందువు ఆ భుజం యొక్క ఎదురుగా ఉన్న శీర్ష బిందువులను కలువు రేఖ ఖండమును ఆ త్రిభుజం యొక్క మధ్యగతరేఖ అంటారు.



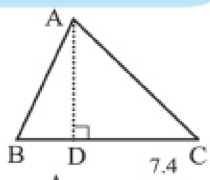
7.3

ఘటం 7.2 లో నిర్మించిన మధ్యమం $\overline{BC}$ యొక్క మధ్య గతరేఖ అగును. $\overline{CA}, \overline{AB}$ లు మధ్యబిందువులను తీసుకొని మరి రెండు మధ్యములను నిర్మించవచ్చు అది ఘటంలో చూపబడినవి.

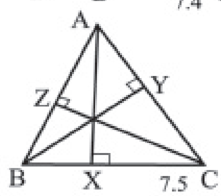
ప్రయత్నించండి. :

- ఒక త్రిభుజన్ని నిర్మించి దానికి DEF అని పేరుపెట్టండి.
- ΔDEF యొక్క భుజం $\overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FD}$ మధ్య బిందువులను గుర్తించండి.ఆ మూడు మధ్య బిందువులను K, L, M అని పేరు పెట్టండి.
- $\overline{KF}, \overline{LD}, \overline{ME}$ మూడు మధ్యమూలను నిర్మించండి $\overline{KF}, \overline{LD}$ ల ఖండని బిందువు మధ్యమము పైన ఉన్నాదా ? వెలుపవ ఉన్నదా? చూడండి? దానిని బట్టి ఏమి గమనించారు. $\overline{KF}, \overline{LD}$ ల ఖండన బిందువు $\overline{ME}$ పై ఉన్నదని మీరు గుర్తించగలుగుతారు. అనగా మూడు మధ్యములు ఒకే బిందువు మీదుగా పావును అని తెలుస్తుంది.

ఖ) త్రిభుజం ఎత్తు (ఉన్నతి)



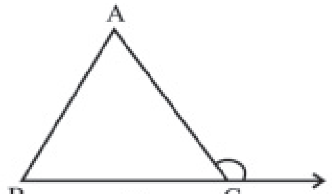
ఘటం 7.4 లో గల ΔABC యొక్క శీర్ష బిందువు A నుండి $\overline{BC}$ పై $\overline{AD}$ లంబం గయ బడినది. $\overline{AD}$ ను ΔABC యొక్క $\overline{BC}$ భుజంపై గీచిన లంబం అందురు. $\overline{AD}$ పొడవును ΔABC యొక్క $\overline{BC}$ పై గల ఎత్తు అందురు. శీర్ష బిందువు B నుండి $\overline{AC}$ భుజంపైన C నుండి $\overline{AB}$ లపైకి లంబంలు గీయబడినది.



ప్రయత్నించండి :

- Δ DEF ను నిర్మించండి.
- సెటోస్కేయకి సహాయంతో D బిందువు నుండి $\overline{EF}$ పై లంబా గీయండి. లంబ పాడవు ను x అనుకొనుము.
- అదే విధంగా E బిందువునుండి $\overline{DF}$ పై లంబం నిర్మించండి. ఈ లంబ పాడమును Y అనుము. F
- బిందువు నుండి $\overline{DE}$ పై లంబం నిర్మించంజి. ఈ లంబ పోడమును Z అనుకొనుము. ఇప్పుడు ΔDEF లో $\overline{EF}$ పై లంబం $\overline{DX}$ పై లంబ $\overline{FD}$ పై లంబ $\overline{FZ}$ లు లభించాయి.
- DX, EY, FZ మూడు లంబాలు ఒకే బిందువు వద్ద ఖండించుకొనుచున్నాయా లేక వేరు వేరు బిందువుల వద్ద ఖండించుకొనుచూన్నాయా? చూడండి. లంబాలన్ని పరస్పరం ఒకే బిందువు వద్ద ఖండించుకొనుటను మీరు చూడగలుగుతారా?

7.3 త్రిభుజం యొక్క బాహు కోణం దాని ధర్మాలు ?

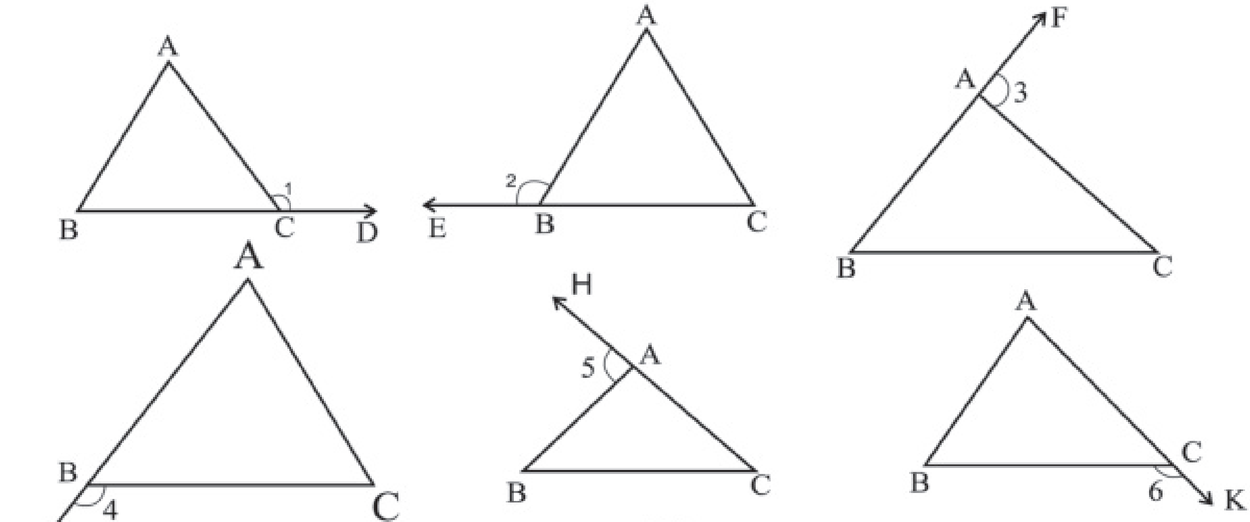

7.6

త్రిభుజంలో మూడు కోణాలు ఉంటాయి. అనువిషయం మీకు తెలుసు.. త్రిభుజంలోని ప్రతీ కోణంను త్రిభుజం యొక్క అంతరకోణం అయిన పటం 7.6 లో గల ΔABC ను చూడండి. $\overline{BC}$ భుజం $\overline{BD}$ లో ఒక భాగాంగా ఉన్నట్లు $\overline{BD}$ కరణాన్ని గీయండి. $\overline{CD}, \overline{CA}$ ల వల్ల ఏ కోణం ఏర్పడిందో చెప్పండి. ఏర్పడిన కోణం $\angle ACD$ అవుతుంది.

$\angle ACD$ ను ΔABC యొక్క ఒక బాహు కోణం అంటారు. ఇటువంటి ΔABC కు ఏన్ని భుజాకోణాలు కలవు ?

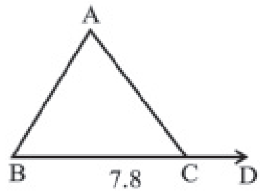
క్రింది పటంలోను చూడండి.

> మీకు తెలుసా ?
> $\overline{CD}$ ను $\overline{BC}$ యొక్క పొడిగించిన భాగం అనికూడ అంటారు. $\overline{BC}$ యొక్క పొడిగించిన భాగం $\overline{CD}$ లో $\overline{AC}$ భుజంపై బాహు కోణం $\angle ACD$ కోణం ఏర్పడిందని చెప్పవచ్చును.


7.7

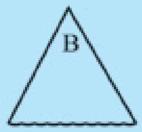
ΔABC యొక్క ప్రతి శీర్షము వద్ద రండ,ట హాగు కోణాలు ఏర్పడగలవు.

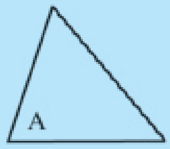
ఫటం 7.8 లో ΔABC యొక్క ఒక భాహ్యకోణం $\angle ACD$ మిగిలిన రెండు అతరకోణాలుయ $\angle BAC, \angle ABC$ లను హాగుతోణం $\angle ACD$ యొక్క అంతరాభిముఖ కోణాలు అంటారు.

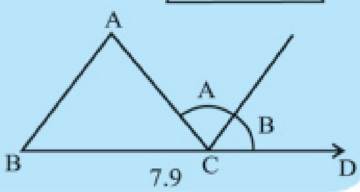


పయత్నించండి. :

- ఒక ట్రేసింగ్ కాగితాన్ని తీసుకొని ΔABC పై ఉంచాండి. $\angle ABC, \angle BAC$ ల నీకలును గీయండి. ట్రేసింగ్ కాగితం లేకుంటే సామాన్య కాగితాన్ని వాడవచ్చు.
- $\angle ABC, \angle BAC$ నకలు బొమ్మ అంచులను కత్తిరించండి. రెండు కోణాలను వేరు వేరుగా తీసుకొండి. ప్రక్కన ఫటం ఆకారాలను పొందగలవు.
- ΔABC యొక్క C బిందువు వద్ద $\overline{CA}$ లో కత్తిరించిన $\angle A$ ఆకారం యొక్క ఒక అంచును ఉంచండి.
- $\overline{CD}$ లో $\angle B$ అకారం యొక్క ఒక అంచును ఉంచండి. (ఫటం 7.9)
- ఇప్పుడు $\angle A, \angle B$ ల మిగిలిన రెండు అంచులను పరస్పరం కలపండి. దీని వల్ల మరేమి గమనించారో వ్రాయండి.







ప్రయత్నించండి :

- మీ నోట్ పూస్తకంలో ΔABC ను నిర్మించండి.
- $\overline{BD}$ ను నిర్మించండి. అందులో $\overline{BC}$ భుజం ఒక భాగములు ఉండవలెను. భాహ్యకోణం $\angle ACD$ ఏర్పడును.
- $\angle A, \angle B$ భాహ్యకోణం, $\angle ACD$ లను కోణమణిని సహాయంతో కొలవండి
- $M\angle A + M\angle B$ ఎంతో కనుగొనండి.
- ఆ మొత్తంలో $M\angle ACD$ కు సంబంధం ఏమిటి.
- పై ప్రయోగం వలన ఏమి తెలుసుకున్నారు.

ఒక త్రిభుజంలో ఒక బాహ్య కోణం పరిమాణం దాని రెండు అంతర దూర కోణాల మొత్తానికి సమానం.

1. Δ ABC యొక్క ప్రతీ శీర్షము వద్ద ఎన్ని భాహ్య కోణాలు నిర్మించగలం.
2. ΔABC యొక్క శీర్షము A వద్ద రెండు భాహ్య కోణాలు నిర్మించండి. ఆరెండుంటి పరిమాణం మధ్యలో ఏ విధమైన సంబంధం కలదు కారణాంతో జవాబు వ్రాయండి.
3. ఒక త్రభిజంలోని ఒక భాహ్యకోణ పరిమాణం దాని అసన్ని అంతరకోణాల పరిమాణంతో ఏ విధమైన సంబంధం కలిగియున్నది.

ఉదాహరణ - 1

ప్రక్క ఫటం ΔABCలో ఒక బాహ్యకోణం $\angle ABD$ నిర్మించబడినది.

$m\angle ABD = 100^0, m\angle A = x^0$ $m\angle C=35^0$ అయిన x^0 విలువ ఎంత ?

ఉదాహరణ - 1

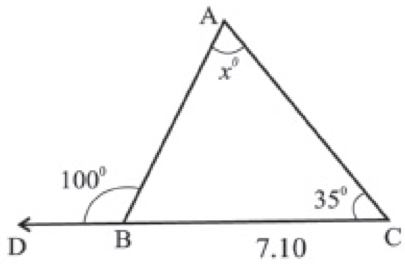
$\angle ABD$ ఒక బాహ్యకోణం

కాబట్టి $m\angle ABD = m\angle A + m\angle c$

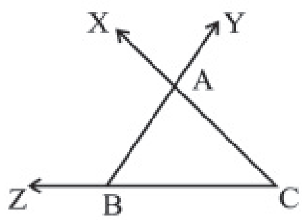
లేక $100^0 = x^0 + 35^0$

లేక $100^0 - 35^0 = x^0$

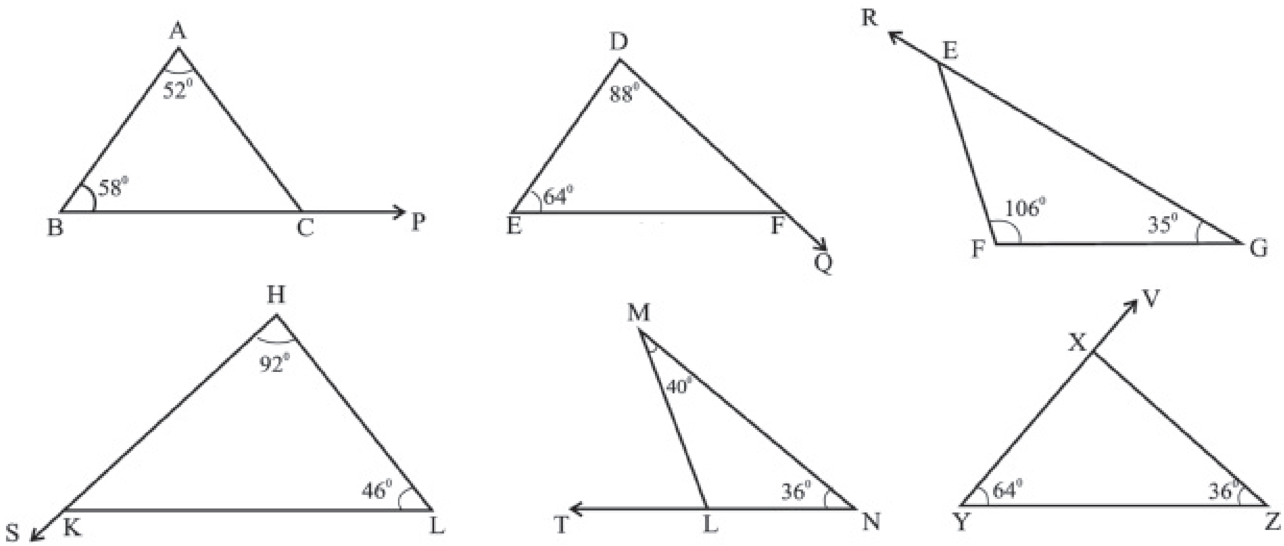
$x = 65^0$



అభ్యాసం 7.2

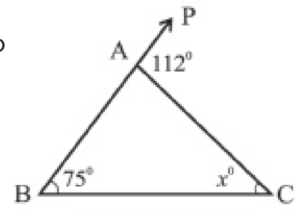


1. ప్రక్క ఫటంలో బాహ్యకోణాల పేర్లు వ్రాయండి.
2. ఒక త్రిభుజంలో మొత్తం ఎన్ని బాహ్యకోణాలు ఉంటాయి ?
3. కింది త్రిభుజల బొమ్మలలో ప్రతీ త్రిభుజంలోని రెండేసి కోణాల పరిమాణం ఇవ్వడమయ్యింది. ఒక బాహ్య కోణం ఇవ్వడమయింది ఆ బాహ్య పరిమాణం కనుగొనండి.



4. ప్రక్కన గల బొమ్మలోని ΔABC లో $\angle B$ బాహ్యకోణం $\angle PAC$ యొక్క పరిమాణం వరుసగా $75^0,112^0$

   $\angle C$ పరిమాణం x^0 లో సూచించడమయినది. x విలువను కనుగొనండి.



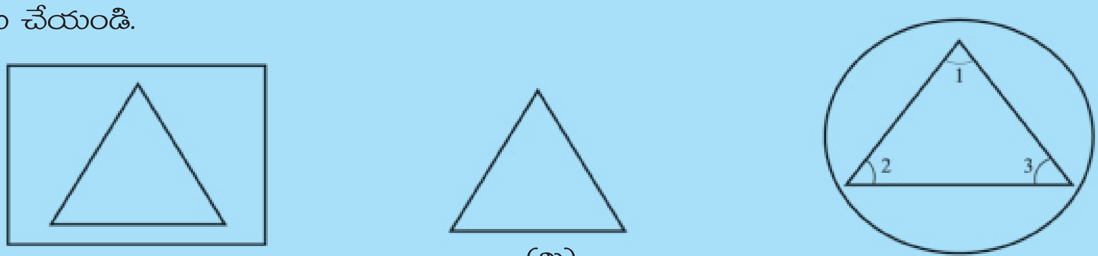
5. ΔABC లో $\angle B$ యొక్క మరిమాణం $\angle C$ యొక్క పరిమాణంనకు రెండు వంతులు. ఈ త్రిభుజంలో A వద్ద నిర్మించిన ఒక బాహ్యకోణం పరిమాణం 114^0 అయినచో త్రిభుజంలోని ఒక్కొక్క కోణ పరిమాణం ఎంత ?

6. ΔABC లో $AC = BC$ బాహ్యకోణం $\angle ACP$ పరిమాణం 160^0 అయినచో $\angle B, \angle A$ ల పరిమాణం ఎంత ?

7.4 త్రిభుజం యొక్క కోణములకు సంబంధించిన ధర్మాలు -

ప్రయత్నించండి :

- ఒక కాగితాన్ని తీసుకొని దానిపై ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి. దాని భుజాలను కత్తిరించి త్రిభుజ ఆకారాన్ని వేరు చేయండి.



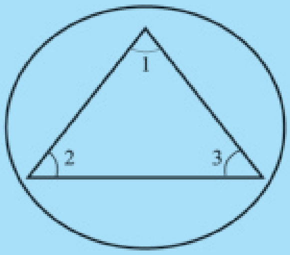
(క) కాగితంపై గీసిన భుజము

(ఖ) త్రిభుజాకారంలోని కాగితం

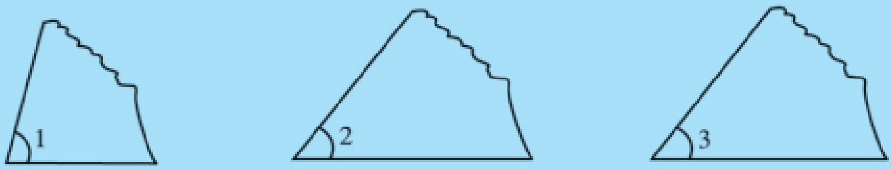
(గ) కోణాల పేర్లు $\angle 1, \angle 2, \angle 3$

ఫటం 7.11

- త్రిభుజాకారంలో కాగితంపై మూడు కోణాలను $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ అని పేరు పెట్టండ

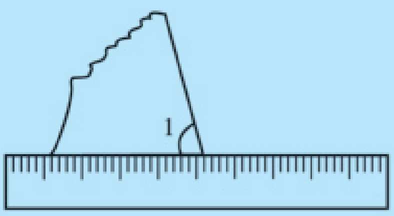


- తిభుజాకారంలోని కాగితం యొక్క కోణాలు మూడింటిని కత్తిరించండి.

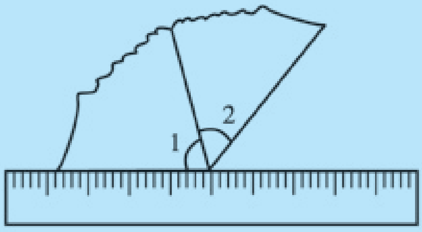


ఫటం 7.12

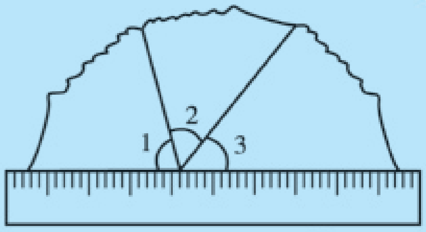
- మీ నోట్ పూస్తుకంలో ఒక పేజీపై స్కేలును ఉంచండి. స్కేలు స్కేలు యొక్కఒక లంబం పై కత్తిరించిన కోణాలు మూడింటి శీర్ష ములలను ఫటం 7.13 లో చూసిన విధంగా తగిలించండి. ఇచ్చట $\angle 1$ యొక్క ఒక అంచులో $\angle 2$ యొక్క అంచు తాకుతు ఉంటుంది. $\angle 2$ యొక్క ఒక అంచును $\angle 3$ యొక్క ఒక అంచు తాకుతూ ఉంటుంది.



$\angle 1$ ను ఉంచడమయినది



$\angle 1, \angle 2$ కోణాలు ఉంచడమయినది



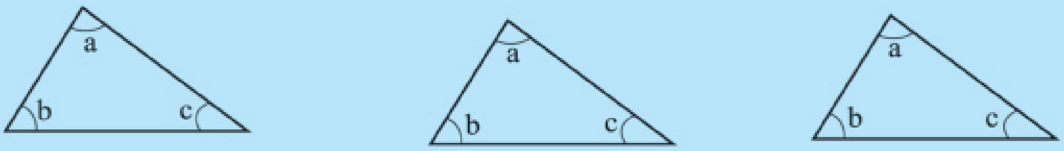
$\angle 1, \angle 2, \angle 3$ కోణాలు ఉంచడమయినది

$\angle 1$ యొక్క ఒక అంచు, $\angle 3$ యొక్క ఒక అంచు స్కేలు యొక్క అంచును తాకుతూ ఉన్నాయి. అనగా ఆరెండు అంచులు ఒక సరళరేఖలో ఉన్నాయి.

ఇందులో త్రిభుజం యొక్క కోణాలు మూడింటి మొత్తం పరిమాణం ఎంతని భావిస్తున్నారు ?

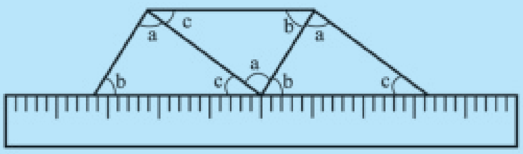
ప్రయత్నించండి :

- మీ నోట్ పుస్తకంలో ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి $\angle a, \angle b, \angle c$ అని పేర్లు పెట్టండి.
- ఒక ట్రేసింగ్ కాగితాన్ని తీసుకొని అందులో నోటు పుస్తకంలో గీచిన త్రిభుజం యొక్క మూడు విభిన్న నకలును తీసుకొనండి. పై మూల త్రిభుజంలోని కోణాల పెర్లను అనుసరించి వాటికి పేర్లు పెట్టండి.
- ట్రేసింగ్ కాగితం నుండి నకలు త్రిభుజాలు మూడింటిని కత్తిరించి వేరు చేయండి. అవి ఫటం 7.14 చూసిన (క) (ఖ) (గ) వలే ఉండవలెను.



7.14

- మీ నోట్ పూస్తకంలో ఒక పేజీ పై స్కేలును ఉంచండి. త్రిభుజాల మూడు అంచులన స్కేలు అంచును తాకునట్లు కింది ఫటంలో వలె అమర్చండి. ఇచ్చట ఒకదాని $\angle a$ పేరు మరొక దాని $\angle b$ కోణం మూడవ దాని $\angle c$ కోణం ఒకటిగా ఉండున

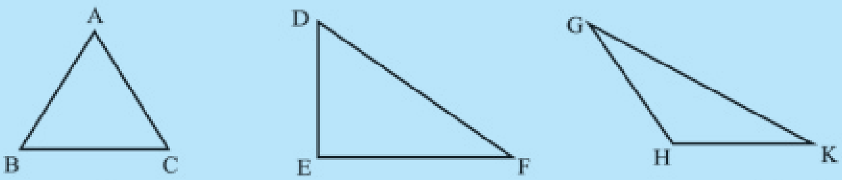


7.15

- ఇందులో మొదటి త్రిభుజం యొక్క $\angle c$ యొక్క ఒక భుజం. మూడవ త్రిభుజం యొక్క $\angle c$ యొక్క ఒక భుజం స్కేలు అంచును తాకుతు ఉండున. దీనిలోని $\angle a, \angle b, \angle c$ ల మొత్తం పరిమాణం ఎంత ?

ప్రయత్నించండి :

- మీ నోట్ పుస్తకంలో వివిధ ఆకారంలలో మూడు త్రిభుజలను నిర్మించండి.



- కోణమాణిని సహాయంతో త్రిభుజాలలోని కోణాలను కొలిచి కింది పట్టికలో వ్రాయండి.

త్రిభుజం పేరు	మూడు కోణాల పరిమాణం	మూడు కోణాల మొత్తం
Δ ABC	m∠A = m∠B = m∠C =	...........+...........+...........=
Δ DEF	m∠D = m∠E = m∠F =	...........+...........+...........=
Δ GHK	m∠G = m∠H = m∠K =	...........+...........+...........=

- ప్రతీ త్రిభుజంలో మూడు కోణాల మొత్తం ఎంత ?

అందుచేత :

ఒకత్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^0 అని తెలుసుకున్నాం.

సమాధానం కనుగొనుటకై ప్రయత్నించండి -

1. ΔABC యొక్క $m\angle A = 70^0, m\angle B = 45^0$ అయినచో $m\angle C$ ఎంత ?
2. ΔPQR లో $m\angle R$ కంటె $m\angle Q$ 10^0 అధికం $m\angle Q$ కంటె $m\angle P$ 10^0 అధికం.

అయినచో మూడు కోణాల పరిమాణంను కనుగొనండి.

ఉదాహరణ - 2

ΔABC లో $\angle A, \angle B$ నకు రెండు రెట్లు, $\angle C, \angle A$ నకు మూడు రెట్లు అయినచో మూడు కోణాలను కనుగొనండి.

సాధన -

$$m\angle A = m\angle B$$
$$m\angle C = m\angle A$$
$$= m\angle Ax3$$
$$= 3\times 2\times \angle B$$
$$= 6\times \angle B$$

రెండురెట్లు మూడు రెట్లు

లేక ఆ పరిమాణంనకు 6 రెట్లు

కాని $$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$$

$$2m\angle B + m\angle B + 6m\angle B = 180^0$$

$$9m\angle B = 180^0$$

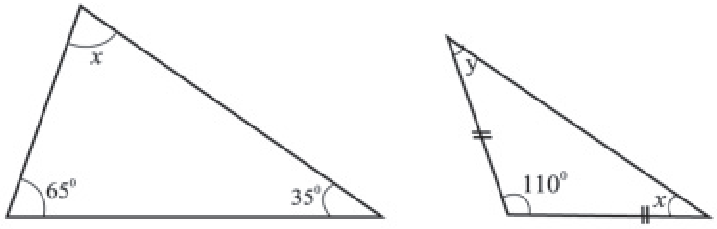
కబట్టి $$m\angle B = \frac{180^0}{9} = 20^0$$

$$\because m\angle A = 2m\angle B = 2\times 20^0 = 40^0$$

$$m\angle C = 6m\angle B = 6\times 20^0 = 120^0$$

అభ్యాసం 7.3

1. క్రింది త్రిభుజాలలోని x, y, z విలువలను కనుగొనండి.

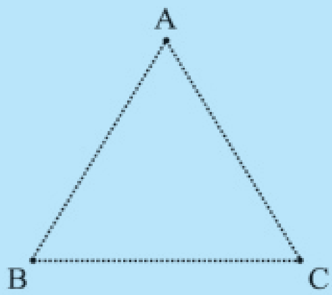


2. ΔABC లో $m\angle A = m\angle B + m\angle C$ అయినచో $m\angle A$ ఎంత ?

7.5. త్రిభుజంలో భుజాల ధర్మాలు

ప్రయత్నించండి :

- స్కూల్ మైదానానికి వెళ్లండి. పటంలో చూసిన విధంగా మీలో ముగ్గురు స్నేహితులు మూడు చోట్ల నిలబడండి. (పటం 7.17 లో అభయ, విమల , కమల వలే)
- ఇప్పుడు రెండు తాడు ముక్కలను తీసుకొండి. రెండు తాళ్ల ఒక చివరను పట్టుకోయని అభయకు చెప్పండి.
- ఒక తాడును అభయ నుండి కమలకు లాగి అందించండి. ఇద్దరు తాడులాగు పట్టుకుంటారు. అప్పుడు కమల వద్ద గల తాడును కత్తిరించండి. ఇప్పుడు ఆతాడు యొక్క ఒక చివర అభయ వద్ద మరొక చివర కమల వద్ద ఉన్నది. కావున ఆ తాడు పొడవు అభయ నుండి కమల మధ్య దూరంలో సమానం.



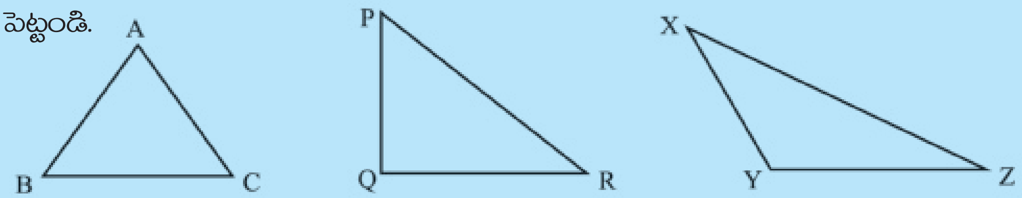
7.17

- రెండవ తాడు ఒక చివర అభయ చేతిలో ఉంది. తాడును విమల దిక్కుగా పొడవుగా లాగి పట్టుకునండి. కమల లాగి పట్టుకున్న తరువాత అక్కడ తాడును కత్తిరించండి.

- ఒక తాడు పొడవు అభయ, విమల మధ్య దూరం కాలగా మరొక తాడు పొడవు అభయ, కమల మధ్య దూరం అవుతుంది. మొదటి తాడు రెండవ తాడు పొడవు $= AB + BC$
- ఇప్పుడు రెండు త్రాళ్ళ పొడవులను సరిపోల్చి చూడండి. మొదటి తాడు కంటే రెండవ తాడు పొడవు అధికం కాబట్టి ΔABC లో $AB + BC > AC$

ప్రయత్నించండి :

- నోట్ పుస్తకంలో వేరు వేరు త్రిభుజాలను నిర్మించండి. ఆ మూడు త్రిభుజాలకు ABC, PQR, XYZ అని పేర్లు పెట్టండి.



- ప్రతీ త్రిభుజంలోని భుజల పొడవులను కనుగొనండి. క్రింది పట్టికకజనస్త్రు పూరించండి (3) (4) నిలువ గదిలలోని పొడవులలో దేని పొడవు అధికమో వ్రాయండి.

త్రిభుజ పేరు (1)	భుజాల పొడవు (2)	రెండు భుజాల మొత్తం పొడవు (3)	మూడవ భుజం పొడవు (4)	(3)(4) భుజల మధ్య సరిపోల్చుట (5)
Δ ABC	AB=	AB+BC=	AC=	
	BC=	AB +AC=	BC=	
	CA=	BC+AC=	AB=	
Δ PQR	PQ=	PQ+QR=	RP =	
	QR=	QR+ RP=	PQ=	
	RP=	PQ+RP=	QR=	
Δ XYZ	XY=	XY+YZ=	ZX=	
	YZ=	YZ+ZX=	XY=	
	ZX=	XY+ZX=	YZ=	

- పై పట్టికలోని 5వ నిలువ గది నుండి మీరు ఏమి తెలుసుకున్నారు

ఒక త్రిభుజంలోని ఏదైనా రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తం మూడవ భుజం కంటే అధికం.

చెప్పి చూడండి :

త్రిభుజంలోని ఏదైనా రెండు భుజాల పొడవుల మధ్య భేదం మూడవ భుజం పొడవు కంటె ఎక్కువ ? తక్కువ ?

ΔPQR లో $PQ = 8$ సెం.మీ. $PR = 11$ సెం.మీ. అయినచో కింది వానిలో సరైన వాటిని ఎంచి వ్రాయండి.

క) QR 2 సెం.మీ. కంటె అధికం, 19 సెం.మీ. కంటె తక్కువ.

ఖ) QR 3 సెం.మీ. కంటె అధికం, 2 సెం.మీ. కంటె తక్కువ.

గ) QR 3 సెం.మీ. కంటె అధికం, 19 సెం.మీ. కంటె తక్కువ.

ఘ) QR 2 సెం.మీ. కంటె అధికం, 20 సెం.మీ. కంటె తక్కువ.

మీ సమాదానం నకు సరైన కారణం వ్రాయండి.

అభ్యాసం 7.4

1. క్రింది కొలతలలో ఏవి త్రిభుజంలోని భుజల పొడవులకు సరిపోతాయో వ్రాయండి.

క)	4 సెం.మీ.	5 సెం.మీ.	9 సెం.మీ.
ఖ)	5 సెం.మీ.	6.5 సెం.మీ.	12 సెం.మీ.
గ)	12 సెం.మీ.	7 సెం.మీ.	4 సెం.మీ.
ఘ)	8 సెం.మీ.	9 సెం.మీ.	11 సెం.మీ.

మీకు తెలుసా ?

- పెద్ద కొలత మిగిలిన రెండు కొలతల మొత్తం కంటె తక్కువ ఉండవలెను.
- చిన్న కొలత మిగిలిన రెండు కొలతల భేదానికంటె అధికంగా ఉండవలెను.

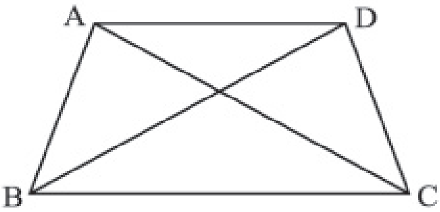
2. ప్రక్క ఫటంలోని $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}, \overline{AC}, \overline{BD}$ పొడవులను కొలవండి.

క్రింది ఖాళీలను పూరించండి.

AB + BC + CD + DA = ________

AC + BD = ________

AB + BC + CD + DA $\boxed{}$ AC + BD [> లేక <]



దీనిని బట్టి మీరు ఏమి తెలుసుకున్నారు.

3. స్నేహితులతో ఆలోచించి కోణాలలో క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయండి.

క) ఒక త్రిభుజంలోని రెండు కోణాలు లంబకోణాలు కాగలవా ?

ఖ) ఒక త్రిభుజంలోని రెండు కోణాల మొత్తం మూడవ కోణంతో సమానం అగునా ?

గ) ఒక త్రిభుజంలో ఒకే ఒక అల్ప కోణం ఉంటుందా?

ఘ) ఒక త్రిభుజంలో కేవలం రెండు అల్ప కోణాలు ఉంటాయా?

ఙ) ఒక త్రిభుజంలో ప్రతికోణం 60^0 ఉండవచ్చునా?

చ) ఒక త్రిభుజంలోని ప్రతికోణం 60^0 కంటె అధికం కావచ్చునా?

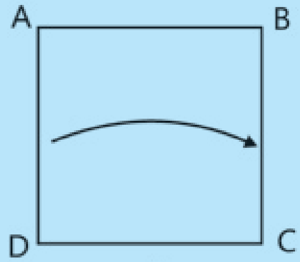
ఛ) ఒక త్రిభుజంని ప్రతికోణం 60^0 కంటె తక్కువ ఉండవచ్చునా?

జ) ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజల పొడవులు 8 సెం.మీ, 7 సెం.మీ., 15 సెం.మీ. ఉండవచ్చునా?

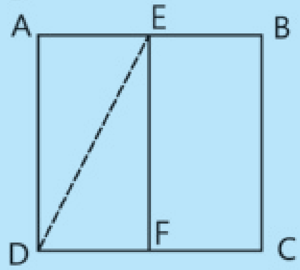
ఝ) ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజల పొడవులు 8 సెం.మీ, 5 సెం.మీ., 3 సెం.మీ. ఉండవచ్చునా ?

ఞ) ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజల పొడవులు 4 సెం.మీ, 5 సెం.మీ., 8 సెం.మీ. ఉండవచ్చునా ?

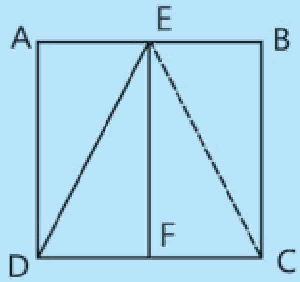
ప్రయత్నించండి :



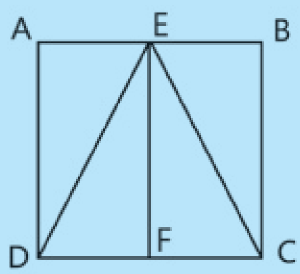
- కాగితాన్ని మడతలు పెట్టి సమద్విబాహు, లంబకోణ త్రిభుజాలను తయారు చేయండి.
  ఒక చతురస్రా కారపు కాగితం ముక్కను తీసుకొని దాని ఎడమ, కుడి, అంచులను మడత పెట్టండి. మడతను బాగా అదమాడి దానిని తెరచి ఆ మడత మీరు చఛ అనుకొనుము.



- చఝ బిందువులను కలుపుతూ మడత పెట్టండి. తరువాత కాగితాన్ని తెలచి చూడండి. చఝ ఏర్పడునా.



- అదే విధంగా చగ బిందువులను కలిపి ముడవ పెట్టి తెరరండి. చగ ఏర్పడింది.



- ఇప్పుడు ఘ చ గ ఒక సమద్వి భుజ త్రిబుజం ఏర్పడుతుంది. చఛ దాని మద్యమం అగును. అందుచేత ఝఛచ, గఛచ లు రెండు లంబకోణ బుజాలు ఏర్పడినవి.

8వ అధ్యాయం

వ్యాపార గణితం

8.1 ఉపోద్ఘాతల -

రెండు వస్తువులను సరిపోల్చటకు మనం భిన్నాలు, అనుపాతాలు, శతంశలను ఉపయోగిస్తుంటాం. భిన్నాలను అనుపాతాలను శాతంలోనికి ఎలా మార్చాలో ఇది వరకే మనం తెలుసుకున్నాం. వివిధ రంగాలలో శాతాలను ఎలా ప్రయోగించుకోవచ్చునో తెలుగుకుందాం.

రాజుకు లెక్కలలో 50 కు 45, సైన్సులో 80 కు 16 మార్కులు వచ్చాయి. అయిన అతనకు ఎందులో మంచి మార్కులు వచ్చాయి ? ఒక రెండు విషయాలలోను మొత్తం మార్కులు సమానమైనచో మనం సులభంగా చెప్పగలం. అతడు ఎందులో మంచి మార్కులు తెచ్చుకున్నాడో చెప్పగలం. కాని ఇచ్చట రెండు విషయాలలో మొత్తం మార్కులు సమానం కాదు.

మొదటి రెండు విషయాల మొత్తం మార్కులను సమానంగా తీసుకుందాం. ఒక్కొక్క దాని మొత్తం మార్కులు 100 అనుకుందాం.

గణితంలో 50 కు 45 మార్కులు		సైన్సులో 80 కు వచ్చినవి 76	
∴ 1కు వచ్చిన మార్కులు	$\frac{45}{50}=\frac{9}{10}$	∴ 1 కు వచ్చినవి	$\frac{76}{80}=\frac{19}{20}$
100 కు వచ్చిన మార్కులు	$\frac{9}{10}\times100=90$	100 కు వచ్చినవి	$\frac{19}{20}\times100=95$

మరొక పద్ధతి-

లెక్కలలో వచ్చిన మార్కులు 90 లేక 90%

సైన్సులో వచ్చిన మార్కులు 95 లేక 95%

అతనికి లెక్కల కంటె సైన్సులో అధిక మార్కులు వచ్చాయి.

మీకు తెలుసా ?

శాతంలో తెలియ చేయుటకై హరంలో 100 తీసుకోవాలి.

ఇప్పుడు కింది ఉదాహరణలను చూడండి. మీరా తన జేతంలో 5% సేవింగు చేయును. దీనిని బట్టి మీరా తన జేతం 100 రూపాయిలు అయితే రూ. 5 సేవింగు చేస్తుందని మనకు తెలుస్తున్నది. రూ. 100 అన్నది జేతంలో 100 భాగాలలో 5 భాగాలు అని అర్థం.

∴ అమే సేవింగ్సు = జేతంలో 5%

$= \frac{5}{100}\times$ జేతం

$= \frac{5}{100}\times5000$ రూ.

మీకు తెలుసా ?

ఒక సంఖ్యలో 5% అనగా ఆ సంఖ్యలు యొక్క 100 భాగాలలో 5 భాగాలు అనగా 5% అనగా 100 భాగాల లో 5 భాగాలు.

ప్రయత్నించండి :

- మీ తరగతిలో ఒక దినం హాజరుకాని వారి సంఖ్య హాజరైన వారి సంఖ్యలో ఎంత శాతం ?
- మీ తరగతిలో 30 కంటె తక్కువ వచ్చిన వారి సంఖ్య మొత్తం పిల్లల్లో ఎంత శాతం ?

8.1.1 శాతంలో పెరుగుదల తరుగుదల -

వేసవి సెలవులకు ముందు మిలి బరువు 40 కి.గ్రా కాని సెలవుల తరువాత అమె బరువు 42 కి.గ్రా అయ్యింది. అయిన అమె బరువు ఎంత శాతం పెరిగింది.

మిలి బరువు సెలవులకు ముందు = 40 కీ.గ్రా

సెలవుల తరువాత బరువు = 42 కీ.గ్రా

పెరిగిన బరువు = 42 కీ.గ్రా - 40 కీ.గ్రా

= 2 కీ.గ్రా

మొదటి బరువు 40 కీ.గ్రా ఉండగా పెరిగిన బరువు = 2 కీ.గ్రా

మొదటి బరువు 1 కీ.గ్రా ఉండగా పెరిగిన బరువు $= \frac{2}{40}$ కీ.గ్రా

100 కీ.గ్రా ఉన్నచో పెరిగిన బరువు $= \frac{2}{40} \times 100$

$= 5$ కి.గ్రా

100 కి.గ్రా లకు పెరిగినది = 5 కి.గ్రా

అందుచేత పెరిగిన శాతం = 5 లేక పెరిగిన బరువు = 5 శాతం లేక 5%

$$\text{పెరిగినశాతం} = \frac{\text{పెరిగినది}}{\text{మొదటి పరిమాణం}} \times 100$$

ఉదాహరణ - 1

ఒక బస్సులో 30 మంది ప్రయాక్షకులు కలరు. త్రోవలో 6 గురు ప్రయాణికులు దిగీ పోయారు. అయిన బస్సులోని ప్రయాణికులో ఎంత శాతం తగ్గిపోయారో

సాధన -

బస్సులో ప్రయాణం చేస్తున్న వారిసంఖ్య = 30

త్రోవలో దిగిపోయిన సంఖ్య = 6 అనగా

బస్సులో తగ్గిన వారు = 6

30 కు తగ్గిపోయిన వారు = 6

1కు తగ్గిపోయిన వారు $=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$

100 కు తగ్గిపోయినవారు $=\frac{1}{5}\times 100=20$

తగ్గిన వారి శాతం = 20 లేక 20% తగ్గును.

ఉదాహరణ - 2

గత సంవత్సరం జామెట్రి బాక్సు వెల 35 రూ. ఈ సంవత్సరం దాని వెల రూ. 42 అయిన ఎంత శాతం పెరిగినది

సాధన -

గత సంవత్సరం జామెట్రి బాక్సు వెల - రూ 35

ప్రస్తుత సంవత్సరం - రూ 42

గత సంవత్సరం వెల రూ 35	$\xrightarrow[\text{7 రూ}]{\text{పెరిగింది}}$	ఈ సంవత్సరం వెల రూ 42

పెరిగిన శాతం $=\frac{\text{పెరిగిన పరిమాణం}}{\text{మొదటి వెల పరిమాణం}}\times 100$

$=\frac{7}{35}\times 100$

$\therefore$

ఉదాహరణ - 3

రమాదేవి పాఠశాలలో 80 మంది పిల్లలు కలరు. అందులో 8 మంది మరొక బడికి వెళ్ళి పోయారు. అయిన ఎంత శాతం పిల్లలు తగ్గిపోయారు.

సాధన - బడిలో ఉన్న పిల్లల సంఖ్య 80

మరొక బడికి వెళ్ళి పోయినవారు 8 మంది

తగ్గిన వారి శాతం $=\frac{\text{తగ్గినవారు}}{\text{మొత్తం}}\times 100$

$=\frac{8}{80}\times 100=10$

ఖాళీలను పూర్తి చేయండి.-

$\therefore$ తగ్గిన వారు - 10 శాతం లేక 10%

మొదటి విద్యార్థుల సంఖ్య 80 మంది	$\xrightarrow[\text{8 మంది}]{\text{వెళ్ళిపోయిన వారు}}$	ఈ సంవత్సరం ఉన్న వారు. ....

అభ్యాసం 8.1

1. రహీం 200 పోస్టల్ స్టాంపులు సంపాదించెను. హాసిన రహీం కంటె 12% అధికంగా స్టాంపులు సంపాజించెను. అయిన హాసిన సంపాదించిన స్టాంపులు ఎన్ని ?

2. మీథున్ 15 కొబ్బరి కాయలను అమ్మకానికి ఉంచెను. అందులో 20% నష్టం అయిపోయాయి. మిగిలిన వాటిని ఒక్కొక్కటి రూ 5 అమ్మినచో ఎంత సొమ్ము వచ్చెను.

3. జన్ ఒక పరిక్షలో 445 మార్కులు సంపాదించి మొదటి తరగతికి 35 మార్కలు తక్కువ అయ్యను. మొదటి తరగతిలో పాస్ అగుటకు 60% మార్కలు రావలమును. అయిన మొత్తం ఎన్ని మార్కలకు పరీక్ష అయ్యింది.

4. ఒక వ్యక్తి తన నెలజేతంలో 30% అప్పు తీర్చి మిగిలిన రూ 10,500 ను ఇంటి ఖర్చులకు వినియోగించెను. అయిన అతని నెల జేతం ఎంత ?

5. ఒక బడిలోని బాలబాలికల సంఖ్య 140. మరొక బడిలో బాలబాలికల సంఖ్య 175 అయిన రెండవ బడిలోని బాలబాలికలు మొదటి బడిలోని బాలబలికలు కంటె ఎంత శాతం అధికం.

6. ఖలియాగారి తోటలో 60 కొబ్బరి చెట్లు, జయంత్ తోటలో 75 కొబ్బరి చెట్లు ఉన్నాయి.

   క) ఖలీయ తోటలోని చెట్లు జయంత్ తోటలో 75 కొబ్బరి చెట్లు ఉన్నాయో.

   ఖ) జయంత్ తోటలోని చెట్లు, ఖలియ తోటలోని చెట్లు కంటె ఎంత శాతం తక్కువ.

8.2 లాభము - నష్టము శాతములలో

ఒక వర్తకుడు కొన్ని వస్తువులను కొన్న వెల కంటె అధికంగా అమ్మినచో లాభం వస్తుంది. కాబట్టి లాభం కూడ పెరుగుదల కొన్నవెల అన్నది మొదటి వెల అవుతుంది.

$$\text{పెరిగిన శాతం} = \frac{\text{పెరిగిన పరిమాణం}}{\text{మొదటి పరిమాణం}} \times 100$$

$$\text{లాబం శాతం} = \frac{\text{లాభం}}{\text{కొన్నవెల}} \times 100$$

అనేక సమయంలలో బజారు ధరలు తగ్గుట లేక అమ్మ వలసిన వస్తువులు పాతవై పోయినచో వ్యాపారులు కొన్నవెల కంటె తగ్గించి అమ్ముట జరుగుతుంటుంది. అనగా కొన్నవెల కంటె తక్కువ వెలకు అమ్మకు జరుగుతుంది.

$$\text{తగ్గిన శాతం} = \frac{\text{తగ్గిన పరిమాణం}}{\text{మొదటి పరిమాణం}} \times 100$$

$$\text{నష్ట శాతం} = \frac{\text{నష్ట}}{\text{కొన్నవెల}} \times 100$$

రాముడు మామిడి తోటలో రూ 80 కు మామిడి పండ్లు కొని సంతకు వెళ్లలేక తమ ఇంటికి తగ్గరలో ఉన్న దుకాణంనకు 75 రూపాయలకు వాటిని అమ్మవేసను. అయిన అతనకి ఎంత శాతం నష్టం వచ్చెను ?

నష్టం - కొన్నవెల - అమ్మినవెల

రూ 80 - రూ 75 - రూ 5

రూ. 80 కొన్నవెల అయినచో నష్టం - రూ. 5

రూ.1 - కొన్నవెల అయినచో నష్టం - $= \frac{5}{80}$ రూ.

రూ. 100 కొన్నవెల అయినచో నష్టం - $= \frac{5}{80} \times 100$ రూ

$$= \frac{5}{80} \times 100$$

$$\boxed{\text{నష్టం శాతం} = \frac{\text{నష్టం}}{\text{కొన్నవెల}} \times 100}$$

మీకు తెలుసా?
లాభశాతం శనష్టశాతం లు వస్తువు కొన్నవెలపై ఆధరపడిఉంటాయి.

అమిన వెల, కొన్నవెల, లాభం లేక నష్టం వాటిలో ఏ రెండు విషయాలు తెలిసినా మూడవ దానిని కనుగొనగలం.

ఉదాహరణ - 4

సీమ ఒక రేడియోను రూ 450 లకు కొనెను. $\frac{450 \times 4}{100}$ దానిని ఎంతకు అమ్మినచో 4% నష్టం వచ్చును.

సాధన -

మొదటి పద్ధతి -రేడియో కొన్నవెల రూ 450

నష్టం 4%

రూ 100 కొన్నవెల అయినచో నష్టం రూ 4

∴ అమ్మిన వెల = కొన్నవెల - నష్టం

100 - 4 రూ 96

∴ 450 కొన్నవెల అయినచో నష్టం $= \frac{96}{100} \times 450$ రూ.

రూ $= 432$

రెండవ పద్దతి

నష్టం - కొన్నవెలలో 4% $= \frac{450 \times 4}{100}$ రూ = రూ 18

అమ్మినచో కొన్నవెల - నష్టం (రూ 450 -180) = రూ. 432

ఉదాహరణ - 5

రెండు దుపుట్లును రూ 640 కు కొని ఒక దానిని 5% నష్టవనికి మరొక దానిని 10% లాభానికి అమ్మెను. మొత్తంపై అతనికి లాభమా? నష్టమా ? ఎంత శాతం.

సాధన -

రెండు దుపుట్లు కొన్న వెల = రూ. 640

∴ 1 దాని కొన్నవెల = రూ. 640 ÷ 2 = రూ. 320

ఒక దానిపై నష్టం = 5%

= కొన్నవెలలో 5% = $\frac{320 \times 5}{100}$

రూ. = 16

∴ మొదట దుపుటి అమ్మిన వెల = కొన్నవెల - నష్టం

= రూ. 320 - రూ. 16 = రూ. 304

రెండవ దానిపై లాభం = 10%

= కొన్నవెలలో 10%

$= \frac{320 \times 10}{100}$ రూ $= 32$ రూ. 32

∴ రెండవ దాని అమ్మినవేల = కొన్నవెల + లాభం

$= 320$ రూ. $+ 32$ రూ.

$= 352$ రూ.

మొత్తం అమ్మినవెల $= 304$ రూ. $+ 352$రూ.

$= 656$ రూ.

మొత్తం అమ్మినవెల $= 640$ రూ.

$= 656 \quad - 640 \quad = 16$

లాభం శాతం = $\frac{\text{లాభం}}{\text{కొన్నవెల}} \times 100$

$= \frac{16}{640} \times 100\%$

$= \frac{5}{2}\% \quad 2.5\%$

పై ఉదాహరణలను పరిశీలించి కింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయండి.

- మొదటి దుపుటి కొన్నవెల ఎంత శాతం నష్టానికి అమ్మెను ?
- మొదటి దుపుటి నష్టాన్ని ఎలా కనుగొన్నారు ?
- మొదటి దుపుటి అమ్మిన వెల ఎంత ?
- మొదటి దుపుటి వలన లాభమా ? నష్టమా ?
- ఇచ్చట లాభం / నష్టం ఎంత ?
- రెండవ దుపుటి అమ్మి వెల ఎంత?
- రెండవ దుపుటి అమ్మి / కొన్నవెలలో ఏది పెద్దది ?
- మొత్తం పై లాభం ఎంత
- లాభ శాతం ఎంత ?

ప్రయత్నించండి -

ఒక వ్యాపారి రూ 3 కు 4 నిమ్మకాయలు వంతున కొని 3 నిమ్మకాయలను రూ 4 కు అమ్మెను. అయిన అతనికి లాభమా ? నష్టమా ? ఎంత శాతం ?

అతడు ఎన్ని నిమ్మకాయలు కొన్నారో తెలియదు. అది తెలియనిచో మొత్తం కొన్న వెల, మొత్తం అమ్మిన వెల తెలుసుకొలేము. అందుచేత అతడు కొన్న నిమ్మకాయలు నష్టను 4,3 ల కసాగుగా తీసుకొవలెను (ఎందుకనగా 4 నిమ్మకాయలు కొనె రూ 3, అమ్మి వెల కలదు)

అభ్యాసం 8.2

1. ఒకడు రూ 200 కు 40 బొమ్మలను కొని వాటిని అమ్మగా 16% లాభం వచ్చెను. అయిన ఒక్కొక్క బొమ్మను అతడు ఎంతకు అమ్మెను ?
2. సుధాకర్ ఒక ఎద్దును రూ 900 కు అమ్మగా 10% నష్టం వచ్చెను. అయిన అతడు దానిని ఎంతకు కొనెను. దానిని ఎంతకు అమ్మినచో అతనికి 10% లాభం వచ్చును ?
3. ఒకడు రూ 1 10 ఎర్ర బెలూన్లు రూ 1 కు 10 నీలం బెలూన్లు కొని వాటిని అన్నింటిని రూ 1 కు అమ్మి వేయగా అతనికి లాభమా? నష్టమా? ఎఇతశాతం ?
4. రహీం రూ 800 బియ్యం కొని అందులో 8/4 వంతు భాగం 10% లాభానికి మిగిలిన వాటిని 10% నష్టమునకు అమ్మెను. అయిన మొత్తం పై అతనికి లాభామా? నష్టమా ? ఎంత శాతం ?
5. ఒక గొదాం వర్తకుడు బియ్యం బస్తా 1 కు రూ. 800 కు కొని బస్తా 1 కి 10% లాభానికి చిల్లర దుకాణదారుణకు అమ్మెను. చిల్లర దుకాణదారుడు దానికి 15% లాభానికి అమ్మెను. అయిన వినియోగ దారుడు బియ్యం బస్తా 1 కు ఎంతకు కొనెను?
6. ఒకడు 5 కొబ్బరికాయలు చొప్పున అమ్మెను. అయిన అతనకి మొత్తం లాభామా ? నష్టాం ? ఎంత రూ.

8.3. వడ్డీ లెక్కలు -

గౌరి అమ్మగారు ఒక రోజు బ్యాంకుకు వెళ్లెను. అమె చేటలో పాస్ పుస్తకం కలదు. పుస్తకం చూడాలనిపించింది. గౌరికి ఆ పుస్తకంపై ఉన్నది. కొన్ని తేదేలలో ఎక్కువ కొన్ని తేదీలలో తక్కువ సొమ్ము ఉన్నట్లు అందులో కలదు. అందుల ఉన్న విషయాలను గూర్చి ఆమె వాళ్ల అమ్మగారిని అడిగింది.

అమ్మ -- వచ్చిన రాబడిలో ఇంటి ఖర్చులకు కొంత సొమ్ము ఉంచుకొని మిగిలిన దానిని బ్యాంకులో జమ చేస్తుంటాం. బ్యాంకులో దారిఖలలో ఎంత జమ చేస్తున్నము దానిని ఆ పుస్తకంలో వ్రాస్తారు.

గౌరి - మనం బ్యాంకులో డబ్బు జమ చేస్తుంటే అది పెరుగు తుంటావి. మరి అపుడప్పుడు తక్కువగా ఉంటున్నది.

అమ్మ - అవసరమైన సమయాలలో మనం బ్యాంకులో జమ చేసి ఉన్న సొమ్ములో కొంత వాడుకోవచ్చు. మనం అపుడుప్పుడు బ్యాంకు నుండి డబ్బులు తీసుకుండుట వలన జమ చేసిన దాని పరిమాణం తగ్గుతుంటుంది.

గౌరి - మరి డబ్బులను ఇంటి వద్ద ఉంచుకోకుండా బ్యాంకులో ఎందుకు ఉంచుతూ ఉంటావు? డబ్బులు జమ చేయడానికి, తెచ్చుకోవడానికి వెళ్ళి రావడానికి రిక్షా ఖర్చులు అవుతాయి గదా ?

అమ్మ - మొదటిది బ్యాంకులో డబ్బులు దాచుకుంటె భద్రంగా ఉంటాయి. రెండవది బ్యాంకులో మనం దాచుకున్న సొమ్ముపై కొంత అధికం సొమ్ము చెల్లిస్తుంది దీనివల్ల అందరు బ్యాంకులో సొమ్ము దాచుకునే సమయంలో బ్యాంకు ఎంత వడ్డి చెల్లిస్తుందో మనకు తెలియచేస్తుంటుంది. ఇది భారత ప్రభుత్వం అజిమాయిలో ఉంటుంది.

ఈ విధంగా గౌరికి వాళ్ళ అమ్మ గారు వడ్డికి సంబంధించిన విషయాలు చెప్పారు.

- ప్రతీ రూ 100 ల జమ పై సంవత్సరానికి కొంత వడ్డీ చెల్లింతబడుతూంది దాన్ని వడ్డీ రేటు శాతం అందురు. దానిని 'r' చే సూచిస్తారు.
- జమ చేసిన సొమ్ము పరిమాణంనకు అసలు అందురు. దానిని 'p' తో సూచిస్తారు.
- ఎన్ని సంవత్సరాలకు సొమ్మును బ్యాంకులో ఉంచుకుంటామో దానిని కాలం అంటారు. దీనిని 't' చే సూచిస్తారు.
- జమ చేసిన సొమ్ముపై వచ్చిన అధిక ఆదాయాన్ని వడ్డ అందురు దానిని 'I' చే సూచిస్తారు.

- ఇప్పుడు చూడండి r శాతం వడ్డ రేడుపై p పరిమాణంలో అసలునకు t సంవత్సరాలకు ఎంత వడ్డీ లభిస్తుంది.

వడ్డీ రెటు r అనగా రూ 100 రూ అసలుపై $\frac{r}{100}$

1 సం॥ కు $\frac{r}{100}$ చెల్లించే వడ్డీ అని అర్ధం.

రూ 1 t సం॥ కి $\frac{r}{100}\times t$ వడ్డీ అయినచో

రూ p సంవత్సరం $\frac{r}{100}\times t\times P$ వడ్డీ

$$\therefore \quad = \frac{r}{100}\times t\times P = \frac{Ptr}{100}$$

లేక $I = \frac{Ptr}{100}$

$$\text{వడ్డీ} = \frac{\text{అసలు} \times \text{కాలము} \times \text{వడీరెటు}}{100}$$

మీకు తెలుసా ?

బ్యాంకులో మనం డబ్బ జమచేస్తే దానిపై బ్యాంకు బడ్డీ ని చెల్లిస్తున్నట్లే బ్యాంకు లేక ఇతర సంస్థల నుండి మనం సొమ్ము అప్పుతెచ్చినప్పుడు మనం కూడా వడ్డీ ని చెల్లించవలసి ఉంటుంది.

పై సూత్రంలో 100 x p = ptr కూడా వ్రాయవచ్చు

అసలు (p), వడ్డీ (I), వడ్డీరెటు (p) కాలం (p) ద్వారా సంబంధం కలిగియున్నది.

ఇంత వరకు మనం తెలుసుకున్నం వడ్డిని బారువడ్డి లేక వడ్డీ అందురు. బారువడ్డీ ప్రకారం ప్రతీ సంవత్సరం ప్రారంభంలో ఉన్న అసలుపై వడీని లెక్కించడం జరుగుతుంది. కేవలం వడ్డీ అంటె బారువడ్డీనే తెలియచేస్తుంది.

చెప్పి చూడండి
బారువడ్డీ వలె ఇతర రకాల వడ్డీలు ఉన్నాయేమో తెలుసుకోండి

మనం దానికున్న సొమ్ము లేక అసలు, దానిపై వచ్చిన వడ్డీ కలిపినచో దానిని మొత్తం అందురు. దీనిని ద్వారా సూచించడం జరుగుతుంది. మొత్తం (A) = అసలు (P) + వడ్డీ (I)

ఉదాహరణ - 6

5 శాతం వడ్డీ రేటుపై రూ 10,000 కు 2 సంవత్సరాలకు అగువడ్డీ ఎంత ?

సాధన -

అసలు రూ 10,000 వడ్డి రేటు 5% కాలం 2 సం॥

వడ్డీ $I = \frac{Ptr}{100} = \frac{10,000 \times 2 \times 5}{100}$ రూ $= 1,000$ రూ 1,000 (జవాబు)

మీకు తెలుసా?
వడ్డీ రేటును ఎల్లపుడు శాతములోకి మార్చవలెను.

ఉదాహరణ - 7

జీవన్ నాన్నగారు ఒక అప్పులు ఇచ్చే సంస్థ నుండి రూ 5,000 లను అప్పు తెచ్చెను. దానిపై 8% వడ్డీ చెల్లించవలసి యున్నచో 2 సం॥ తరువాత మొత్తం ఎఖాత చెల్లించి అప్పు తీర్చెను ?

సాధన

అసలు $(P) = 5,000$

వడ్డీ రేటు $(r) = 8\%$

కాలం $(t) = 2$

వడ్డీ $I = \frac{Ptr}{100}$

$= \frac{5,000 \times 2 \times 8}{100}$ రూ.

$= 800$ రూ.

మొత్తం = అసలు + వడ్డీ

$= 5000$ రూ. $+$ 800 రూ.

$= 5800$ రూ.

ఎక వాస్తు మార్గంలో

రూ 100 1 సం॥ కు వడ్డీ = రూ 8

రూ 1 1సం॥ వడ్డీ $= \frac{8}{100}$ రూ.

రూ 5000 1సం॥ వడ్డీ $= \frac{8}{100} \times 5000 = 400$ రూ.

రూ 5000 2సం॥ వడ్డీ $= 400$ రూ $\times 2 = 800$ రూ.

మొత్తం = అసలు + వడ్డీ = రూ. 5000 + రూ. 800

=5800 రూ.

అభ్యాసం - 8.3

1. 5% వడ్డీ రెటు చొపున 2 సం॥ కు రూ 5,500 లకు ఎంత వడ్డీ అగును ?
2. 12% వడ్డీ రేటుఙ 2 సం॥ కు రూ 1512 లు వడ్డీ అయినచో అసలు ఎంత ?
3. కొంత అసలుపై 5% వడ్డీ రేటుపై 8 సం॥లో రూ 4200 లు వడ్డీ అగును. అదే అసలు పై 10% వడ్డీ రేటుపై 3 సం॥లో ఎంత వడ్డీ అగును ?
4. హరాలాల్ అనే వ్యక్తి వడ్డీ వ్యాపారి వద్ద నుండి రూ 4000 అప్పు తెచ్చి 3 సం॥ తరువాత 49600 లు మొత్తం చెల్లించి అప్పు తీర్చెను. అయిన అతడు చెల్లించిన వడి రెటు ఎంత ?
5. నీలిమా బ్యాంకు నుండి 6% వడ్డీ రేటుపై 3 సం. కు రూ 1400 లను అప్పు తీసుకొని తన స్నేహితురాలకు అదే రేడు అదే అసలు 8% వడ్డీ రేటునకు అప్పు ఇచ్చెను. 3సం॥ తరువాత తన స్నేహితురాలు తీర్చిన అపుతో అదే రోజు తాను కూడా బ్యాంకు అప్పు తీర్చెను. అయిన తనకెంత లాభం వచ్చెను.
6. ఒకడు 8% వడ్డీ రేటుపై రూ 20,500 లకు 3 సం॥కు అప్పుతీసుకొనెను కాని ఒక సంవత్సరం తరువాత వడ్డీరేటు 9% కు పెరిగినది. అయిన 3 సం॥ తరువాత అతడు మొత్తం ఎంత చెల్లించి అప్పు తీర్చెను.

8.4. రిబేటు -

వినియోగదారులను ఆకర్షించుటకై వ్యాపారులు వివిధ పద్ధతులను అవలంబిస్తుంటారు. ఉచితంగా బహుకుతులు ఇచ్చుట, రెండు వస్తువు కొంటె ఒక వస్తువు ఉచితం, ప్రకటన వెలపై తగ్గింపు ధరలు మొదలగునవి. ఇట్టి ఉపాయాలు ఉసరామో ఉత్సవాలు, పండగలు సందర్భలలో ప్రదర్శనలు సంస్థల ఎదుట రిబేటు, అమ్మకాలు అనే బోర్డులు కనిపిస్తుంటాయి. ప్రకటన లేక లిఖిత వెల కంటె ఎంత తగ్గించి అమ్ముతారో ఆ తగ్గించిన దానిని రిబేటు అందురు. (ముదర (రిబేటు)

రిబేటు   ప్రకటనవెల   అమ్మినవెల

అమ్మినవెల ప్రకటనవెల - రిబేటు

సాధరణంగా రిబేటును శాతంలో తెలియ చేయడమగును.

రిబేటు 20% అంటే రిబేటు   ప్రకటనవెలాలో 20%

గాంధి జయంతి సంధర్భలలో ఖద్దరు వస్త్రాలపై ప్రభుతూ నిర్ధిష్టమైన పరిమాణంలో రిబేటును ప్రకటస్తుంటుంది. రింటు ఒక షర్టు కొనుటకు వెళ్లెను. షర్టు వెల రూ 100 గా రాసియున్నది. దానిని అతడు రూ 80 లకు కొనెను అయిన దానిపై వచ్చిన రిబేటు రూ 20 లు.

- వస్తువుపై గల లిఖిత విలువ లేక సూచిక విలువపై తగ్గించి తక్కువ ధరకు అమ్మినప్పుడు ఆ తగ్గించిన
- పరిమాణాంలో రిబేటు   అమ్మినవెల   రిబేటు (డిస్కాంటు) అందురు.

  లిఖితవెల సూచికవెల - రిబేటు = అమ్మినవెల
- రిబేటు సాధారణంగా వస్తువు ప్రకటనవెలపై శాతంలో లెక్కిస్తారు.

$$\text{రిబేటు శాతం} = \frac{\text{రిబేటు}}{\text{లిఖితవెల}} \times 100$$

ఉదాహరణ - 8

ఒక విద్యుత్ ఫ్యాన్ ప్రకటన వెల రూ 555. శీతాకాలంలో దానిపై 10% రిబేటు అయిన ఆ ఫ్యాన్ ఎంతకు లభిస్తుంది.

సాధన -

ఫ్యాన్ పై గల ప్రకటనవెల రూ 555

$$\text{రిబేటు} = 10\%$$

$$= \text{ప్రకటనవెల} \times \frac{10}{100}$$

$$= 555 \text{ రూ} \times \frac{1}{10} = 55.50 \text{ రూ}$$

∴ అమ్మినవెల = ప్రకటనవెల - రిబేటు

= రూ 555 - 55.50

= రూ 499.50 (జవాబు)

ఉదాహరణ - 9

ఒక జత తెప్పవు లిఖిత వెల రూ 250.00 లు రిబేటు పోను అమ్మినవెల రూ 220 లు రిబేటు శాతం ఎంత ?

మొదటి పద్ధతి

చెప్పులు జత ప్రకటనవెల = రూ 250

అమ్మినవెల = రూ. 220

రిబేటు = ప్రకటనవేల - అమ్మినవెల

= రూ 250 - రూ. 220 =రూ. 30

$$\therefore \text{రిబేటు శాతం} = \frac{\text{రిబేటు}}{\text{అమ్మినవెల}} \times 100$$

$$= \frac{30}{250} \times 100 = 12$$

∴ చెప్పులుపై వచ్చిన రిబేటు 12%

రెండవ పద్ధతి

రిబేటు = ప్రకటన వెల - అమ్మినవెల

= రూ 250 - రూ. 220

= రూ 30.00

మీకు తెలుసా ?

రూ 500 కు ముందు 500 అని వ్రాసేవారు. ఇప్పుడు భారత ప్రభుత్వం ప్రవేశ పెట్టిన నియమాన్ని అనుసరించి రూ. 500 రాయకుండా 500 గా వ్రాయాలి.

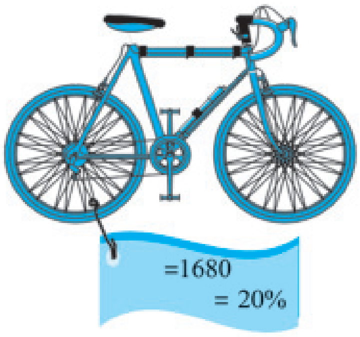
ప్రకటనవెల రూ 250 ఉండగా రిబేటు = రూ 30

ప్రకటన వెల రూ 1 అయినచో రిబేటు $= \dfrac{30}{250}$

ప్రకటన వెల రూ 100 అయినచో రిబేటు $= \dfrac{3}{25} \times 100$ రూ $= 12$ రూ

$\therefore$ చెప్పులపై 12% రిబేటు లభించెను.

అభ్యాసం 8.4



1. ఒక వర్తకుడు వివిధ వస్తువులను ఒరిబేటు ధరలకే అమ్ముతుంటాడు. ఎందుకు ? మీరేమనుకుంటారో వ్రాయండి.
2. చిన్న పిల్లలు వారి ఒక సైకిల్ ప్రకటనవెల రూ 1680 లు దసరా సంబర్ధంగా సైకిల్‌పై 20% రిబేటు లభించును. అయిన ఆసైకిల్ కొన్నదానికి వంతుకు వస్తుంది.
3. ఒక ప్రక్ గల వెల రూ 250 కాని దుకాణ దారుడు దానిని రూ 210 లకే అమ్మేను. అయిన అతడు ఎంత శాతం రిబేటునకు అమ్మెను.
4. ఒక కలం వెల రూ 8 కాని అదే రకానికి చెందిన మూడు కలాలు కొంటె 10% రిబేటు లభిస్తుంది. అయిన మూడు కలముల అమ్మకల వెల ఎంత ?
5. ఒక బకెట్ పై గల లిఖిత వెల రూ 120 లు ఎగ్జిబిషన్‌లో అటువంటివి 3 బకెట్‌లను కొంటె ఒక బకెట్ ఉచితం అని ప్రకటించెను. అయిన కొన్న వానికి ఎంత శాతం రిబేటు లభించును ?
6. యాత్ర సమయంలో ఒక స్కూలు బ్యాగ్ పై రూ 80 లు ప్రకటన వెల కలదు. దానిపై 15% రిబేటనవెల గల బ్యాగ్ పై 22% రిబేటు ప్రకటించెను. అయిన అచట బ్యాగ్ కొనాలో నిర్ణయించి చెప్పండి.

7. ఒక సైకిల్ దుకాణంలో మూడు చక్రాల సైకిల్ పై రూ 460 అని ప్రకటనవెల గలదు. దానిపై 25% రిబేటు ఉన్నాది. అలా అమ్మితే అమ్మిన వానికి 15% లాభం వస్తుంది. అయిన సైకిల్ కొన్నవెల ఎంత ?

సూచన :- మొదట ప్రకటనవెల, రిబేటు పోను అమ్మకపు వెల కనుగొనవేలను శాతం అమ్మినవెల నుండి కొన్నవెల లభిస్తుంది.

చలనం (గమనం)

కింది రెండు పరిస్థితులను గమనించండి.

మొదటి పద్ధతి -

1 పంచదర వెల రూ. 22 లూ అయినచో   కె.జీ. వెల రూ. 11, 2 కె.జి. ల వెల రు 44 ఏక వస్తు మార్గంలో వీటిని కనుగొన వచ్చును. పంచదర పరిమాణం పెరుగుచున్న కొలది ధర అధికం అవుతుంది. పంచదర పరిమాణం సగం అయిన ధర సగం అవుతుంది. పరిమాణం 2 వంతులైనచో ధర కూడ 2 వంతులు అవుతుంది. ఇచ్చట పంచదార పరిమాణం మన ఇష్టాను సారం. మార్చవచ్చు. దానితో పాటు పంచదార ధర కూడా పంచదార పరిమాణంపై ఆధారపడిఉంటుంది. అందుచేత పంచదార పరిమాణం దాని ధరను ఒక చరరాశీ అందురు.

రెండవ పద్ధతి -

ఒక వ్యక్తి 10 నిమిషాలు నడిచినచో 1   దూరం వెళ్ళగలడు. అతని నడకవేగం (గతి) లో మూడ్డు లేకుండా 20 నిమిషాలు నిడిచినచో 2   దూరం వెళ్ళగలడు. 5 నిమిషాలు నడిస్తే అంకిలో మిటరు లేక   నడక గలడు. లేక వస్తుమార్గాన్ని ప్రయోగించి మనం లేకించుతున్నాం. దీనినిబట్టి చుడగా కాలం పెరుగుచున్న కొలలి దూరం పెరుగుతుంది. కాలం రెఇఀడు వంతువైనచో దూరం రెండు వంతులు అవుచున్నది.

కాలం ఎన్ని వంతులు పెరుగుతుంటె దూరం అన్ని వంతులు పెరుగును. ఇచ్చట కాలం, దూరం రెండు మార్పుగల రాశులు అనగా మనం నడిచేదూరం నడిచిన కాలంపై అధారపడి ఉంటుంది. అందుచేత కాలం, దూరం రెండు చలరాశులు అగును. ఇచ్చట లేగాన్ని స్థిరంగా ఉంచవలసియున్నది.

పై వాటిలో మొదటి దానిలో ఒక చలరాశి (పంచదార) పై ఆధారపడి మరొక చలరాశు (పంచదర) మారుతుంటుంది. రెఇఀడవ దానిలో చలరశి గతికాలపై ఆధారపడి మరింక చలరాశి (దూరం) మారుతుంటుంది.

ఒక చలరాశి మార్పుపై ఆధారపడి మరొక చలరాశి మార్పు చెందినచో ఆ ప్రక్రియను చలనం అందురు.

ఇటువంటి మరి రెండు ఉదాహరణలను తీసుకొనుము. ఒక చలరాశిపై మరొక చలరాశి అధపడియుండును.

8.5.1 అనులోమన పాతం -

ఒక నోటు పుస్తకం వెల రూ. 12.00 అయినచో 10 పుస్తకాల మొత్తం వెల రూ 120 లు అవుతుంది. 3,9,8 నోట్ పుస్తకాల వెల ఎంత అవుతుందో చెప్పండి.

ఏకవస్తు మార్గం -

ఒక నోట్ పుస్తకం వెల	-	రూ. 12
3 పుస్తకాల వెల	-	3 × రూ 12 = రూ 36
9 పుస్తకాల వెల	-	9 × రూ 12 = రూ 108
18 పుస్తకాల వెల	-	18 × రూ 12 =రూ 216

ఈ విషయాలను పట్టి కలలో చుపించండి.

వస్తువుల మొదటి సంఖ్య	వస్తువుల రెండవ సంఖ్య	$\frac{1వ సంఖ్య}{2వ సంఖ్య}$	వస్తువు మొదటి వెల	వస్తువు రెండవ వెల	$\frac{మొదటి వెల}{రెండవ వెల}$
3	9	$\frac{9}{3}=3$	36	108	$\frac{108}{36}=3$
18	9	$\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$	216	108	$\frac{108}{216}=\frac{1}{2}$

వస్తువుల సంఖ్య 3 వంతులు అయినచో వాటి ధరకూడ మూడు వంతులు అవుతుందని దీనివలన తెలుస్తున్నది. వస్తువుల సంఖ్య సగమైనచో ధర కూడ సగమగును.

మొదటి స్థితిలో నోట్‌పుస్తకంల ఒక చలనం కాగా నోట్ పుస్తకాల వెల మరొక తలనం అవుతుంది. -

మొదటి చలనం (నోట్‌పుస్తకాలు) ను x తోను, రెండవ చలనం (నోట్‌పుస్తకాలవెల) ను y గా తీసుకోవలెను. నోట్ పుస్తకాల మొదటి సంఖ్య x_1 , రెండవ సంఖ్య అగును. నోటుపుస్తకాల వెల x_1 నోట్‌పుస్తకాలవెల రూ లు పట్టికనమసరిదిరి

$$x_1=3, \qquad y_1=36$$
$$x_2=9, \qquad y_2=108$$

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{36}{3}=12$$

y

$$\frac{y_2}{x_2}=\frac{108}{9}=12$$

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2} \qquad x_1y_2=x_2y_1$$

కాబట్టి

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{9}{3}=3$$

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{108}{36}=3$$

$$\therefore \frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1} \qquad x_1y_2=x_2y_1$$

రెండు చల రాశులలో మునుకటి సంబంధం వంటి సంబంధం. ఉన్నచో రెండు చలరాశుల మధ్య అనులోమచరత్వం సంబంధం గలదని చెప్పగలం. దానిని $x\alpha y$ దీనిని మనం y, x ల మధ్య అనులోమనుపాతం గలదని చదువుకోవలెను.

> మీకు తెలుసా?
> $x \; \alpha \; y$ అనగా మనం
> $x_1y_2 = x_2y_1$
> అని వ్రాయవచ్చు.

అనెక విలువల నుండిట ఒక దాని విలువ కనుకొన్నచో అది తగ్గిపోవుటను అనులోమనుపాతం అంటారు.

ఉదాహరణ - 10

బి.పిల్. కార్డు పై 20 కె.జీ. బియ్యం రూ 40 లకు ఇచ్చినచో 13 కె.జీ. బియ్యం ఎంతకు ఇస్తారు ?

సాధన -

బియ్యం పరిమాణం = x కె.జీ.

వాటి వెల = రూ y అను

(20 కె.జీ. బియ్యం వెల కంటె 1 కె.జి. బియ్యం వెల తక్కువ అందుచేత అచ్చట అనులోమను పాతంలో కలదు.

$$\therefore \quad y \,\alpha\, x$$

$$x_1 y_2 = x_2 y_1$$

$$20\times y_2 = 13\times 40$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{13\times 40}{20}$$

$$\Rightarrow y_2 = 2\times 13 = 26$$

∴ 13 కె.జీ. బియ్యం వెల - రూ. 26.

ఉదాహరణ - 11

ఒక పనిలో నియమించబడిన 30 మంది కూలీలు దినంనకు మొత్తం రూ 3000 లను సంపాదించగలరు. ఒక వేల ఆ పనిలో 18 మందిని నియమించినచో దినంనకు ఎంత చెల్లించవలెను. ఒక వేళ దినంనకు రూ. 4300 చెల్లంచినచో ఎంతమంది పని చేస్తుంటారు.

సాధన -

కూలీల సంఖ్య పెరిగినచో కూలిసొమ్ము కూడ పెరుగుతుంది. అందుచేత కూలీలు కూలీ సొమ్మును మధ్య అనులోమనుపాతంలో ఉన్నది.

కూలీలను x, కూలీ సొమ్మును y గా తీసుకొనిచో క్రిందిపట్టికలో దానిని చూడవచ్చును.

x కూలీలు	x_1=30	x_2=18	x_3=?
y కూలీ సంఖ్య	y_1=3000	y_2=?	y_3=4300

∴ x , y లు అనులోమన పాతంలో కలదు.

$$x_1 y_2 = x_2 y_1$$

$$\Rightarrow 30\times y_2 = 18\times 3000$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{18\times 3000}{30}$$

$$\Rightarrow y_2 = 1800$$

∴ 18 మంది కూలీలకు రోజ్జుకు రూ 1800 చెల్లించవలెను.

తిరిగి

$$x_1 y_3 = x_3 y_1$$

$$30 \times 4300 = x_3 \times 3000$$

$$\Rightarrow x_3 \times 3000 = 30 \times 4300$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{30 \times 4300}{3000}$$

$$\Rightarrow x_3 = 43$$

$\therefore$ 43 మంది కూలీలకు 1 దినంలో రూ 4300 చెల్లించవలెను.

అభ్యాసం 8.5

1. క్రింది పట్టికలలోని వాటిలో ఎవి ల మధ్య అనులోమానుపాతం గలవో వ్రాయండి.

క)

x	12	8	36
y	72	48	216

ఖ)

x	2	3	4
y	4	9	16

గ)

x	5	10	15
y	10	15	20

ఘ)

x	48	24	12
y	24	12	6

2. క్రింది పట్టికలో అనుపాత నియమాన్ని అనుసరించి ఖాళీలను పూరించుము.

క)

x	10	18	☆
y	220	☆	484

ఖ)

x	14	2	☆
y	☆	4	76

3. చలన ధార ననుసరించి జవాబులను వ్రాయండి.

క) ఒక కర్మాగారలో ఒక వారం (ఆదివారం సెలవు) లో 840 డబ్బాల రంగు తయారగును అటువంటివి 4200 డబ్బాల రంగు తయారగుటకు ఎన్ని రోజులు పట్టును ?

ఖ) 12 మీటర్లు ఎత్తుగల స్తంభం నీడపొడవు 20 మీటర్లు ఉన్న సమయంలో 30 మీటర్లు పొడవు నీడ ఏర్పడుటకు ఎంత ఎత్తుస్తంభం అవసరమగును ?

గ) ఒక కుటుంబానికి వారానికి 10 కె.జీ బియ్యం ఖర్చు అగును. ఫిబ్రవరి 1 వ తేదీ నుండి 11 వ తేదీ వరకు మొత్తం ఎన్ని బియ్యం ఖర్చు అగును?

ఘ) ఒక పని చేయుటకు పనికి 60 బస్తాల ఇసుకతో పాటు ఎన్ని బస్తాల సిమెంటు అవసరటగును ?

ఙ) 30 మంది పిల్లల మానిఫారానికి రూ 2100 లు ఖర్చు అగును. అయిన 22 మంది పిల్లల కొరకు ఎంత ఖర్చు అగును.

8.5.2. ప్రతిలను పాతం -

క్రింది ఉదాహరణను చూడండి.

ఒక గోడను కట్టడానికి ఇద్దరు మనశులకు 6 దినములు పట్టును. ఒక్కొడే ఆ పని చేసినచో ఎన్ని దిములలో పూర్తి చేయును.

ఒక్కడే అయినచో $6 \times 2 = 12$ దినములలో పూర్తి చేయును.

4 గురు మనషులు అదే పనిని $12 \div 4$ దినములలో పూర్తి చేయునుయ

ఇచ్చట కూలీల సంఖ్య 2 వంతులు అగుట వలన దినముల సంఖ్య సగం అయింది.

క్రింది పట్టికలో చూడండి.

కూలీలసంఖ్య (x)	దినములల సంఖ్య (y)	కూలిలు దినములు $x \times y$
$x_1 = 2$	$y_1 = 6$	$x_1 \times y_1 = 2 \times 6 = 12$
$x_2 = 4$	$y_2 = 3$	$x_2 \times y_2 = 4 \times 3 = 12$

పై ఉదాహరణలననుసరించి ఏమి తెలుసుకున్నారు.

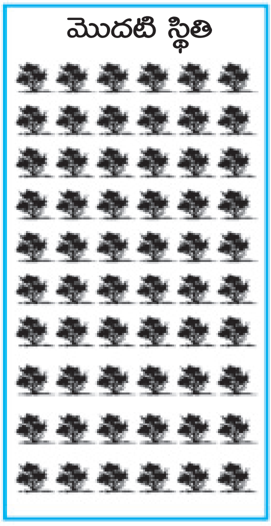
ఒక చలరాశి రెండు వంతువైనచో మరొక చలరాశి సగం అవుతుంది రెండు రాశుల మధ్యగల ఇటువంటి సనిందాని విలోమాను పాతం అంటారు. దీనిని క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

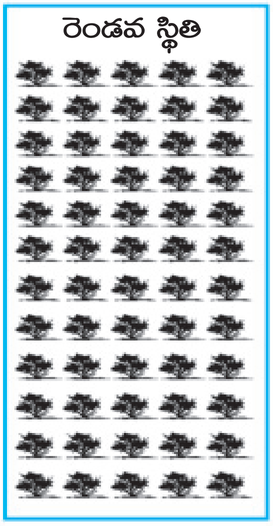
$$y \propto \frac{1}{x}$$

దీనిని x, y మధ్య విలోమానుపాతం కలదు అని చదవాలి. విలోమ సమ బుల్యతకు సంబంధించిన ప్రశ్నలకు సమాధానం చెపుటకై కింది సూచనలను ఉపయోగించుకొనవలెను.

ఉదాహరణ - 12

ఒక పూలతోటలో (ప్రక్కఫటం) ప్రతీ వరుసలో 6 చోపున మొత్తం 10 వరుసలలో పూల మొక్కలు నాటు బడినవి. ఒక వేళ ఆమొక్కలను 5 వరుసలలో నాటినచో ఒక్కొక్క వరుసలో ఎన్ని మొక్కలు ఉంటాయి? సమత్ముల్య ప్రణాళికలో జవాబును కనగొనండి.





సాధన - వరుస సంఖ్య (x) ప్రతీ వరుసలో మొక్కల సంఖ్య (y) వరుసల సంఖ్య పెరిగనచో అదే అనుపాతంలో ప్రతీ వరుసలోని మొక్కల సంఖ్య తగ్గిపోతుంది.

అందుచేత x, y ల మధ్య విలోమాను పాతంలో కలదు.

కావున $x_1y_1 = x_2y_2$...............(1)

మొదటి స్థితిలో వరుసల సంఖ్య $(x_1) = 10$

ప్రతీ వరుసలోని మొక్కలసంఖ్య $(y_1) = 6$

రెండవ స్థితిలో వరుసల సంఖ్య $(x_2) = 5$

ప్రతీ వరుసలోని మొక్కల సంఖ్య $(y_2) = ?$

సమీకరణంలో x_1, y_1, x_2 విలువలను ఉపోయగించి

$$10\times 6 = 5\times y_2$$

$$\Rightarrow 5\times y_2 = 10\times 6$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{10\times 6}{5} = 12$$

$\therefore$ ప్రతీ వరుసలో గల మొక్కలు = 12

ఉదాహరణ - 13

ఒక బస్సు కటక్ నుండి దేవగడ్ చేరుటకు 1 గంటకు 100 కి.మీ. వేగంలో ప్రయాణం చేసినచో 8 గంటలలో చేరుకోగలదు ? గంటకు 80 కి.మి. వేగంలో ప్రయాణం చేసినచో ఎన్ని గంటలలో చేరుకోగలదు ?

సాధన - ఈ నిర్దిష్టమైన దూరాన్ని దాటుటకై వేగం పెరిగినచో కాలం తగ్గుతుంది. కవున ఇచ్చట విలోమాను పాతంలో కలదు.

బస్సు వేగం గంటకు x కి.మీ. కాలం y గంటలు అనుకుందాం.

మొదటి వేగం x_1 = 100 కి.మీ./గంట

మొదటి కాలం $(t_2) =$ 8 గంట

రెండవ వేగం (x_2) = 80 కి.మీ./గంట

రెండవ కాలం $t_2 =$?

విలోమను పాతం ననుసరించి $x_1 t_1 = x_2 t_2$

$$100\times 8 = 80\times t_2$$

$$\Rightarrow 80\times t_2 = 100\times 8$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{100\times 8}{80}$$

$$\Rightarrow t_2 = 10$$

✍ సమాధనాలు వ్రాయండి

ఒక నీటి తొట్టెకు 12 పైపులు కలవు. 8 పైపులు తెరిచినచో తొట్టె 6 గంటలలో నిండుతుంది. అన్ని పైపులు ఒకే సారి తెరచినచో ట్యాంకు ఎంత సమయంలో నిండుతుంది.

సాధన -

పైపుల సంఖ్య పెరిగినచో తొట్టె నిండుటకు పెట్టు కాలం తగ్గుతుంది. ఇది విలోమచరత్వం. ఇచ్చట పైపుల సంఖ్యను x గాను సమయాన్ని t గంటలుగాను తీసుకోవాలి.

అభ్యాసం 8.6

1. క్రింది వాటిలో ఏఏవవి అనులోమను పాతంలోను, ఏవి విలోమాను పాతంలో కలవో వ్రాయండి.

   క) ఒక ఆనట్ట నిర్మాణానికి అవసరమైన కూలీలు, నిర్మాణం పూర్తి అగుటకు పటుట్ట కాలం.

   ఖ) ఒక ప్యాకెట్ లోని పదార్థం బరువు, దాని వెల.

   గ) స్కూటర్‌పై నిర్దిష్ట దూరం చేరుకొనుటకు పట్టుకాలం, వేగం, మధ్య సంబంధం.

   ఘ) నిర్ధిష్ట ఖర్చుతో ఏర్పాటు చేసిన విందులో పాల్గొన్న పిల్లల సంఖ్య, తలసరి సంఖ్య

   ఙ) ఒక నిర్ధిష్ట పరిమాణంలోని త్రాగునీటిని నింపుటకై సీసాల ఆకారం, సీసాల సంఖ్య.

2. కింది పట్టికలోని చలరశులను x, y గా తీసుకొని $\frac{x}{y}, xy$ ల విలువలను నిర్ణయించండి. వాటిమధ్య ఏ విధమైన సమతుల్యత గలదో తెలపండి.

ఒక నిర్ధిష్ట దూరాన్ని దాటుటకు గంటకు వేగం (x)	60	40	48
అదే దూరాన్ని దాటుటకు సమయం (y) గంటలు	4	6	5
$x \times y$			
$\frac{x}{y}$			

బంతుల సంఖ్య (x)	4	6	10	12
బంతి వెల (y)	48	72	120	144
$x \times y$				
$\frac{x}{y}$				

గ) ఒక డాబ్బాలోని నూనెను సమానంగా సీసాలలో నింపవచు

సీసా పరిమాణం లీటర్లలో (x)	2	3	5
సీసాల సంఖ్య (y)	15	10	6
$x \times y$			

3. క్రింది చలరాశులు x, y లలో విలోమానపాతం గలదు. పట్టికలోని చలరాశుల విటివలన కనుగొనండి.

x	72	90	60	x_1	40	x_2
y	10	8	y_1	15	y_2	20

4. క్రింది ప్రశ్నలకు సమాదానం వ్రాయండి.

క) ఇంటి నుండి బయట చేరి గంటకు 40 కి.మి. వేగంలో స్కూటర్‌పై వెళ్ళినచో రవి $2\frac{1}{2}$ గంటలలో ఆఫీసును చేరుకోగలడు. కాని 2 గంటలలో చేరుకోవలంటె ఎంత వేగంలో వెళ్ళవి.

ఖ) ఒక నీటి తొట్టెకు 5 పైపులు కలవు. 5 పైపులు తెరిచినచో 40 నిమిషాలలో తొట్టె నీటితో నిండుతుంది. కాని ఎన్ని పైపులు తెరిచినచో 50 నిమషాలలో అది నిండును.

గ) మీ బడిలో పరుగు వందెంలో 24 మంది పిల్లలు పాల్గొన్నారు. ఒక్కొక్కరికి 7 బిస్కట్లు పంచుటకై బిస్కట్లు తెచ్చారు. కాని మరో 4గురు అధికంగా పందెంలో పాల్గొన్నారు. అయిన ఒక్కొక్కనికి ఎన్ని బిస్కెట్లు పంచారు.

ఘ) ఒక్కొక్క అగ్గిపెట్టెలో 48 పుల్లలు ఇంచినచో మొత్తం $t \times s = d$ పుల్లలకై 56 పెట్టెలు అవసరముగును. కాని అగ్గి పుల్లలను 64 పెట్టెలలో ఉంచినిచో ఒక్కొక్క పెట్టెలో ఎన్ని పుల్లలు కలవు ?

8.5.3. బహుళ అనుపాతం -

మూడేసి చలరాశుల మధ్య సంబంధం గల కొన్ని పరిస్థితులు ఉంటాయి. ఒక పనిని కొంత మంది పనివారు ప్రతీ దినం కొన్ని గంటలు పనిచేస్తూ కొన్ని దినాలలో ఆ పనిని పూర్తి చేస్తారు.

ఇచ్చట ప్రతీ రోజు నిర్ధిష్ట సమయంవారు పనిచేస్తుంటారు. పని వారిసంఖ్యను పెంచినచో పని పూర్తి అగుటకు పట్టుకాలం తగ్గుతుంది. అందుచేత పనివారి సంఖ్య (x) పనిపూర్తి అగుటకు పట్టు దినముల సంఖ్య (y) లు పరస్పరం విలోమనుపాతంలో కలవు.

$\therefore x \propto \frac{1}{y}$ (ప్రతి దినం పనిచేయు సమయం z స్థిరంగా ఉండును

పని వారి సంఖ్య (x) ను స్థిరంగా ఉంచి పని చేయు గంటలు సంఖ్య z దినముల సంఖ్య y ల మధ్య పరస్పరం విలోమానుపాతంలో కలదు.

$\therefore y \propto \frac{1}{z}$ ప్రతి వారి సంఖ్య x స్థిరం)

ఈ స్థితిలో x, y, z ల మధ్య బహుల అనుపాతం కలదని గమనించాలి.

8.6. కాలము - పని -

బడి తోటలో పిల్లలు తోటపని చేస్తున్నారు. పూల మొక్కలు నాటుటకై కొన్ని బోదెలను నిర్మించాలి. పొడవు. వెడల్పు, సమానంగా ఉంటుంది. మొదట బోదెలలోని మట్టిగడ్డలను కొట్టి గుండ చేయవలెను. మట్టిని చదును చేయవలెను. తరువాత మొక్కలు నాటవలెను.

ఒక బోదె మట్టి తవ్వుటకు ముగ్గురు పిల్లలను నియమించడమయినంది.. మరొక దానికి ఇద్దరు పిల్లలను నియమించడమయినది. 3 పిల్లలు పని చేసిన పోదె పనిని 40 నిరుపాలలో పూర్తి చేశారు. కాని మరొక బోదె పని పూర్తికాలేదు.

పెద్ద తరగతికి చెందిన సమీర్‌ను పిల్లలు పనిచేయుటన పర్యవేక్షంచుటకై నియమించెను. రెండవ బోదె పనిమాత్రం పూర్తి కాలేదు. అతడు వెళ్ళి ఉపాధ్యాయునకు ఈ విషయం చెప్పాడు. ఉపాధ్యాయుడు వచ్చి చుసిన తరువాత ఎక్కువ మంది పనిచేస్తే ఆ పని తక్కువ కాలంలో అయిపోతుందని పని చేయు వారు తగ్గితే సమయం ఎక్కువ పడుతుందని చెప్పారు.

రెండవ బోదె పని పూర్తి అయిన తరువాత పిల్లలంతా తరగతి గదిలోనికి చేరుకున్నారు. ఆ తరువాత పరిమణంలో కలము పని గూర్చి ఉపాధ్యాయుడు వారికి బోధించెను.

ఏదైనా ఒక పని చేయునప్పుడు

- ఎంత మంది పని చేస్తున్నారు.
- వారు చేసే పనిలో కొంత పరిమాణం ఉంటుంది.
- పని చేయుటకు వారికి కొంత సమయం పడుతుంది.
- పని చేయువారికి కొంత సామర్థ్యం ఉంటుంది. అనగా వారు నిర్థిష్ట సమయంలో నిర్థిష్ట పరిమాణంలో పని చేస్తారు.

ఈ నాలుగు విషయాలను వినియోగించుకొని కాలము పనికి సంబంధించిన లెక్కిలను చేయగలం.

ఉదాహరణ -14

హాసిన 5 దినములలో 30 బొమ్మలను తయారుచేయగలదు. అటువంటి 32 బొమ్మలను ఎన్ని దినములలో తయారుచేయగలదు. కింది పట్టికను చూడండి.

హాసిన 5 దినములు పనిచేసెను	అతడు 20 బొమ్మలను తయారు చేసెను.
అతడు 5 దినములు పనిచేసినచో	మరొ 20 తయారుచేయులను
మరో 5 దినములలో	మరొ 20 తయారగును.

కాబట్టి (5ది + 5 ది) లేక 10 దినములలో (20+20) 40 బొమ్మలు తయాలుచేయును. అనగా 2 వంతులు పరిమాణానికి ఏని పరిమాణం 2 వంతులు అగును.

అదేవిధంగా అతడు (5+5+5) దినములు లేక 15 దినములలో తయారు చేసిన బొమ్మలు (20+20+20) లేక 60 అగును. కాలం మూడు వంతులు పని 3 వంతులు పెరిగింది. దీనిని బట్టి చూడగా కాలం ఎంత పెరుగుతుంది పని పరిమాణం అంతే పరిమాణంలో పెరుగుతుంది.

ఇచ్చట ఉన్నది విధోనం కలదు.

హాసిన 32 బొమ్మలను ఎన్ని దినాలలో తయారు చేయగలదో తెలుసుకోవాలి.

20 బొమ్మలు తయారు చేయుటకు 5 దినములు పట్టును.

ఒక బొమ్మ తయారు చేయుటకు $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$ దిన

32 బొమ్మలు తయారు చేయుటు $=\frac{1}{4}x32=\frac{32}{4}=8$ దినము.

ఈ ఉదాహరణ యందు కాలము - పని మధ్య సంబంధం కలదు

5 దినములలో చేసిన బొమ్మలు 20 బొమ్మలు

1దినములో చేసిన బొమ్మలు = $\frac{20}{5}=4$ బొమ్మలు

దీనిని బట్టి అతని సామర్ధం దినంలో 4 బొమ్మలు తయారుచేయుట.

1 గంటలో చేయు పని $=\frac{\text{మొతంపని}}{\text{పని చే యు వాపిసంఖ్య}}$

32 బొమ్మలు తయారు చేయుటకు పట్టుకాలం $=\frac{32}{4}$ దీ.

పని చేయుటకు పట్టు కాలము $=\frac{\text{మొత్తం పని}}{\text{ఒక దినంలో పని}}$

పని చేయుటకు పట్టు కాలం $=\frac{\text{పని పరిమాణం}}{\text{ప్రమాణకాలంలో పని}}$

పద్ధతి

పని వంతులు ఉంటే పని అని వంతులు ఉంటుంది. కావున ఇచ్చట కాలము t పని (x) మధ్య అనుపోమను పాతంలో కలదు.

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{x_1}{x_2} \qquad \text{----} (1)$$

ఇచ్చట మొదటి స్థితి $t_1 = 5$ ది $x_1 = 20$ బొమ్మలు

రెండవ స్థితిలో పని $x_2 = 32$ బొమ్మలు

సమి 1 లో విలువలను ప్రయోగించినచో $\frac{5}{t_2} = \frac{20}{32}$

$$\Rightarrow 5 \times 32 = 20 \times t_2$$
$$\Rightarrow 20 \times t_2 = 5 \times 32$$
$$\Rightarrow t_2 = \frac{5 \times 32}{20} = 8$$

∴ హాసిన్ 32 బొమ్మలను 8 దినములలో తయారుచేయును.

ఉదాహరణ 15

రమ ఒక పనిని 3 దినములలో పూర్తి చేయును. సలత్ అదే పనిని 6 దినములలో పూర్తి చేయును. రమ, సనత్ ఇద్దరూ కలిసి ఆ పనిని ఎన్ని దినములలో పూర్తి చేయగలరు ?

సాధన - రమ ఒక పనిని పూర్తి చేయు కాలం = 3 దిన

రమ 1 దినంలో చేయు పని $= \frac{1}{3}$ వంతు

సనత్ 6 దినములలో పనిని పూర్తి చేయును.

సనత్ 1 దినంలో చేయుపని $= \frac{1}{6}$ వంతు.

రమ, సనత్ దినంలో కలిపి చేయుపని $= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ వంతు

వారిద్దరు మొత్తం పని పూర్తి చేయుటకు పట్టు కాలం $= \dfrac{\text{మొత్తం పని}}{\text{ఒకరినంలో చేసినపని}}$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} \quad (\text{పూర్తిపని 1 అను})$$

$$= 1 \times \frac{2}{1} = 2 \text{ దినములు}$$

ఉదాహరణ 16

5 మంది 1 దినంలో 2 హెక్టార్ల పొలానికి నీరు పారుదల చేయగలరు. ఎంత మంది 1 దినంలో 6 హెక్టార్ల పొలానికి నీటి పారుదల చేయగలరు.

సాధన

పని చేసే వారి సంఖ్యను ఇచ్చట నిర్ణయించాలి. అందుచే మొదటి విషయంలో పని చేయు వారి సంఖ్య చివరిలో ఉంటుంది.

2 హెక్టారు పొలంనకు 1 దినములో నీరు పారుదుల చేయుటకు అవసరమైన వారు 5 మంది.

1 హెక్టార్ పొలానికి $\frac{5}{2}$ మంది.

6 హెక్టార్ల పొలానికి $\frac{5}{2}\times 6 = 15$ మంది.

కాలం స్థిరంగా ఉంటె పనిచేయువారు. పరిమాణం మధ్య అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది. దానిని అనుసరించి చలన ప్రణాలితో కూడ ప్రశ్నకు సమాధనం పొందవచ్చును.

ఉదాహరణ 17

ఒక పనిని ఫణి 30 దినములలోను బిరు 20 దినములలోను పూర్తి చేయగలరు. ఇద్దరూ కలిసి పనిని ప్రారంభించారు. కాని పని ప్రారంభించిన 2 దినములు తారువాత బిరు వెళ్ళిపోయాడు. అయిన పని పూర్తి అగుటకు మొత్తం ఎన్నిదినములు పట్టును ?

సూచన - ఇచ్చట ఫణి మొదటి నుండి చివరి వరకు పని చేశాడు కాని బిరు 2 దినములు తరువాత వెళ్ళి పోయాడు. బిరు చేసిన పని, మొత్తం పని నుండి తీసిన మిగిలిన పని ఫణి చేశాడు.

సాధన

బిరు 20 దినములలో చేయుపని 1

$\therefore$ 1 దినములో చేయు పని $= \frac{1}{20}$

బిరు 2 దినములలో చేయుపని $= \frac{1}{20}\times 2 = \frac{1}{10}$

$\therefore$ మిగిలిన పని $= 1-\frac{1}{10} = \frac{10-1}{10} = \frac{9}{10}$

ఫణి 30 దినములలో పనిని పూర్చి చేసెను.

ఫణి 1 దినములో చేయుపని $= \frac{1}{30}$

మిగిలిన $\frac{9}{10}$ వంతు పనిని ఫణి పూర్తి చేయాలి.

ఫణి చేయుటకు పట్టుకాలం $= \dfrac{\text{మొత్తం పని}}{\text{ఒక దినం పని}}$

$$= \frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{30}} = \frac{9}{10} \times \frac{30}{1} = 27$$

మిగిలిన పనిని ఫణి 27 దినములలో పూర్తి చేయును.

ఉదాహరణ - 18

దినమునకు 6 గంటలు చుప్పున 20 మంది ఒక పనిని 7 దినములలో పూర్తి చేయగలరు. దినమునకు 5 గంటల చొప్పున 28 మంది అదేపనిని ఎన్ని దినములలో చేయురు.

సాధన

మొదటి దినములనకు 6 గాం॥ చుప్పుటన 7 దినములలో పూర్తి చేయును.

వారు మొత్తం 7 × 6 = 42 గంటలలో పూర్తి చేయుదురు.

ఒక పనిని 20 మంది 42 గంటలలో పూర్తి చేయుదురు.

అదే పనిని 1 మనిషి 42 × 20 గంటలలో పూర్తి చేయును.

28 మంది ఆ పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టిన సమయం

$= \frac{42 \times 20}{28} = 30$ గంటలు

కాని దినములకు 5 గం పని చేయుదురు.

30 గంటలు $= \frac{30}{5} = 6$ దినములలో పూర్తి చేయుటకు

> మీకు తెలుసా ?
>
> దినములను గంటలను గంటలులో మార్చుకొనిన సులభంగా ఉంటుంది.

అభ్యాసం 8.7

1. ఒక బడిని నిర్మించేందుకు 20 మంది కూలీలు 13 దీనములు పని చేశారు. కాని 26 మందిని నియమిస్తే ఎన్ని దినములలో పూర్తి చేయగలరు ?
2 నిత్యానంద్ 6 దినములలో 20 బొమ్మలను తయారు చేయగలడు. అయిన 70 బొమ్మలను తయారు చేయుటకు ఎన్ని దినములు పట్టును.
3. సుజత మిగ్గంపై 4 పంచెలు నేయుటకు 20 దినములు పట్టును. అయిన 45 దినములలో ఎన్ని పంచెలు నేయగలదు.
4. ఒక వడ్రంగి 5 దినములలో రెండు అలమరాలను తయారుచేయుగలడు. అతడు ఎన్ని దినములలో 10 అలమరాలను తయారు చేయుగలడు.
5. ఒక వసతి గృహంలో 50 మంది విద్యార్థులకు 30 దినములకు సరిపోయే అహార పదార్థాలు గలవు. కొత్తగా 10 మంది వచ్చి వారితో చేరారు. అయిన ఆ ఆహారం వారికి ఎన్ని దినాలకు సరిపోతుంది.

6. 7 మంది కూలీలు ఒక రోడ్డును 8 దినములలో మరామత్తు చేయగలరు. ఒక వేళ 4 మంది ఆ పనిని ప్రారంభించినచో ఎన్ని దినములలో పూర్తి చేస్తారు.
7. 15 మంది రోజుకి 6 గంటలు పని చేసిన 8 దినములలో ఆ పనిని పూర్తి చేయగలరు. కాని 10 మంది కూలీలు ఆ పనిని 9 దినములలో పూర్తి చేయాలంటె రోజుకు ఎన్ని గంటలు పని చేయవలెను.
8. ఒక పడవలోని సామాన్లను 10 దినములలో దించుటకై 280 మందిని నియమించె కాని 3 దినములలో తరువాత మొత్తం సామన్లలో $\frac{1}{4}$ వంతును దించగలిగారు. ఇంకా ఎంత మందిని అధికంగా నియమించినచో సకాలంలో సామాన్లని దించివేగలరు.
9. ఒక పనిని రోహిత్ 20 దినములలో, సంబిత్ 25 దినములలోను పూర్తి చేయగలరు. వారిద్దరు కలిషి పనిని ప్రారంభించిన 5 దినముల తరువాత సంబిత్ పనిని విడిచి వెళ్ళిపోయును. అయినచో మిగిలిన పనిని అతడు ఎన్ని దినములలో పూర్తి చేయగలడు ?
10. టునా ఒక ఇంటికి రంగు వేయుటకు ప్రారంభించి 9 రోజులలో $\frac{3}{10}$ వంతు పూర్తి చేసిను టునా కాంచనతో కలిసి, మిగిలిన పనిని 7 దినములలో పూర్తిచేసిను అయిన కాంచన ఒక్కొక్క ఆ పనిని ఎన్ని దినములలో పూర్తి చేయుగలదు.
11. సంజు 2 గంటలలో 13 పేజీలును టైపు చేయగలదు. అయిన 195 పేజీలను టైపు చేయుటకు ఎన్ని గంటలు పట్టును.
12. 12 మంది పూరుషులు లేక 15 మంది స్త్రీలు ఒకపనిని 20 దినములలో పూర్తి చేయగలరు. కాని ఆ పనిని 8 మంది పురుషులు, 10 మంది స్త్రీలు కలసి ఎన్ని దినములలో పూర్తి తేయగలరు.

చెప్పి చూడండి.

- ప్రపంచ ప్రసిద్ధి గాంచిన కోణార్కు మందిరాన్ని చూశారా ?
- ఆ మందిరాన్ని 1200 మంది 12 సం॥ లో పూర్తి చేయగలిగారు.
- రాజు లాంగుల్య నర్సోంహదేవు ఎంత మందిని నియమించి యుండినచో 4 సం॥ లో పూర్తి అయి ఉండేది.

8.7 కాలం - దూరం

మనం నడుస్తూ సైకిల్ పైన, స్కూటర్ పైన ఇతర వాహనాల సహాయంతో ఒక చోటునుండి మరొక చోటుకు వెల్తు వస్తుఢటం. దీనిని (గతి) గమనం అంటారు.

గమనం సమయంలో -

మనం కొంత దూరాన్ని దాటుతుంటాం. ఈ దూరం తక్కువ లేక ఎక్కువ కావచ్చును.

కొంత దూరం దాటుటకై కొంత సమయం పడుతుంది. అదికూడా దూరాన్ని అనుసరించి తక్కువ లేక ఎక్కువ ఉంటుంది.

నడుస్తు ఒక గంటలో ఎంత దూరం ఎల్ల గలమో గంట సమయంలో అధిక దూరం వెల్ల గలుగుతారు. ఒక సమయం (ఒక గంట, ఒక నిమిషం, ఒక సెకండ్ లో దాటగల దూరాన్ని గతి యొక్క వేగం అంటారు. మన వేగం కూడా ఎక్కువ లేక తక్కువ ఉంటుంది.

అందుచేత గమనంలో పైన వేరొక్క మూడు (దూరం, కాలం, వేగం, చల రాశులకు సంబంధం గలదు. విట మద్య మద్య ఎటువంటి సంబంధం ఉన్నదో తెలుసుకుందాం రండి.

24

క నుండి ఖ వరకు గల రోడ్డు పోడవు 24 కీ.మి. రఘు సైకిల్ పై ఈ దూరాన్ని 3 గంటలలో దాటగలడు. అనగా క వద్ద బయట దేరి ఖ వద్దకు చేరుకొనుటకు అతనికి 3 గం॥ కాలం పడుతుంది. అయిన అతడు గంటకు ఎంత దూరం వెళ్ల గలుగుతున్నాడు ?

3 గంటలలో వేళ్లిన దూరం = 24 కీ.మి.

1 గంటలో వెళ్లిన దూరం = $\frac{24}{3}$ కీ.మి. 8 కీ.మి.

రఘు సైకిల్ నడిపించే వేగం = 8 కీ.మి./గంట

సునీత ఈ దూరాన్ని స్కూటర్ పై సగం సమయంలో దాటెను. అయిన సునీత స్కూటర్ వేగం ఎంత ?

$\frac{1}{2}$ గంటలో ప్రయాణం చేసిన = 24 కీ.మి.

$\therefore$ 1 గంటలో ప్రయాణం చేసిన దూరం $= 24 \div \frac{1}{2}$ $= 24 \times 2$ $= 48$

కబట్టి సునీత వేగం = 48 కీ.మి./గంట

24

రఘు వేగాన్ని ఎలా లెక్కంచాలి ?

రఘు వేగం = $\frac{\text{24 కి.మీ.}}{\text{3 గం.}}$

అనగా వేగం = $\frac{\text{ప్రయాణించిన దూరం}}{\text{ప్రయణించిన కాలం}}$

సునీత వేగం ప్రయాణించిన దూరం = $\frac{\text{ప్రయాణించిన దూరం}}{\text{ప్రయణించిన కాలం}}$

$\boxed{\text{వేగం} = \frac{\text{దూరం}}{\text{కాలం}}}$

మీకు తెలుసా ?
1 ప్రయాణ సమయం 1 గ. లేక 1 ని. లేక 1 సె. లో ప్రయాణం చేసిన దూరాన్ని వేగం అంటారు.

దూరం యొక్క ప్రయాణం కీ.మి., కాలం ప్రయాణం గంట అయిన చేవేగం ప్రయాణం గంటకు కీ.మి. అగును.

వేగం తెలుసుకొనుట అనునది ఒక భాగహర ప్రక్రియలు

- దూరం విభాజ్యం
- కాలం విభాజకం

చెప్పి చూడండి.
దూరం యొక్క ప్రమాణం మీటరు కాలం ప్రమాణం నిమిషం అయిన వేగం ప్రయాణం ఏమవుతుందో వ్రాయండి.

- వేగం భాగఫలం (శేషం లేదు)

విభాజ్యం = విభాజకం × భాగఫలం + శేషం (0)

$\boxed{\text{కావున దూరం= కాలం×వేగం}}$

కాలం, దూరం, వేగం ఈ మూడింటిలో రెండు తెలిసిన మూడవ దానిని తెలుసుకోగలుగుతాం. మనం పైన చెప్పుకున్న రెండు సూత్రాలలో ఏ ఒక్కదానిని ఉపయోగించిన రెండవ దానిని తెలుసుకోగలుగుతాం.

కాలం, దూరం, తెలిసినప్పుడు వేగాన్ని కనుగొనుట -

ఉదాహరణ 19

జాఫర్ 30 మీ దూరం స్కూటర్ పై 40 నిమషాలలో ప్రయణం చేయగలిగాడు. అయిన అతడు ఎంత లేగంతో స్కూటర్ నడిపించాడు.

సాధన -

సాధారణంగా వేగాన్ని గంటకు కీ.మి. గాలేక్కిస్తాం.

కావున దూరం కీ.మి. లలో ఉన్నప్పుడు కాలంల గంటలలో తీసుకోవలెను.

దూరం 30 కీ.మి.

$$\text{కాలం} = 40 \text{ ని} = \frac{40}{60} \text{ గం} = \frac{2}{3} \text{ గం}$$

$$\text{వేగం} = \frac{\text{దూరం కీ.మి.}}{\text{కాలం (గంట}}$$

$$= \frac{30}{\frac{2}{3}} = \frac{30 \times 3}{2}$$

$$= 45 \text{ (గంటకు)}$$

అనగా 1 గంటకు 45 కీ.మి. వేగంలో ప్రయాణం చేసెను. నిమషానికి వేగాన్ని మిటర్లలో లెక్కిస్తాం.

దూరం = 30 కీ.మి. = 30,000 మీ.

కాలం 40 నిమ

$$\therefore \text{వేగం} = \frac{\text{దూరం (మీటర్లు)}}{\text{కాలం (నీని)}} = \frac{30000}{40} \text{ నిమషానికి మీటర్లు}$$

$$= 7500 \text{ నిమషానికి మీటర్లు}$$

ఇచ్చట గంటకు కిలోమీటర్లలోనే వేగాన్ని తెలియచేయుట మంచిది. దాని వలన వేగాన్ని చిన్న సంఖ్య ద్వారా తెలియచేయుటగుతాం.

వేగం - దూరం తెలిసినప్పుడు కాలాన్ని కనుగొనుట

ఉదాహరణ -20

సురేష్ 1 గంటకు 12 కి.మి. వేగంతో ప్రయాణం చేసినచో 2 కి. 400 మీ. దూరాన్ని ఎంత కాలంలో దాటగలడు ?

సాధన -

దూరం = 2 కి.మి. 400 మీ.

$$= 2\frac{400}{1000} \text{ కి.మి.} = 2\frac{2}{5} \text{ కి.మి.} = \frac{12}{5} \text{ కి.మి.}$$

వేగం = గంటకు 12 కి.మి.

కాబట్టి

కాలం × వేగం = దూరం

$$\therefore \text{కాలం} \times 12 = \frac{12}{5}$$

$$\Rightarrow \text{కాలం} = \frac{12}{5} \div 12 = \frac{12}{5} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{5} \text{ గం॥}$$

$$\Rightarrow \text{కాలం} = 12 \text{ నిమి.}$$

కాలాన్ని t గాను వేగాన్ని s గాను దూరాన్ని d గాను ఉన్నచో కాలంలో

$$\boxed{s = \frac{d}{t},\ d = s \times t}$$

> మీకు తెలుసా?
> వేగం = గంటకు 12 కి.మీ అని చెప్పినా లేదా వేగం =12 కి.మీ గంటకు అని చెప్పినా ఒక్కటే.

ఒక నిర్ధిష్టమైన దూరాన్ని ప్రయాణం చేయుటకు వేగంలో మార్పు ఉన్నాచో కాలంలో కూడా మార్పు వస్తుంది. దానిని తెలుసుకుందాం రండి.

ఉదాహరణ 21

మమత గంటకు 12 కి.మి. వేగంలో ప్రయాణం చేసి కొంత దూరాన్ని 45 నిమిషాలలో దాట గలిగింది. బబిత గంటకు 10 కి.మీ. వేగంలో అదే దూరాన్ని ఎంత కాలంలో దాట గలదు ?

సాధన - ఇచ్చట ఇద్దరిది గతికి సంబంధించినది

మమత సైకిల్‌పై వెళ్ళటనప్పుడు

వేగం = 12 కి.మీ./కంటకు

$$\text{కాలం} \quad = 45 \text{నిమి.} = \frac{45}{60} \text{గం} = \frac{3}{4} \text{ గం}$$

$$\text{దూరం} \quad = t \times s = \frac{3}{4} \times 12 \quad = 9$$

బుబుని సైకిల్ పై వెళ్ళినప్పుడు

దూరం మునిపటి దూరం = 9 కీ.మి.

వేగం = 10 కీ.మి. / గంటకు

$t \times s = d$

$$\Rightarrow t = \frac{9}{10}$$

$$= \frac{9}{10} \times 60 = 54$$

మముని విషయంలో వేగం $(s_1) = 12$ కీ.మి. గంటకు

కాలం $(t_1) = 45$ నిమ

బుబుని విషయంలో వేగం $(s_2) = 10$ కీ.మి. గంటకు

కాలం $(s_2) = ?$

ఒక నిర్దిష్టమైన దూరాన్ని దాటునప్పుడు

$$s_1 t_1 = s_2 t_2$$

$$12 \times 45 = 10 \times t_2$$

$$10 \times t_2 = 12 \times 45$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{12 \times 45}{10}$$

$$= 54$$

మీకు తెలుసా?
వేగం (s) అధికం అయినచో సమయం (t) తగ్గను. మరియు వేగం (s) తగ్గినచో సమయం అధికం అగును. అందువలన వేగం(t) మరియు సమయం (s) మధ్య విలోమానుపాతం ఉండును

జవాబులు వ్రాయండి.

A, B ఒక నిర్ధిష్ట సమయంలో స్కూటర్‌పై బయలు దేరారు. A గంటకు 54 కీ.మి. వేగంతో బయట దేరి 36 కీ.మి. దూరంలో గల ఒక ప్రదేశాన్ని చేరుకొనెను.

B అదే సమయంలో 30 కీ.మి. దూరంలోని ప్రదేశాన్ని చేరుకొనెను. అయిన B వేగం ఎంత ?

చెప్పి చూడండి

సూమన్ వేగంతో ప్రయాణం చేస్తున్న ఒక ట్రెను పొడవు 500 మీ. అది లైటు స్తంబాన్ని వేగంగా దాటగలదా ? ఒక 300 మీ. గల లైటు 200 మీ. ప్లాట్ ఫారాన్ని వేగంగా దాట గలదా ?

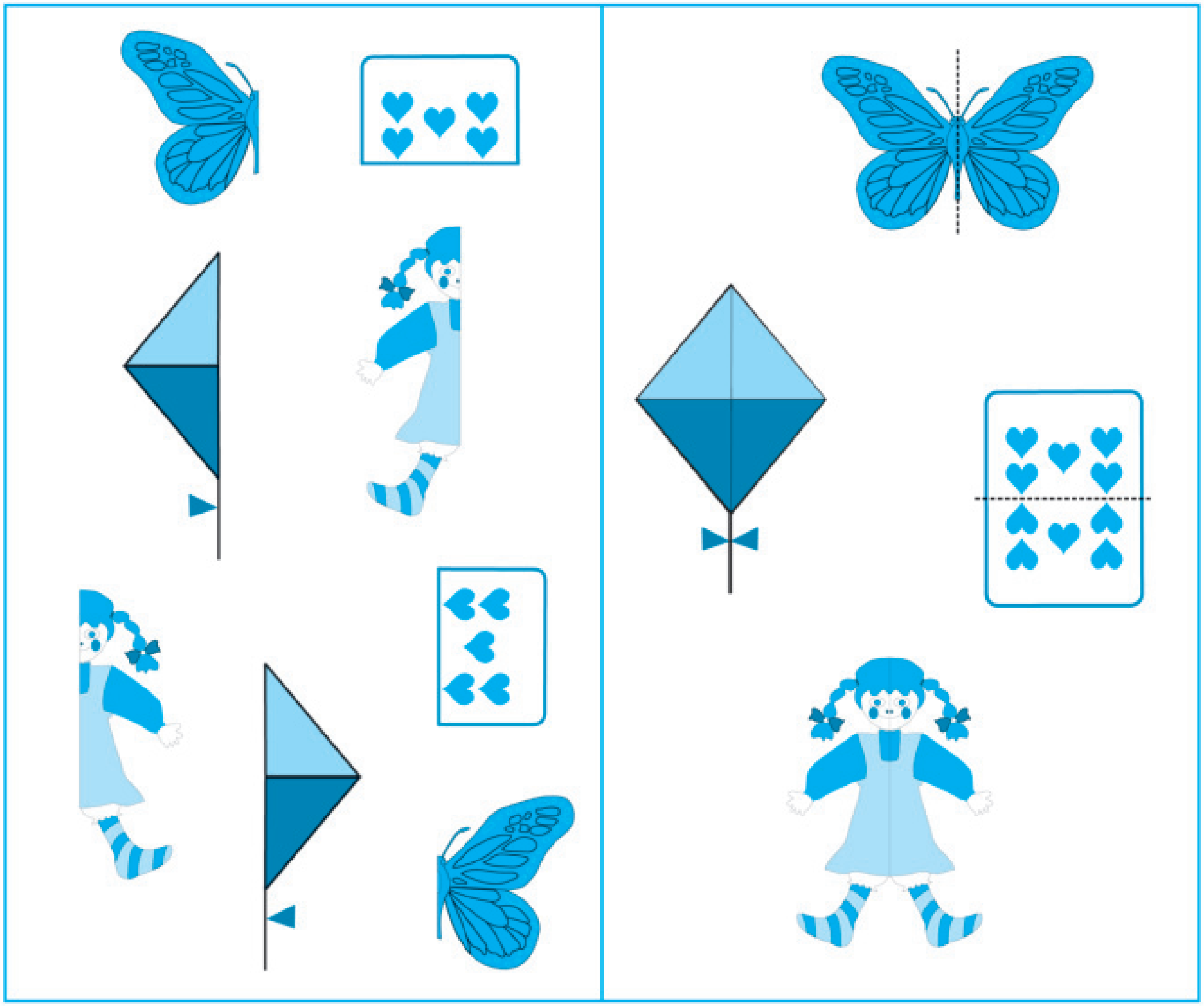
అభ్యాసం 8.8

1. స్కూటర్ పై గంటకు 40 కీ.మి. వేగంతో ప్రయాణం చేస్తే 800 ను దూరాన్ని ఎంత సమయంలో చేరుకోగలరు ?
2. 600 మి. పొడవు గల ఒక లైటు ఒక స్తంభాన్ని 40 సెకండ్లలో దాట గలిగినచో దాని వేగం ఎంత ?
3. కాలి నడకని 400 మీ. వంతెనను 5 ని. ల లో దాటగలిగినచో 2 గం. ల లో ఎంత దూరం పోగలరు ?
4. కిషోర్ 30 కీ.మి. వేగంతో 1 గం. ప్రయాణం చేసి 6 గం. లలో ఒక స్థానాన్ని చేరుకొనెను. ఎంత వేగంలో వెళ్లినచో 3 గం. లలో ఆ స్థానాన్ని చేరుకొవచ్చును ?
5. గంటకు 90 కీ.మి. వేగంలో వెల్తున్న రైలు ప్లాట్‌ఫర్మ పై నిలబడి ఉన్న ఒక వ్యక్తిని 20 సెం॥ లో దాటనచో రైలు పోడవు ఎంత ?
6. దీప్తి ఇంటి నుండి గంటకు 60 కీ.మి. వేగంలో 20 నిమ. ప్రయాణం చేసిన తరువాత గంటకు 72 కీ.మి. వేగంలో ప్రయాణం చేసి 30 ని.లలో ఆఫీసును చేరుకొనెను. ఇంటినుండి ఆఫిసు ఎంత దూరంలో ఉన్నది.
7. ఒక రైలు 30 సెకండ్లలో ఒక స్తంభాన్ని 300 మీ. వంతెనను 1 ని. లోను దాట గలదు. అయిన రైలు వేగమెంత ? రైలు పొడవెంత ?

సౌష్టవత - సర్వసమానత

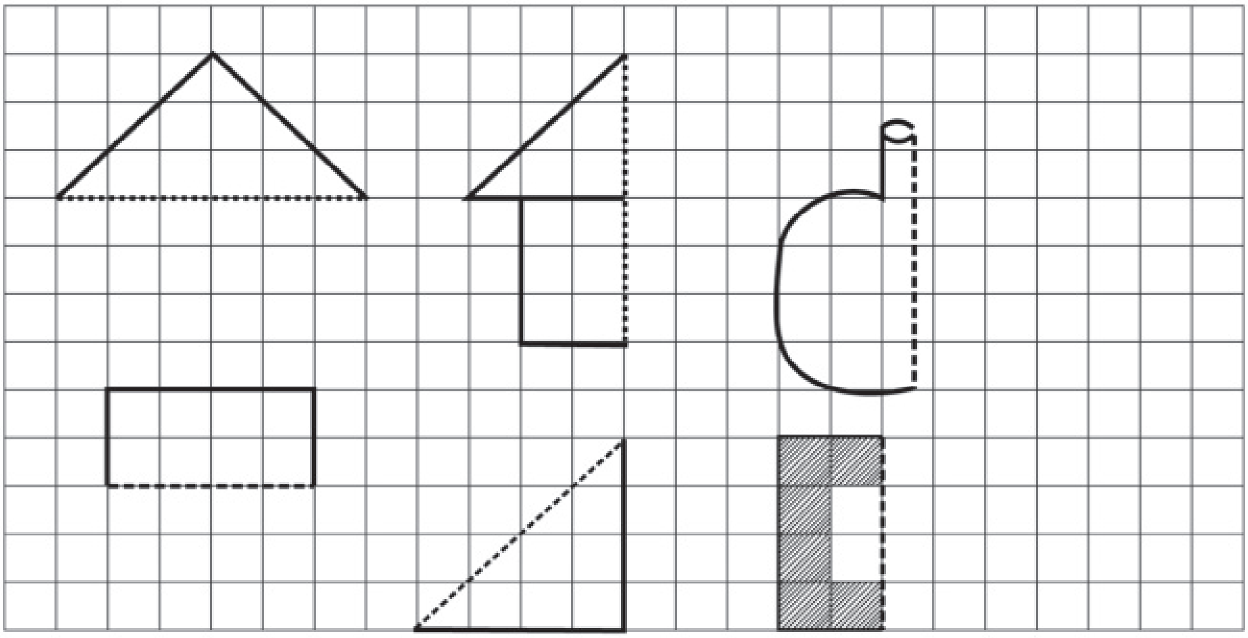
సరూపత -

సిను, లిను ఇద్దరు స్నేహితులు ఒక రోజు, లిను, సిను ఇంటికి వెళ్లెను. అక్కడ సిను పెట్టిలో కొన్ని బొమ్మల ముక్కలను చూశిను. ఈ బొమ్మలను ఎక్కడ నుండి తెచ్చెవు. అని లిను సినును అడిగెను. నేను వీటిని తయారు చేశాను అని సిను చెప్పెను. లిను బొమ్మల ముక్కలను జత చేయుటకు ప్రయత్నించెను. జత చేసిన తరువాత ఆముక్కలు క్రింది బొమ్మల్ల ఉండెను.



ఎడమ ప్రక్క గదిలో గల బొమ్మలను చూడండి. బొమ్మల మధ్య గల గీతలను చూడండి. ఏమి తెలుసుకున్నారు ? రాయుము.

లిను అడిగెను - నీవు ఈ విధమైన బొమ్మల్ని గీయగలిగావు. సిను చెప్పెను. మొదటి సీను గ్రాఫ్ కాగితంపై బొమ్మలలు గీశాను తరువాత అది అలవాటైపోయింది. సిను ఒక గ్రాఫ్ కాగితం తెచ్చెను. బొమ్మలును గీయసాగెను. సీను, నేను బొమ్మలను సగం గీస్తున్నాను. నీవు దానిని పూర్తి చేసి చూడు. ఏ విధమైన బొమ్మలు ఏర్పడుతున్నాయో బొమ్మలో చుక్కలున్న భాగం నుండి రెండవ ప్రక్క బొమ్మ వస్తుంది.



పైన చూసిన విధంగా మీరు స్వయంగా వాటిని దిగువున గల గ్రాఫ్ కాగితంపై గీయండి.

ఇవన్ని లిను నాన్నగారు చూశారు. అతను ఏ రేఖకు రెండు ప్రక్కల సమానం గల బొమ్మ ముక్కలు సమానంగా ఉంటాయో వాటిని ఏమంటారో తెలుసా ? అని అడిగారు.

మీకు తెలుసా ?

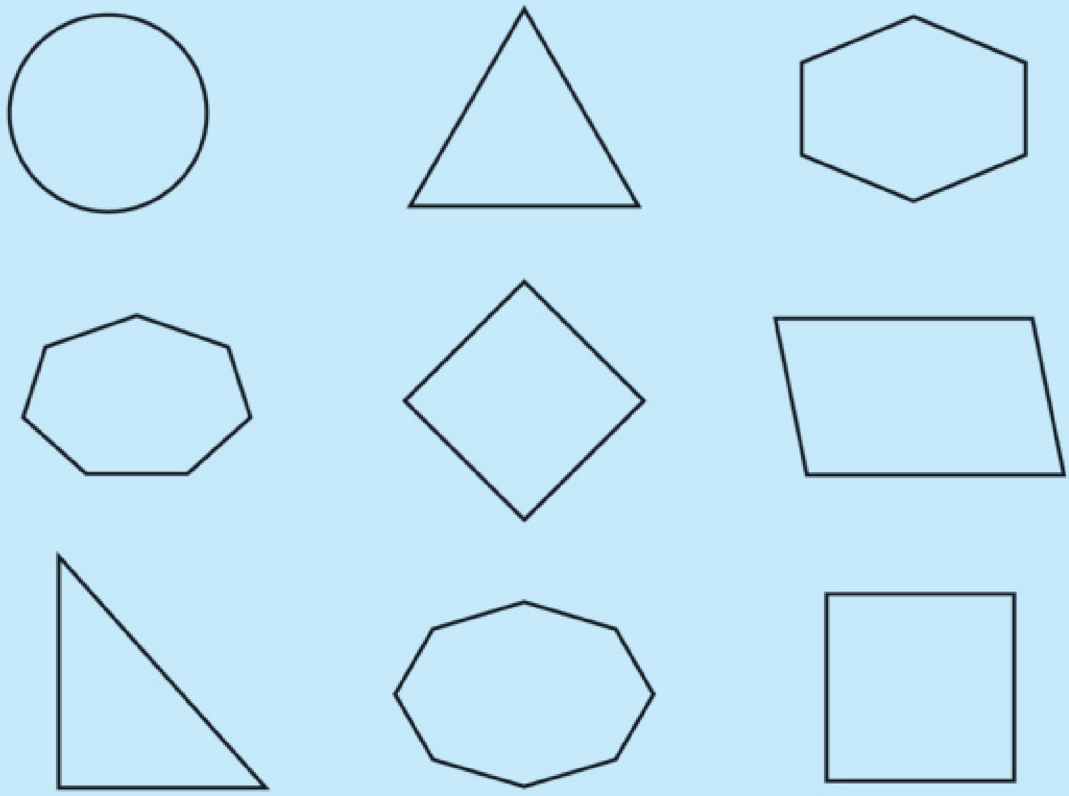
కొన్ని బొమ్మల మద్యగా గీత గీసినచో లేక మడత పెట్టినచో గీత లేక మడతకు ఒక ప్రక్కన గల బొమ్మ భాగం మరొక ప్రక్కగల భాగంతో కలసి పోయినచో దానిని సేర్ట రేఖ లేక సేర్టత్ అక్షర అంటారు.

బొమ్మ మద్యలో గల గీత లేక మడత పై అద్దం ఉంచినచో ఒక ప్రక్కన గల బఇమ్మ ప్రతిబింబం రెండవ ప్రక్కన గల బొమ్మతో పూర్తిగా కలిసిపోయినచో అరేఖ లేక మడతను సేష్టన రేఖ లేక ప్రసేష్టన అక్షర అంటారు.

చెప్పి చూడండి

మీ జ్యామెట్రీ బాక్స్‌లోని రెండు సెట్‌స్కేయర్లు సౌష్టవత అగునో చూడండి.
కారణం ఎమిటి?

క్రింట పటికలు స్టేవగునా కారణం వ్రాయుము.

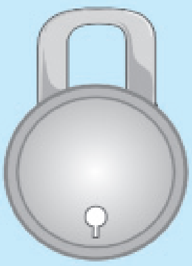


క) మీ చుట్టు ప్రక్కలందు ఉన్న వాటిలో ఏవి సేట్సక ఆకృతిని కలిగిఉన్నాయో పరిశిలించి ఐదింటిని వ్రాయుము.

ఖ) ఏ ఏ వస్తువుల అకారాలు కౌషపతి కలిగియుంటాయో తెలుసుకొని పెర్లను వ్రాయుము.

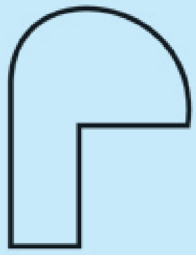
సేష్టపత కల అక్యతులు	సైఘుతతీని ఆకృతులు
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

క)



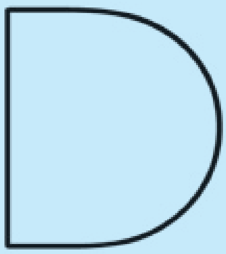
ఖ)

గ)

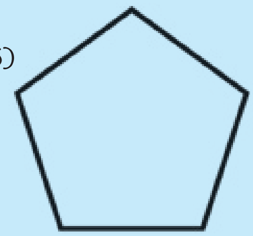


ఘ)

ఙ)

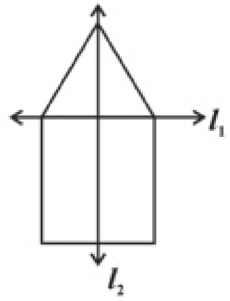


చ)



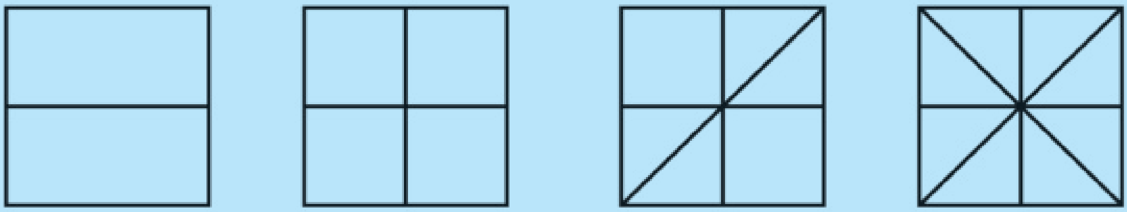
నాన్నగారు చెప్పారు కొన్ని బొమ్మలలో ఒకటి కంటె అధిక సేష్టవ అక్షాలు ఉ ంటాయి.

ప్రక్కన గల పటలను చూడండి l_1, l_2 ఏమి సేష్టవ అక్షమో గుర్తించండి.



ప్రయత్నించండి :

- చతురస్రాకారంలో ఉన్న కాగితాన్ని తీసుకొనుము. కింది పటంలలో వరుస క్రమంలో మడతలు పెట్టండి. మడత పూర్తి అయిన తరువాత ఎన్ని సేష్టవ అక్షంలు ఉన్నయో వ్రాయుము.

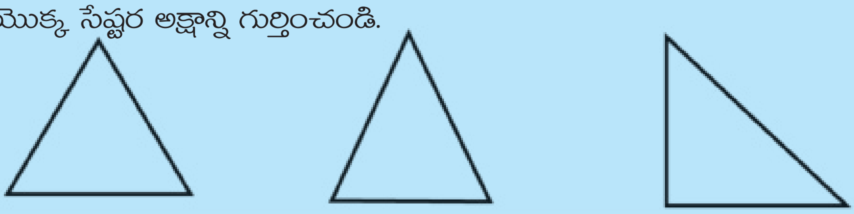


మొదటి పటం   రెండవ పాటం   మూడవ పాటం   నాల్గవ పాటం

- ఎన్ని సేష్టటన అక్షములు ఏర్పడ్డాయి.
- ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార కాగితాన్ని తీసుకొని మునుపటినలే మడతలు పెట్టండి.
- అందులో ఎన్ని సేష్టన అక్షాలు ఏర్పడతాయో చూడండి.
- చతురస్రాకరంలోని సేషటన అక్షాలసంఖ్య దీర్ఘ చతురస్రాకరంలోని సేష్టన అక్షాలసంఖ్య సమానమా ?
- స్నేహితులతో ఆలోచించి కారణాలను వ్రాయండి.

ప్రయత్నించండి. :

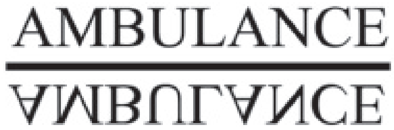
- సమబాహు, సమద్విబాహు, లంబకోణ, సమద్విబాహు, త్రిభుజకారంలోని కాగితాలను తీసుకొనుము. ప్రతి కాగితం యొక్క సేష్టర అక్షాన్ని గుర్తించండి.



మీకు తెలుసా ?

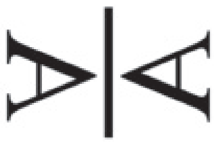
విషమ బాహు త్రిభుజనకు ఏ విధమైన సేష్టన అక్షాలు ఉండవు.

సిను గారి ఇంటిలో ఎఒనెక నెకారు బొమ్మ ఉన్నది. ఆ బొమ్మపై (ꓯMBՈꓶꓯИCE) అని రాసి ఉన్నది. సిను లిను దానిపై అక్షరాలును చేరిపి పోయారు. వాళ్ల నాన్న గారిని అడిగారు. నాన్నగారు ఒక అద్ధం తెండి దాన్ని బొమ్మలోని గీతను తాకునట్లు ఉండండి. అద్దం ముందు భాగం రాసిన దిశగా ఉండాలి.



చెప్పి చూడండి
AMBULANCE ని
అలా ఎందుకు రాస్తారు
అడిగి తెలుసుకొండి.

వాహనంపై (AMBULANCE) అని రాసి యుండడం చూసి వారిద్దరు అధిక ఆనందించారు. లిను ఒక కాగితంపై 'A' అని రాసి అద్దం ఎదుట వేరు వేరు దిశలలో ఉంచి చూడగా కింది విధంగా కనిపించింది.



మీరు మరి కొన్ని ఆంగ్ల అక్షరాలు ప్రతి బింబాలను అద్దంలో చూడండి వాటి ఆకారాలను వ్రాయండి. సిను, లిను వారి వారి పర్లను అద్దంలో చూచుటకై ప్రయత్నించండి.

ప్రయత్నించండి :

ఐదుగురు స్నేహితుల పేర్లు వ్రాయండి (ఆంగ్ల ఆక్షరాలతో వాటిని అద్దంనకు ఎదురుగా ఉంచండి. ఏ విధమైన ఆకృతులను చూస్తారో వ్రాయండి.

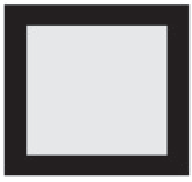
క్ర. సంఖ్య	పేరు (ఆంగ్ల ఆక్షరాలలో)	అద్దంలో ఎలో కనబడింది.
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		

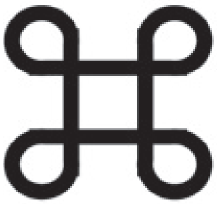
✍ అద్దం చుడుకుంట క్రింది పేర్లను ప్రయత్నించండి.

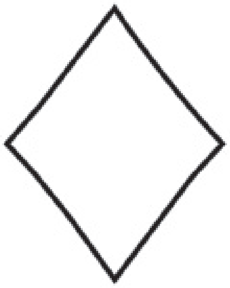
EINSTINE
JOSEPH
SIBA SUNDAR
TENDULKAR

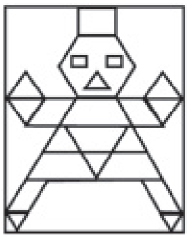
అభ్యాం 9.1

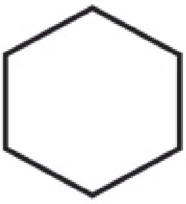
1. ప్రతి పటంనవు సేష్టర అక్షంను గీయండి. ఏ పటంనకు ఎన్ని అక్షాలు వస్తాయో వ్రాయండి. ఏ పటములకు సేష్టక అక్షాలు లేవు.

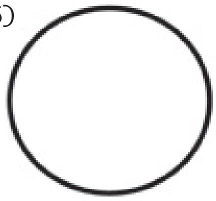
(క) 

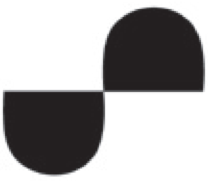
(ఖ) 

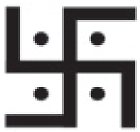
(గ) 

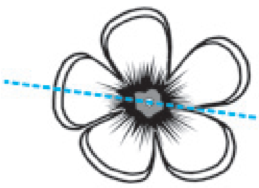
(ఘ) 

(ఙ) 

(చ) 

(ఛ) 

(జ) 

2. 

ఇందులో గీచిన గీత సేష్టక అక్షం అగునా ? అయినచో మిగిలిన అక్షాలను గీయండి.

3. ప్రతీ పటంలో ఉండే సేషవ అక్షాల సంఖ్య వాటికి కుడి ప్రక్కన గల గదులలో వ్రాయండి.

పటం పేరు	సేష్టవ అక్షాల సంఖ్య
సమబాహు త్రిభుజం	
సమద్విబాహు త్రిభుజం	
విషమ బాహు త్రిభుజం	
చతురస్రం	
దీర్ఘ చతురస్రం	
రాంబస్	
వృత్వం	
సమంతర చతుర్భుం	

4. కింద నీయబడిన పేర్లు అద్దంలో ఎలా కనబడతాయో చుసి వాటి ఎదురుగా వ్రాయండి.

GOPAL
RAMESH
MIRROR
RAJESH
EEMA

5. ఇంటిలో, బడిలో పరిసరాలలో కనిపించే వివిధ రకాల సేష్టవ ఆకృతులను సంపాదించి నోట్ పుస్తకంలో అంటించండి.

9.2. సర్వసమానత -

ఈ విభాగం నందు మనము సప్వసమానం గూర్చి పూర్తిగా తెలుసుకుందాం. త్రిభుజకారంలోని పటములలో సర్వసమానం చూలా ముఖ్యమైనది.


ప్రయత్నించండి :

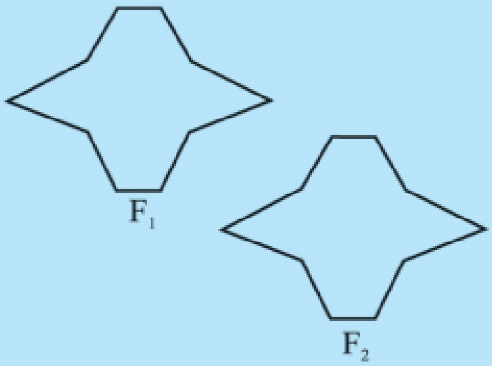
- ఒక రకంగా ఉండే రెండు తిపాళాబల్లలను సంపాదించండి.
- ఒక దానిపై మరొక దానిని ఉంచండి. ఏమి చూడగలరు ? వెలదటి బిళ్ల రెండవ బిళ్ల తో పూర్తిగా కలపి పోవుటను మీరు చూడగలుగుతారు. అనగా రెండు బిళ్లల ఆకారాలు, ఆకృతులు సమానంగా ఉంటాయి.
- ఏ రెండు తకాల బిళ్లలను తీసుకున్న వాటి ఆకారాలు, అకృతులు సమానంగా ఉంటాయి.
- సమాన ఆకారం, ఆకృతి తిపాలా బిళ్లలు పరస్పరం సర్వసమానాలు, సమతలంపై గల రెండు బొమ్మలు ఆకారాలు ఆక

మీ పరిసరాలలో గల వస్తువులలో సమాన ఆకారం, ఆకృతి గల వాటి బొమ్మలను సంపాదించి వాటి పేర్లను ఒక జాబితాగా వ్రాయుము.

చెప్పండి చూద్దాం.
రెండు జ్యామితి బాక్సుల నుండి 600, 300 కోణాలు గల రెండు సెట్‌స్క్వేయర్‌లను తీసుకొని ఒక దానిలో మరొక దాన్ని కలపండి. ఆ రెండు పూర్తిగా కలిసిపోతాయోమో చూడండి. రెండు సెట్‌స్క్వేయిర్లు సర్వసమానం అగునా ?

9.2.1. రెండు సమతల చిత్రాం సర్వసమానత -

ప్రయత్నించండి :



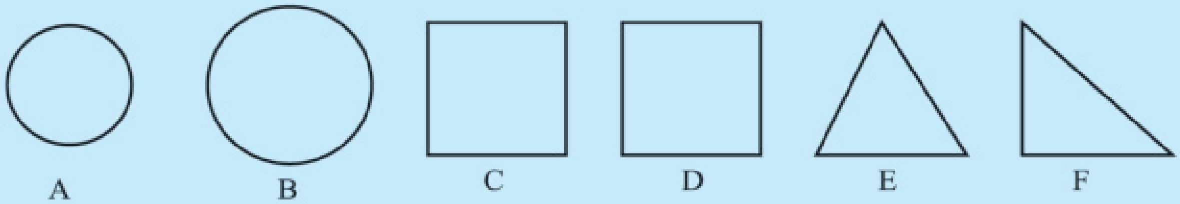
ప్రక్కన గల రెండు బొమ్మలను చూడండి.

ట్రేసింగ్ కాగితాన్ని తీసు కొనుము. దాని బొమ్మ పై ఉంచండి దాని ప్రతి రూపాన్ని ట్రేసింగ్ కాగితంపై గీయండి. ట్రేసింగ్ కాగితంపై గీసిన బొమ్మయొక్క అంచులను కత్తిరించండి. కత్తిరించిన ట్రేసింగ్ పేపరులోని బొమ్మను తో కలిపి చూడండి. రెండు బొమ్మలు పూర్తిగా కలిసిపోయాయా ! సరిగా కలిపితే ఆ రెండు కలిసి పోతాయి.

దీన్ని బట్టి మనం ఏం తెలుసుకున్నాం.

ట్రేసింగ్ కాగితం నుండి కత్తిరించిన బొమ్మ లో సర్వసమానం ట్రేసింగ్ కాగితం నుండి కత్తిరించిన బొమ్మ యొక్క ప్రతిరూపం అందుచేత బొమ్మలు సర్వసమానాలు.

కింది పటంలను పరిశీలించి పట్టికను పూర్తి చేయండి.



బొమ్మపేరు	ఆకృతులు సమానమా	ఆకారాలు సమానమా	ఆకృతి ఆకారాా సమానమా
(A)ల(B)			
(C)ల(D)			
(E)ల (F)			

అదే విధంగా రెండు సమాన పొడవులు గల చతురస్రాలు భుజం పొడవులు సమానమునచో ఆ రెండు బొమ్మలు పరస్పరం సర్వసమానమాలగును. రెండు సమాన వ్యాసార్థాలు గల వృత్తాలు కూడా పరస్పరం సర్వసమానములు.

F_1 ☺ F_2 $F_1 \cong F_2$

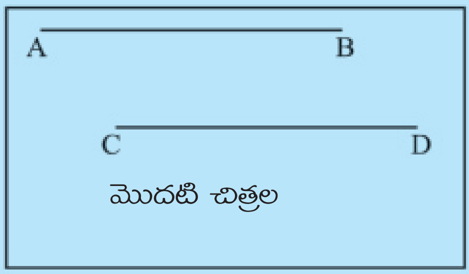
$\cong$

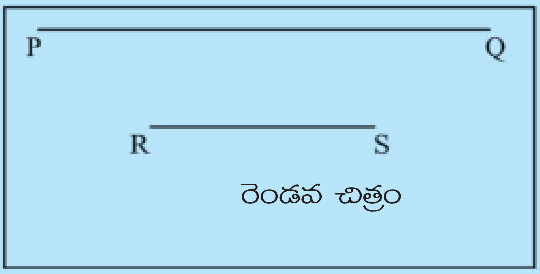
5 జతల సర్వసమానం గల చిత్రాలను గీయండి.

9.2.2 రెండు రేఖాఖండాల సర్వసమానత -

ప్రయత్నించండి. :

- రెండు రేఖా ఖండాం సర్వసమానతను పరీక్షంచుటకై క్రింది పనులు చేయవలెను.





ఒక ట్రెసింగ్ కాగితాన్ని తీసుకొండి దానిపై $\overline{AB}$ నకలును గీయండి.

$\overline{AB}$ నకలును $\overline{CD}$ పై ఉంచి చూడండి.

$\overline{CD}$ యొక్క ’C’ యొక్క ‘A’ ను కలపండి $\bar{A},\bar{B},\bar{C}$

కాబట్టి $\overline{AB}, \overline{CD}$ లు సర్వసమానాలని మనం తెలుసుకున్నాం.

రెండవ చిత్రంలో ట్రెసింగ్ కాగితంపై $\overline{PQ}$ నకలును గీయండి.

నకలు $\overline{PQ}$ బొమ్మలో P బిందువు R బిందువులతో కలుపుతూ ఉంచండి.

Q బిందువు S బిందువుతో ఒకటియ్యేనో ?

ఇచ్చట $\overline{PQ}$ లు $\overline{RS}$ సర్వసమానాలు.

ఉప్పుడు చెప్పండి

$\overline{AB}$ నకలు చిత్రం పూర్తిగా $\overline{CD}$ తో కలిసి పోయింది. కాని $\overline{PQ}$ నకలు చిత్రం $\overline{RS}$ తో కలియలేదు ? ఎందుచేత ?

$\overline{AB}, \overline{CD}$ ల పొడవు సమానం కానిచో $\overline{AB}$ నకలు $\overline{AB}$ తో కలిసియుండేది. కాదా ?

$\overline{AB}, \overline{CD}$ రేఖ ఖండాలు రెండింటి ఆకృతి ఒకటే. రెండింటి పొడవులుసమానం అగుటవల్ల వాటి ఆకారం సమానం.

అందుచేత $\overline{AB}, \overline{CD}$ లు సర్వసమానం

మనకు తెలుసు

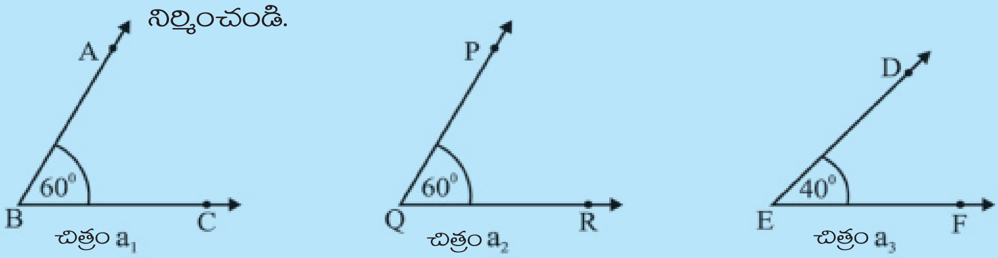
రెండు రేఖ ఖండాలు పొడవులు సమానం అయిన అవి సర్వసమానరేఖ ఖండాలు అంటారు.

9.2.3. కోణాల సర్వసమానత

కోణాల సర్వసమానత్వం గూర్చి కింది వాటిని చేద్దాం.

ప్రయత్నించండి. :

- ప్రొటక్టర్ సహాయంతో మూడు కోణాలు $m\angle ABC=60^0$, $m\angle PQR=60^0$ $m\angle DEF=40^0$ నిర్మించండి.



- ఒక ట్రేసింగ్ కాగితం తీసుకొని దానిపై $\angle ABC$ గీయండి.
- నకలు యొక్క $\overrightarrow{BA}$ ను $\angle PQR$ యొక్క $\overrightarrow{QP}$ తో కలపండి. $\overrightarrow{QR}$ తో $\overrightarrow{BC}$ కలిసి పోతుందా !
- దీని వలన మనం ఏమి తెలుసుకున్నాది.
  $m\angle ABC = m\angle PQR$, $\angle ABC \equiv \angle PQR$
- తిరిగి ట్రేసింగ్ కాగితంపై గీసిన $\angle ABC$ నకలు యొక్క $\overrightarrow{BA}$ ను $\angle DEF$ యొక్క $\overrightarrow{ED}$ $\overrightarrow{EF}$ తో $\overrightarrow{BC}$ కలపండి రేఖతో కలిసిందా.
  దీని వలన మనం ఏమి తెలుసుకున్నాం.
- $\angle ABC, \angle DEF$ లు పరస్పరం సమానం కావు.

$\therefore \angle ABC \quad \angle DEF$ $\qquad \angle ABC \cong \angle PQR$

చిత్రం a_1, a_2, a_3 ఆకృతులు సమానం కాని మూడింటి ఆకారాలు ప్రరిమాణం సమానం కాదు.

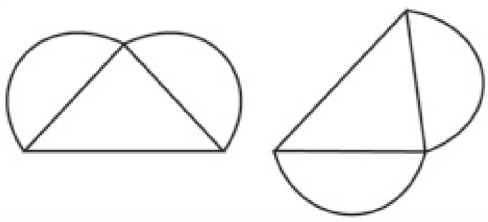
చిత్రం a_1, a_2 అకృత్తి ఆకారం సమానం అందుచేత $\angle ABC \cong \angle PQR$ మనకు తెలుసు.

రెండు కోణాల పరిమాణం సమానమైనచో ఆ రెండు కోణాలు సర్వసమానంలు.

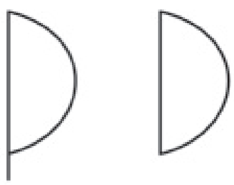
అభ్యాసం 9.2

1. ప్రతి జత బొమ్మలలో ఒక దాన్ని నకలును గీచి, దాన్ని ఆ జతలోని మరొక బొమ్మపై ఉంచి రెండు బొమ్మలు సర్వసమానం అగునో ? కాదో చూడండి.

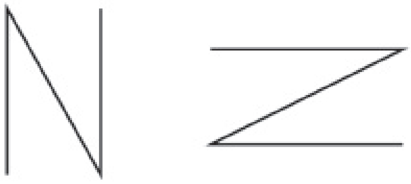
(a)



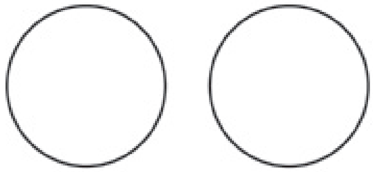
(b)



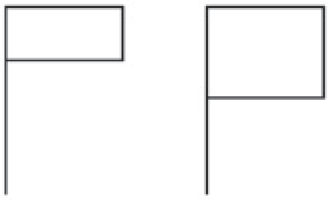
(c)



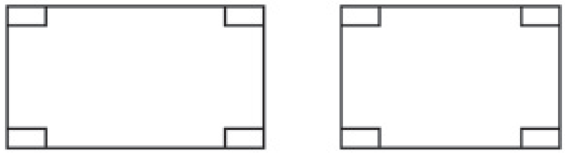
(d)



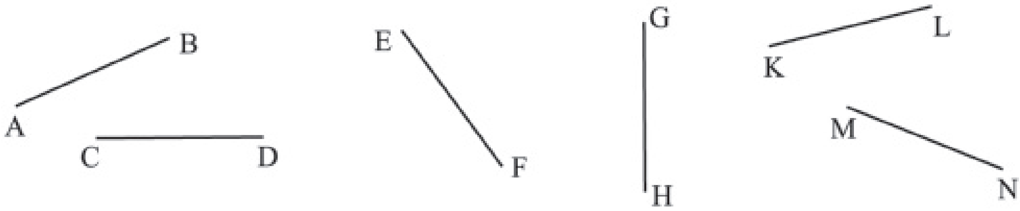
(e)



(f)



2. క్రింది రేఖా ఖండాలలో ఏవి సర్వసమసనాలు !



3. $\overline{AB}$ లో సెం.మీ. ఉండునట్లు $AB = 4.6$ రేఖాఖండాన్ని గీయండి.
$\overline{CD}$ ఉండునట్లు $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ రేఖాఖండలెన్ని గీయండి.

4. క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయండి.
   క) ఏ నియమాల వలన రెండు రేఖాఖండాలు సర్వసమానమగును ?
   ఖ) రెండు వృత్తాలు సర్వసమానం అని ఎలా తెలుసుకోగలం ?
   గ) రెండు కోణాలు సర్వసమానం అని ఎలా తెలుసుకోగలం ?
   ఘ) ఏ పరిస్థితిలో రెండు చతురస్రాలు సర్వసమానం అగును !

5. రెండు సర్వసమానములు గల వృత్తాలను గీయండి. అందులో ఒకదానిలోపల భాగానికి న్రలుపు రంగు వేయండి. మరొక దాని లోపల భాగానికి పచ్చరంగు వేయండి.
   క) రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాల వ్యాసార్ధాల పోడవులను కొలవండి.
   ఖ) రెండు వృత్తాల వ్యాసార్ధాల మధ్య ఏ భేదం కలదు ?
   గ) ఇప్పుడు రెండు వృత్తాల వ్యాసాలు రెండు సర్వసమానాలు ! పరీక్షించి చూడండి.
   ఘ) రెండు సర్వసమానత గల దీర్ఘ చతురస్రాలను గీయండి. వాటి చుట్టు కొలత మధ్య ఎట్టి భేదం కలదు ?

9.3. త్రిభుజాల సర్వసమానత
9.3.

త్రిభుజం యొక్క వివిధ భాగాలను గూర్చి ఇది వరకు మీరు తెలుసుకున్నారు. త్రిభుజానికి మూడు శీర్షబిందువులు, మూడు కోణాలు మూడు భుజాలు ఉంటాయన్న విషయం మీకు తెలుసు. అందుచేత త్రిభుజ ఆకారం దాని భుజాలు, కోణాల పరిమాణంపై ఆధారపడియుండును. రెండు త్రిభుజాల ఆకృతులు ఒకటే ఎందుకనగా ఆ రెండు మూడేసి భుజాలు కలిగియుంటాయి. వాటి ఆకారాలకు సంబంధించి ఏం తెలుసుకుంటె అవి సర్వసమానము ఆగునో కాదో తెలుసుకోగలమో చెప్పండి.


ప్రయత్నించండి :

60^0-30^0 సెట్ స్కేయర్‌ను గాకితంపై ఉంచి దాని అంచులను తాకుతూ రెండు త్రిభుజాలు నిర్మించండి. ఆ రెండింటికి ABC, PQR అని పేరు పెట్టండి.

ఒక ట్రేసింగ్ కాగితంపై ΔABC నకలును గీయండి. దాన్ని ΔPQR తో కలపండి. ఎన్ని రకాల ΔABC నకళ్లను ΔPQR తో కలపగలమో చూడండి.

దానిని మూడు రకాలుగా మనం చేయగలం.

ΔABC యొక్క నకలు తీసుకొని ΔPQR పై కింది విధంగా. ఉంచుటకు : ప్రయత్నించవలెను.

మొదటిసారి- A తో P, B తో Q, C ని R ను కలపాలి.

మొదటిసారి- A తో Q, B తో R, C ని P ను కలపాలి.

మొదటిసారి- A తో R, B తో P, C ని Q ను కలపాలి.

ఎన్నోసారి ΔABC నకలు శీర్షబిందువు ΔPQR శీర్షబిందువులను తాకాయి ?

మొదటి సారి ΔABC తో పూర్తిగా కలిసి పోయింది.

A శీర్షబిందువు P శీర్షబిందువుతోను B శీర్షం Q శీర్షంతోను.

A శీర్షం P శీర్షంతోను కలిసి పోయింది.

కావున అని మనం తెలుసుకున్నాం.

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

తెలుసా !

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అయినచో

$\Delta ABC \cong \Delta QPR$ వ్రాయడం సరికాదు

$\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ వ్రాయకూడదు.

• **గుర్తుంచుకొండి.**

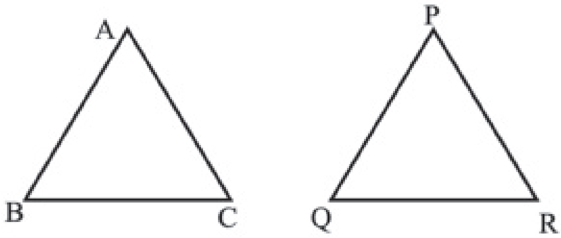
రెండు సర్వసమానత గల త్రిభుజాలు పరస్పరం కలియు శీర్షబిందువు అనురుప శీర్షబిందువులను, పరస్పరం కలుయు భుజాలను అనూరుప భుజాల పరస్పరం కలియు కోణాలను అనురూప కోణాలని అంటారు.

అందుచేత $\Delta ABC, \Delta PQR$ లలో

అనురూప శీర్ష బిందువులు : $A \& P, B \& Q, C \& R$

అనురూప భుజాలు : $\overline{AB} \& \overline{PQ}, \overline{BC} \& \overline{QR}, \overline{CA} \& \overline{RP}$

అనురూప కోణాలు : $\angle A \& \angle P, \angle B \& \angle Q, \angle C \& \angle R$



మనము తెలుసుకున్నాం.

సర్వసమాన త్రిభుజాల అనురూప భుజాలు సర్వసమానాలు $\overline{AB} \cong \overline{PQ}, \overline{BC} \cong \overline{QR}, \overline{CA} \cong \overline{RP}$

అనురూప కోణాల సర్వసమానత $\angle A \cong \angle P, \angle B \cong \angle Q, \angle C \cong \angle R$

మీకు తెలుసా ?

Δ ABC Δ PQR ల సర్వసమానతను వ్రాయునప్పుడు శీర్ష బిందువుల పేర్లను అనురూప శీర్షాల క్రమంతో వ్రాయండి.

✍ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ అయినచో రెండు త్రిభుజాలలో ఏఏ భాగాలు సర్వసమానాలు ?

శీర్షబిందువు A అనురుపబిందువు D, B అనురూప బిందువు E, C అనురూప F బిందువు

$\angle A$ అనురూప కోణం $\angle D, \angle B$ అనురూప కోణం $\angle E$

$\angle C$ అనురూప కోణం $\angle F$

$\overline{AB}$ అనురూప బిజం $\overline{DE}, \overline{BC}$ అనురూప భుజం $\overline{EF}$

$\overline{CA}$ అనురూప భుజం $\overline{FE}$

✍ Δ DEF Δ KLM సర్వసమానములైనచో క్రింది ఖాళీలను పూర్తి చేయండి.

క) $\overline{DE} \cong$ ____ ఖ) $\angle F \cong$ ____

గ) $\angle L \cong$ ____ ఘ) $\overline{KM} \cong$ ____

ఙ) $\overline{ML} \cong$ ____

మీకు తెలుసా ?

సర్వసమాన త్రిభుజాల విషయంలో గుర్తును $\leftrightarrow$ వినియోగించుకొని అనురూప శీర్షాలను వరుసలో రాయవలెను. అవి $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$

అభ్యాసం 9.3

1. $\Delta PQR, \Delta LMN$ లు సర్వసమానములైనచో కింది ఖాళీలను పూరించండి.

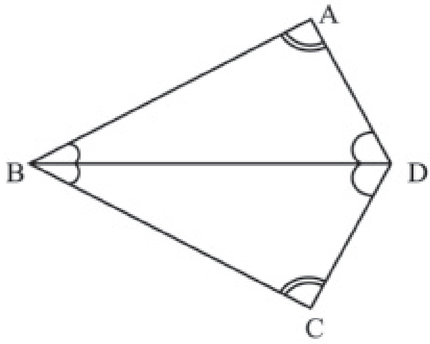
క) Δ PQR $\cong \Delta$........, Δ QRP $\cong \Delta$........

ఖ) P$\leftrightarrow$ ...., $\overline{QR}$..........

గ) $\overline{PQ} \cong$ ...., $\overline{QR} \cong$ ....

ఘ) $\overline{PQ}$ ...., $\angle R$ ....

2. పటంను చూసి ఖాళిలను పూరించుము.



Δ ABD $\cong$ ....

$\overline{BC}$ యొక్క అనురూప భుజం ....

$\overline{AB}$ $\cong$........

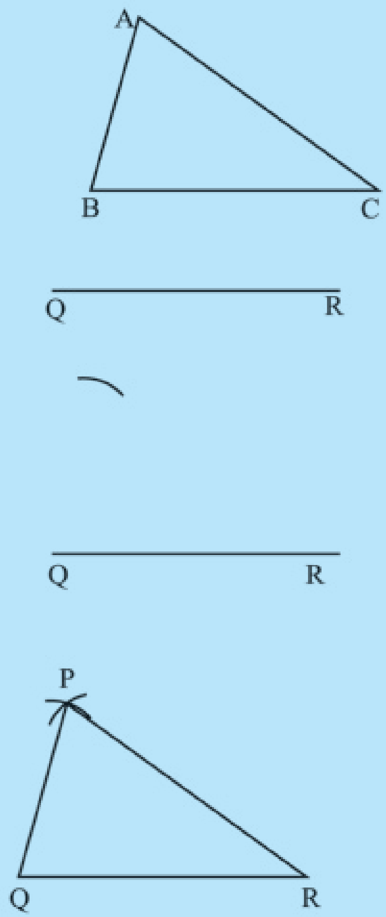
$\overline{AD}$ యొక్క అనురూప భుజం ....

9.3.1. త్రిభుజల మధ్య సర్వసమానతా నియమాలు.

రెండు త్రిభుజాలలో ఒకదాని భుజాలు మరొక త్రిభుజ యొక్క భుజాలతో సమానముగుటతో పాటు ఒక దాని మూడు కోణాలు మరొక త్రిభుజం యొక్క అనురూప కోణాల మూడుంటిలో సమానం అయినచో ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములగుటను గూర్చి తెలుసుకుందాం.

క్రింది కొన్ని నియమముల వలన రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం కావచ్చు ఆ నియముములు గూర్చి తెలుసుకుందాం.

ప్రయత్నించండి. :



- ఒక డ్రాయింగ్ కాగితంపై ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి (పటం క) దాని పేసు ΔABC అనుకొనుము. ఆ కాగితంపై $\overline{BC}$ పోడవు తో సమాన పోడవు గల రేఖ ఖండాన్ని గీయండి. దాని పేరు $\overline{QR}$ అనుకొనుము. (పటం - 21)
- వృత్త లేఖిని తీసుకొని $\overline{AB}$ పొడవుతో సమాన వ్యాసార్థం తీసుకొని ను కొంద్రంగా చేసుకొని ఒక చపాన్ని గీయండి.
- తలిగి వృత్తలేఖిని సహాయంతో $\overline{AC}$ పొడవుతో సమానంగా గల వ్యాసార్థాన్ని తీసుకొని R ను కేంద్రంగా చేసుకొని మునుపటి చాపాన్ని ఖండించునట్లు మరొక చపాన్ని గీయండి (బొమ్మ ఘ)
- ఆ రెండు చాపాల ఖండన బిందువును P అనుకొనుము.
- ఇప్పుడు $\overline{PQ}, \overline{QR}$ లను కలుపుము ΔPQR లబించును.
- ఇది ABC త్రిభుజం యొక్క సేప్టన నకటి అపుతుంది.
- దీనిని ΔPQR పై ఉంచండి. అది ΔABC యొక్క శీర్ష బిందువుపై ΔPQR యొక్క శీర్ష బిందువు P ఉండవలెను. ఏమి గమనించారు.

ఇప్పుడు చెప్పండి

ΔABC యొక్క ఏ భాగాలు కొలతలతో ΔPQR ను నిర్మించవచ్చును. $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ ల పొడవును ఉపయోగించుకొని ΔPQR ను నిర్మించబడినది. ఇప్పుడు ప్రొటక్టర్ ను ఉపయోగించుకొని రెండు త్రిభుజాల కోణాలను కొలవండి దిగువున వ్రాయండి.

m∠A = ..., m∠B = ..., m∠C = ...

m∠P = ..., m∠Q = ..., m∠R = ...

క్రింది పట్టికలోని ఖాళీలను పూరించుము.

Δ ABC Δ PQR భుజాల మధ్య సంబంధం (నిర్మాణ క్రియంలో మనం తెలుసుకున్నవి)	Δ ABC Δ PQR కోణాల మధ్య సంబంధం (మనం కొలిచినవి)
$\overline{AB}$ ≅ .... $\overline{BC}$ ≅ .... CA ≅	∠A ≅ .... ∠B ≅ .... ∠C ≅ ....

రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం అయ్యును.

Δ ABC ≅ Δ PQR

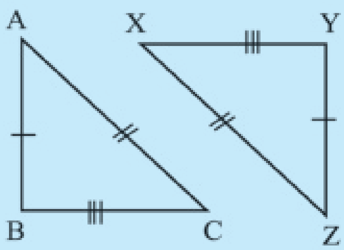
ఇచ్చట రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములు అగుటకు అవసరమైన కనీస నియమములు ఏమి ?

౦౦డు త్రిభుజలలో ఒక త్రిభుజం యొక్క భుజల పొడవులు మరొక త్రిభుజం భుజం పొడవులతో సమానమైనచో ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములగతో సర్వసమానత యొక్క ఈ నియమమును భుజం - భుజం - భుజం క్లుప్తంగా భు - భు - భు - సర్వసమానత నియమాల అంటారు.

స్వయంగా సమాధానం చెప్పేందుకు ప్రయత్నించండి.

1. Δ PQR Δ LMN లలో ఏ భుజాలు అనురుపాలు.

2. ప్రక్కన గల రెండు త్రిభుజాలలో ఏ ఏ భుజాల పొడవులు సమానం వాటిని గుర్తించండి.



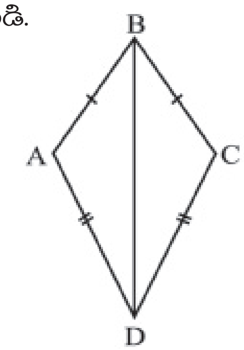
క) బొమ్మలోని రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలా ?

ఖ) ఒక వేళ పై ప్రశ్నకు జవాబు అవును అయినచో ఏ సర్వసమాన నియమం వలన అవి సర్వసమానములగును.

గ) ఒక వేళ (క) జవాబు అవును అయినచో సర్వసమాన సంకేతం ఉపయోగించి రెండు సర్వసమాన త్రిభుజల పేర్లను వ్రాయండి.

అభ్యాసం 9.4

1. పక్క ఫటంలో, $\overline{AB}=\overline{CD}, \overline{AD}=\overline{CD}$ క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయండి.



క) $\Delta ABD, \Delta CBD$ లలో ఏ ఏ భుజాలు సర్వసమానాలు?

ఖ) ఫటంలో గల $\Delta ABD, \Delta CBD$ లు సర్వసమానాలు ?
మీ జవాబు అవును అయినచో కారణాలు వ్రాయండి.
కాదు అయినచో కారణాలు వ్రాయండి.

గ) $\Delta ABD, \Delta CBD$ లలో ఏ ఏ కోణాలు సర్వసమానాలు ?

ఘ) $\overline{BD}$ ఏ ఏ కోణాలను సమద్విఖండన చేయుటు ?

ఙ) $\Delta ABD = \Delta BDC$ గా వ్రాయవచ్చునా ? కారణంతో జవాబు వ్రాయండి.

2. రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలను నిర్మించి సర్వసమాన త్రిభుజాలోని భుజాలకు ఎదురుగా ఉండె కోణాలు అనురూపాలు అని భుజావు చేయండి.

$\Delta ABD = \Delta PQR$ లలో $AB = PQ, BC = QR$

క) CA తో ΔPQR యొక్క ఏ భుజం పొడవులో సమానైనచు
$\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అగును?

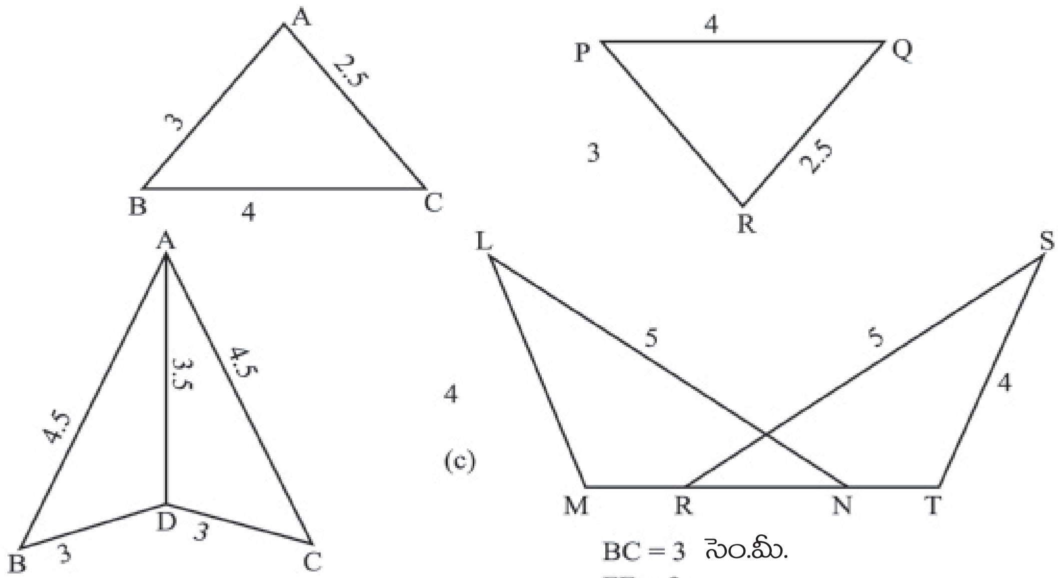
ఖ) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అయినచో ఖాళీలను పూర్తి చేయండి.

శీర్ష బిందువు A యొక్క అనురూప కోణం ....

శీర్ష బిందువు B యొక్క అనురూప కోణం ....

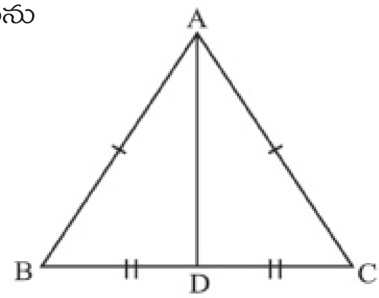
శీర్ష బిందువు C యొక్క అనురూప కోణం C.....................

3. క్రింది ఫటంలలో భుజం - భుజం - భుజం సర్వసమానత నియముమలను అనుసరించి గీయబడిన ఫటంల పేర్లను వ్రాయండి.



BC = 3 సెం.మీ.
FE = 3

4. ప్రక్కన గల పటం $AB = AC$ ఈ $D, \overline{BC}$ యొక్క మధ్యగతరేఖ ఫటంను చూసి క్రింది ఖాళీలను పూరించండి.



$\Delta ADB \cong \Delta$ ______

$\angle ABD \cong \angle$ ______

$\angle BAD \cong \angle$ ______

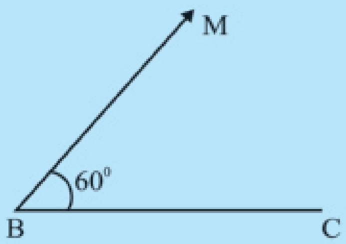
$\angle ADB \cong \angle$ ______

రెండు భుజాలాల సర్వసమానం యొక్క మరొక నియామము గూర్చి తెలుసుకుందాం.

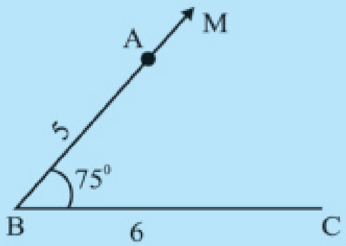
ప్రయత్నించండి :

మీ నోట్ పుస్తకంలో కింది సూచనలను అనుసరించి నిర్మాణము చేయండి.

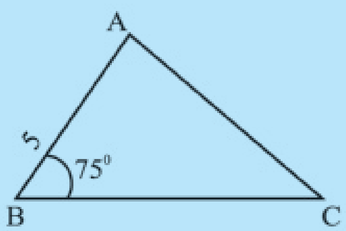
- 6 సెం.మి. గల ఒక రేఖాఖండాన్ని నిర్మించి దాని పేరు $\overline{BC}$ అనుకొనుము (ఫటం క)



- ప్రోట్రక్టర్ సహాయంతో $\overrightarrow{BM}$ ను నిర్మించండి. దీని వలన $m\angle CBM = 60^0$ ఉండవలెను (ఫటం ఖ)

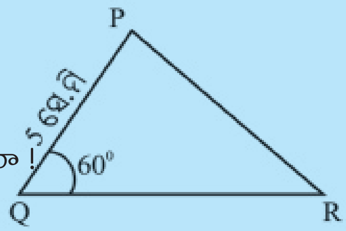


- $\overrightarrow{BM}$ పై $\overline{BA} = 5$ సెం.మీ. ఉండునట్లు A ను నిర్మించుము (ఫటం - గ)



- $\overline{AC}$ ను నిర్మించండి (ఫటం ఘ) ఇప్పుడు ΔABC ఏర్పడినది.

- ఈ విధంగా ΔPQR ను నిర్మించండి. అందులో $QR = 6$ సెం.మీ. $\angle PQR = 60^0$



- $\overline{AC}, \overline{PR}$ పొడవులను కనుగొనండి. రెండింటి పొడవులు సమానమా !
- భు - భు - భు - నియమాలో $\Delta ABC, \Delta PQR$ లలో సర్వసమానం నియమము పూర్తి అయినదా !
- కాబట్టి $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అని తెలుసుకున్నాము.
- $\Delta ABC, \Delta PQR$ లలో

  $\overline{AB} \cong$ _____, $\overline{BC} \cong$ _____, $\overline{CA} \cong$ _____,

  $\angle A \cong$ _____, $\angle B \cong$ _____, $\angle C \cong$ _____

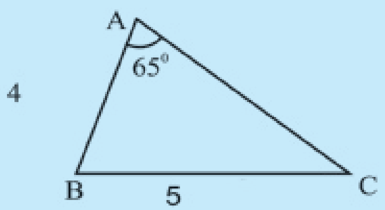
- Δ రెండు త్రిభుజాలను నిర్మించటకై మనం ఏ నియమము తెలుసుకున్నాం.

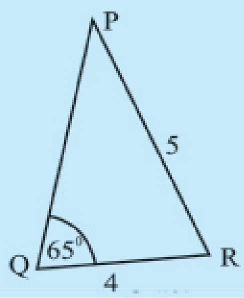
ఇప్పుడు ΔABC లో ఏ త్రిభుజం సర్వసమానమవుతుంది.
పై వివరణము బట్టి కింది పద్ధతులు ఏర్పడుతుంది.

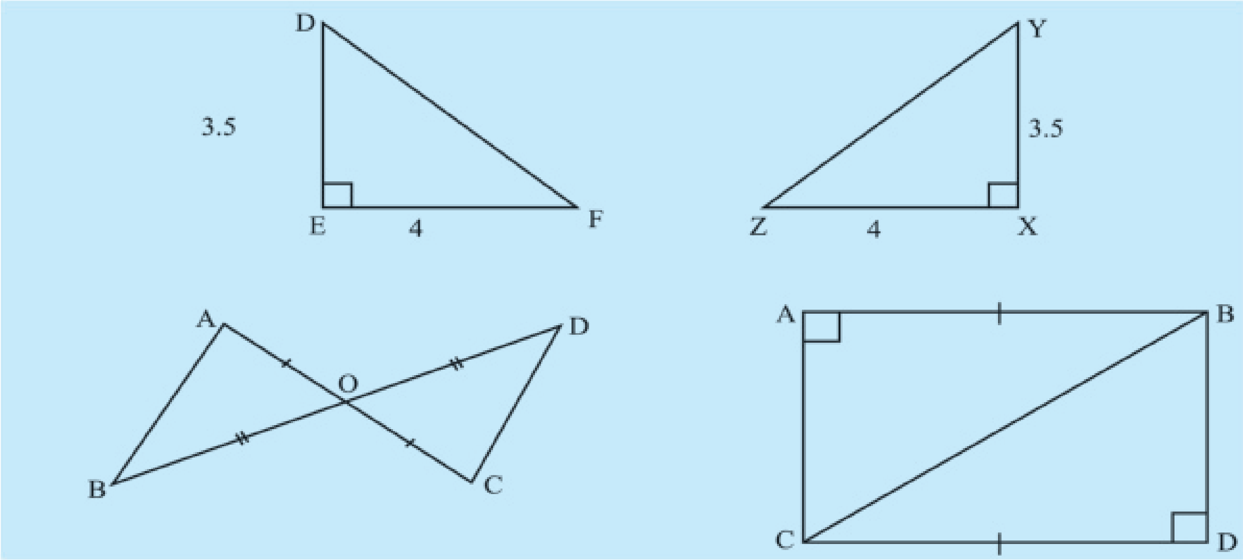
రెండు త్రిభుజలలో ఒక త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలు. వాటి అంతర్గత కోణాలు, మరొక త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలు వాటి అంతర్గత కోణాలతో సర్వసమనమైనచో, త్రిభుజాలు రెండు సర్వసమానం అగును. సర్వసమానతలో ఇటువంటి నియమములను భుజం - కోణం లేక కష్తంగా భు-కో-భా సర్వసమానం నియమం అంటారు.

జవాబులు వ్రాయుటకై ప్రయత్నించండి.

1. ΔPQR లో (క) $\overline{PQ}, \overline{PR}$ రెండు భుజాల అంతర్గత కోణం పతి ! (ఖ) రెండు భుజాల మధ్య కోణం $\angle R$ అగును.
2. $\Delta ABC, \Delta XYZ$ లలో $\overline{AB} \cong \overline{XY}, \angle A \cong \angle X$ ఆ రెండు త్రిభుజలలో ఏ భాగాలు సర్వసమానమైనచో రెండు త్రిభుజాలు భు-కో-భు నియమమును అనుసరించి సర్వసమానమగును.
3. క్రింది ఫటంలలో ఏ ఉత త్రిభుజాలు భు-కో-భు నియముములను అనుసరించి సర్వసమానములగును ? సర్వసమాన చిహ్నమును ఉపయోగించి ఆ జత సర్వసమాన త్రిభుజల పేర్లను వ్రాయండి. మీ జవాబుకు తగిన కారణం వ్రాయండి.





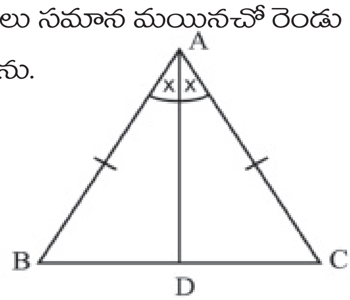


అభ్యాసం 9.5

1. $\Delta ABC, \Delta DEF$ లలో $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF}$, ΔABC యొక్క ఏ కోణంతో ΔDEF యొక్క ఏ కోణం సర్వసమానం. అయినచో రెండు త్రిభుజలు భు-కో-భు సర్వసమాన నియముమునను సరించి సర్వసమానముగును.
2. $\Delta PQR, \Delta ABC$ లలో $PQ = AB, m\angle Q = m\angle B$ మిగిలిన ఏ భుజాలు పొడవులు సమాన మయినచో రెండు త్రిభుజలు భు-కో-భు సర్వసమాన నియముననుసరించి సర్వసమానముగును.
3. ΔABC లో $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\angle BAC$ యొక్క సమద్విఖండనరేఖ

   క) $\Delta ABD, \Delta ACD$ మిగిలిన ఏ భాగాలు సర్వసమానాలు !

   ఖ) $\Delta ABD, \Delta ACD$ సర్వ సమానాలు ! అయినచో ఏ నియమంనను సరించి అవి సర్వసమానులు.

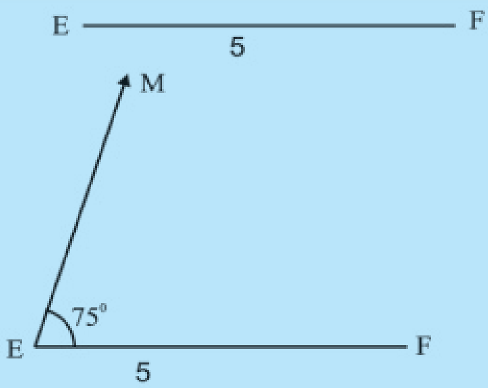


9.3.2. రెండు త్రిభుజలు సర్వసమాన భాగాలగుటకు మరొక నియమం.

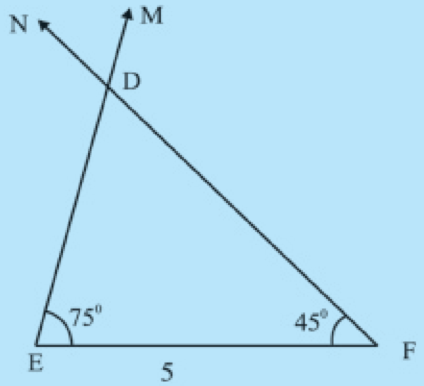

ప్రయత్నించండి :

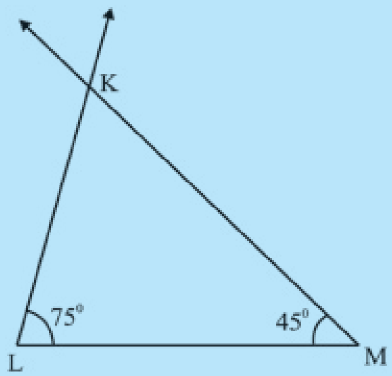
- 5 సెం.మీ. పొడవు గల రేఖా ఖండాన్ని నిర్మించండి. దాని పేరు $\overline{EF}$ అనుకొనుము (పటం - క)

- ప్రొటక్టర్ సహాయంతో $\overline{EM}$ నిర్మించండి. $\overline{FEM}$ పరిమాణం 750 ఉండవలెను. (పటం - ఖ)



- ప్రోటక్టర్ ను వినియోగించి $\overrightarrow{FN}$ నిర్మించండి $\angle EFN = 45^0$ ఉండవలెను.
- $\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{FN}$ రెండు కిరణాల ఖండను బిందువును D అనుకోనుము. ఇప్పుడు ΔDEF
- ఏర్పడినది. అదే పద్ధతిలో ΔKLM ను నిర్మించండి. అందులో $\angle M = 5$ సెం.మీ. $m\angle L = 75^0$, $m\angle M = 45^0$ ఉండవలెను. (పటం - ఘ)





- ట్రేసింగ్ కాగితం తీసుకొని ΔDEF యొక్క ప్రతిబింనకలును గీయండి.
- ΔDEF యొక్క నకలును ΔKLM పై ఉంచండి. E బిందువు L బిందువును F బిందువు M కు తాకు నట్లు ఉంచండి.
- ΔDEF, ΔKLM లు రెండు సమాన ఆకారంలో ఉన్నాయా ?

ΔDEF, ΔKLM ఇతర భాగాలను కొలవండి. క్రింది పట్టికను పూరించండి.

Δ DEF లోని భాగాల కొలతలు	Δ KLM లోని భాగాల కొలతలు
DE = ...	KL = ...
DF = ...	KM = ...
$m\angle$EDF = ...	$m\angle$LKM = ...

- మీ నిర్మాణం కొరకు తీసుకున్న కొలతరు ఇప్పుడు కొలుచుట వలన వచ్చిన కొలతలు పరిశీలించి క్రింది ఖాళీలను పూరించండి.

Δ DEF $\quad \Delta$ KLM

$\overline{DE} \cong$ ...., $\quad \overline{EF} \cong$ ...., $\quad$ .... $\cong \overline{MK}$

$\angle D \cong$ ...., $\quad \angle E \cong$ ...., $\quad$ .... $\cong$ LM

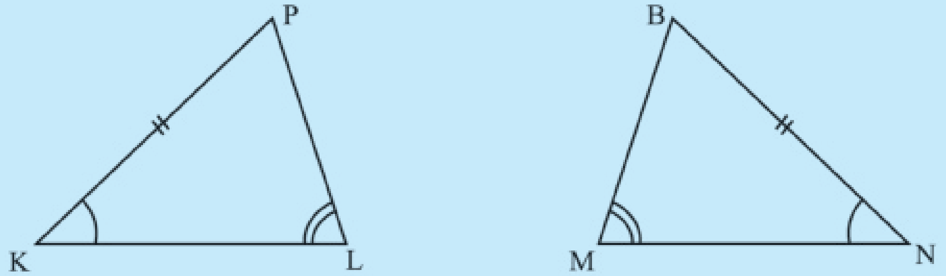
- ఇప్పుడు ΔDEF తో ΔKLM సర్వసమానమయిందా? దానికి గల కారణాలను మీ స్నేహితులతో ఆలోచించి వ్రాయండి.
- త్రిభుజ నిర్మాణినికై మనం ఏ ఏ భాగాల కొలతలను సమానంగా తీసుకున్నాం.

సిద్ధాంతం

రెండు త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజం యొక్క ఒక భుజం దాని రెండు కోణాలు మరొక త్రిభుజం యొక్క ఒక భుజం దాని రెండు అసన్న కోణం సమానము అయిన, ఆ రెండు త్రిభుజలు సర్వసమానాలు. ఈ సర్వసమాన నియమము కోణం - భుజం - కోణం క్లుప్తంగా కో-భు-కో సర్వసమన నియమం అందురు.

ప్రయత్నించండి.

1. ΔPQR లో $\overline{PR}$ యొక్క రెండు అసన్నకోణాలు, పేర్లు ఏమిటి ? ఈ త్రిభుజం యొక్క ఏ భుజం అసన్న కోణాలు $\angle R, \angle P$ అగును.
2. $\Delta LMN, \Delta XYZ$ లలో $\angle L \cong \angle X, \overline{LM} = \overline{XY}$ పై రెండు త్రిభుజలలో ఇతర ఏ భుజాలు సర్వసమానం అయినచో రెండు త్రిభుజాలు కో-భు-కో నియములు సర్వసమానమగును.
3. క్రింది పటంలలో గల రెండు త్రిభుజలలో ఏ ఏ భాగాలు కొలతలు సమానమో చూపడమయినది.

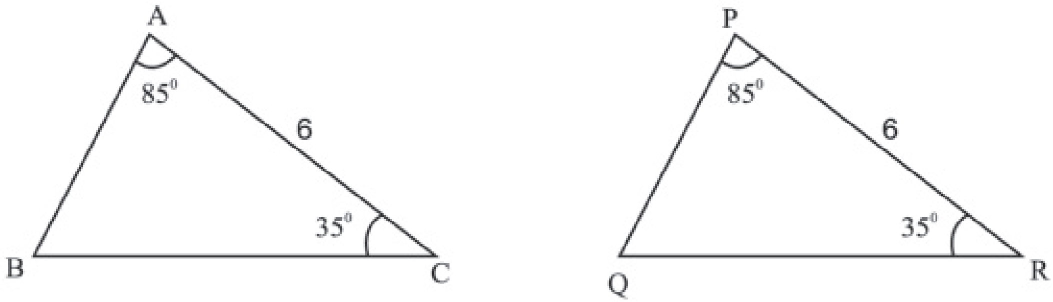


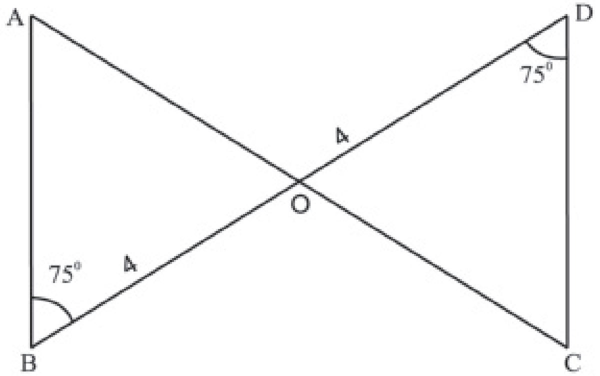
క) రెండు త్రిభుజలు సర్వసమనాలా ?

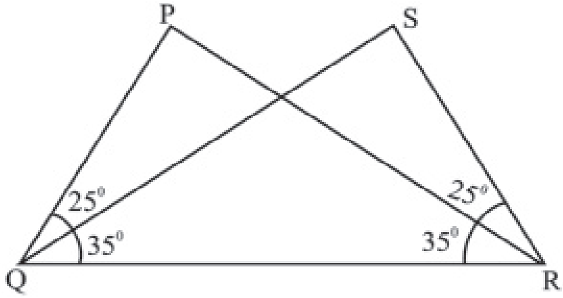
ఖ) అయిన ఎడల ఏ నియమమునననుసరించి సర్వసమానముట అయినచో కో-భు-కో సర్వసమాన నియమమునననుసరించి రెండు త్రిభుజలు సర్వసమనం అగును.

ఉదాహరణ

క్రింది త్రిభుజలలో ఏ జత త్రిబుజాలు కో-భు-కో సర్వసమాన నియమును అనుసరించి సర్వసమానం అగునో తెల్పండి. సర్వసమాన సంకేతాన్ని ఉపయోగించి సర్వసమాన త్రిభుజాల పేర్లను వ్రాయండి.







సమాధానం :

క) క లో గల $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

ఎందుకంటె $\overline{AC} \cong \overline{PR}, \angle A \cong \angle P$

మరియు $m\angle C \cong m\angle R$

ఖ)ఖలో గల $\Delta ABO \cong \Delta CDO$

ఎందుకంటె $\overline{BO} \cong \overline{DO}$ (దత్వాశా)

$m\angle B \cong m\angle D$ (దత్వాశా)

$m\angle AOB \cong m\angle COD$ (వృతరేఖ కరణారు)

చెప్పి చూడండి
ఘటం ఖలో $\angle B, \angle D$ లకు బదులుగా $\angle A, \angle C$ పరిమాణం 750 తీసుకున్నచో $\Delta ABO, \Delta CDO$ లు సర్వసమానాలు అగునా ? కారణం వ్రాయండి.

గ) గను పరిశిలించండి

$m\angle PQR = 25^0 + 35^0 = 60^0$

$m\angle SRQ = 25^0 + 35^0 = 60^0$

$\Delta PQR \cong \Delta SRQ$

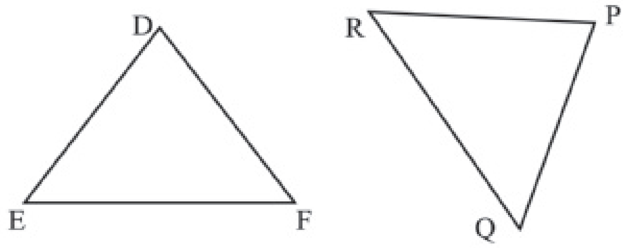
కారణం : $\overline{QR} \cong \overline{QR}$ (అసన్న భుజం)

$\angle PQR \cong m\angle SRQ$ (భవృతిరేఖ కోణాలు పరిమాణంణి)

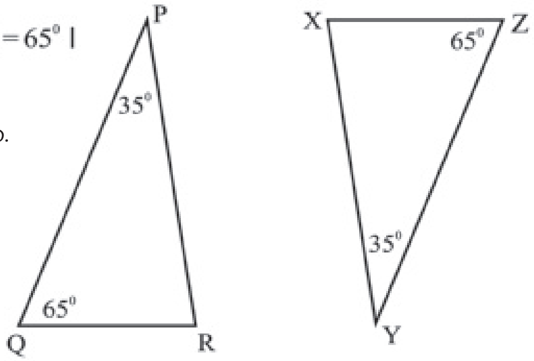
$m\angle PRQ \cong m\angle SQR$ (దత్వాంశం)

అభ్యాసం 9.6

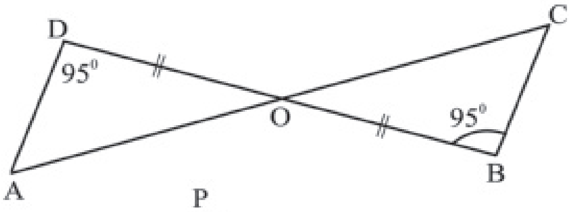
1. ప్రక్కన గల పటంలలో $\overline{DE} = \overline{PQ}$, $m\angle E = m\angle Q$ ఇతర ఏ రెండు కోణాల పరిమాణం సమానం అయినచో రెండు త్రిభుజాలు కో-భు-కో నియమం ప్రకారము సర్వ సమానమగును.



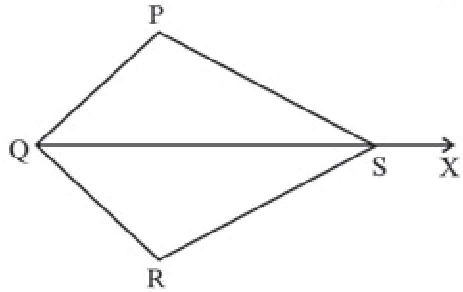
2. ప్రక్కన గల పటంలలో $m\angle P = m\angle Y = 35^0$ $m\angle Q = m\angle Z = 65^0$ | మిగిలిన ఎరెండు భాగాలు సమానం అయినచో రెండు త్రిభుజలు కో-భు-కో సర్వసమాన నియమం ప్రకారం. సర్వసమానం అగును.



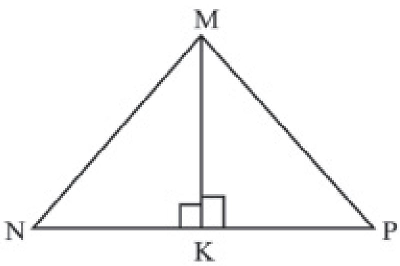
3. ప్రక్క ఫటంలో ఏ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు ? సర్లసమాన నియమంను వ్రాయుము.



4. పక్క పటంలో $\overrightarrow{QR}, \angle PQR \, \& \, \angle PSR$ రెండింటి యొక్క సమద్విఖండన రేఖల $\Delta QRS, \Delta QPS$ లు సర్వసమానాలా ? ఒక వేళ సర్వసమానాలు అయినచో ఏ నియమం ప్రయోగించబడును? లలో ఏ మూడు జతల భాగాలు సర్వసమానములగును.



5. ప్రక్క పటంలో $\angle NMP$ యొక్క సమద్విఖండనరేఖ $\overline{MK}$, $\overline{MK} \perp \overline{NP}$ కారాణాలతో ఏ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు వ్రాయుము.

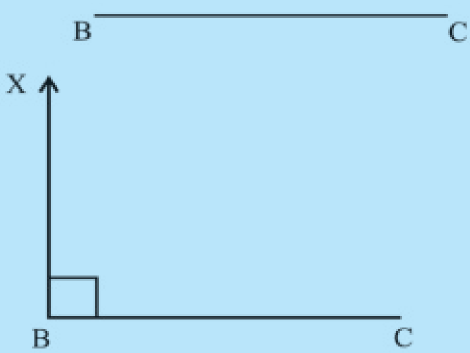


9.3.4 రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు సర్వసమానములగుటకు నియమం.

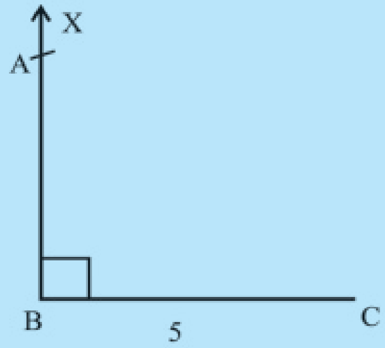
పయత్నించండి. :

క్రింది సూచనలను అనుసరించి నిర్మాణం చేయండి.

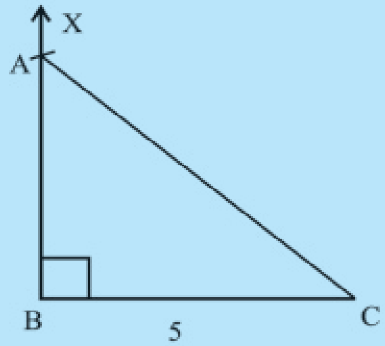
- 5 సెం.మీ. పొడవు గల $\overline{BC}$ ని గీయండి. (ఫటం -5)
- ప్రొటక్టర్ సహాయంతో $\overline{BX}$ నిర్మించండి $\overline{BX} + \overline{BC}$ ఉండవలెను. (ఫటం-4)



- లేఖిని సహాయంతో 6 సెం.మీ. వ్యాసార్థం తీసుకొని C ను కేంద్రంగా చేసుకొని చాపాన్ని గీయండి. ఆ చాపం $\overrightarrow{BX}$ ను ఖండించును. ఖండన బిందువు ను అనుకొనుము (ఘటం - గ)

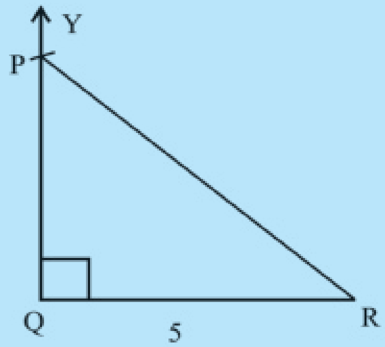


- $\overline{AC}$ ను నిర్మించండి ఇప్పుడు ΔABC ఏర్పడినది



- ఇదే పద్ధతిలో ΔPQR నిర్మించండి దానిలో $QR = 5$ సెం.మీ. $m\angle PQR = 90^0$, $RP = 6$ సెం.మీ

- ఇప్పుడు క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయండి. $\Delta ABC, \Delta PQR$ ఒక్కొక్క లంబకోణ త్రిభుజం అగునో ఎందుచేత.
  రెండు త్రిభుజలలో $\overline{AB}, \overline{PQ}$ పొడవులను కొలవండి. ఆ రెండింటి పొడవులు సమానమా ?



ఖాళీలను పూరించుము.

$\overline{AB} \cong$ ...., $\overline{BC} \cong$ ...., $\angle ABC \cong$ ....,

ప్రస్తుతం $\Delta ABC, \Delta PQR$ లు సర్వసమానములని ఎందుకు చెపుగలం? ఏ సర్వసమాన నియమం దానికి ఉపయోగపడును.

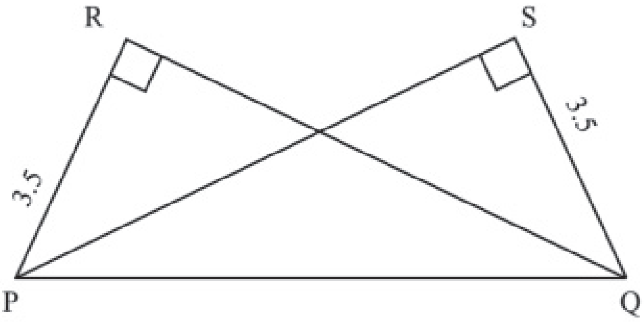
- మనం ఏ ఏ కొలతలను తీసుకొని త్రిభుజాలను నిర్మించాలి?

దీనివలన మనం క్రింది నియమం చేయగలం.

రెండు త్రిభుజాలలో ఒక దాని కర్ణం, ఒక బుజం మరొక త్రిభుజంలోని కర్ణం, అనురూప భుజంలో సమానము అయినచో ఆ రెండు త్రిభుజలు సర్వసమానములగును. దీనిని లంబకోణం - కర్ణం - భుజం. సర్వసమానత నియమం. దీనిని క్లుప్తంగా లం-క-భు సర్వసమాన నియమం అంటారు.

ఉదాహరణ

క) క్రింది ఫటంలో ఏ జత త్రిభుజాలు లం-క-భు సర్వసమాననియమాను కలిగియున్నాయి ? ఆ జత త్రిభుజాలను సర్వసమాన చిహ్నం ఉపయోగించి వ్రాయండి. కారణాలలో సహ జనాబు వ్రాయుము.



సమాధానం

క) ఫటం క లో గల

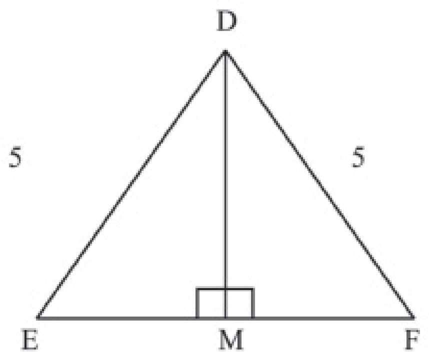
$\Delta PQR \cong \Delta SPQ$ ఎందుకనగా

$\Delta RPQ, \Delta SPQ$ లలో $\angle PRQ, \angle QSP$ లు

లంబకోణాలు (దివాహు కర్ణాలు

$\overline{PQ} \cong \overline{QP}$ ఉపడిభుజం) $\overline{RP} \cong \overline{SQ}$.

ఖ)



సమాధానం

ఖ లో గల $\Delta DEM \cong \Delta DFM$ ఎందుకనగా

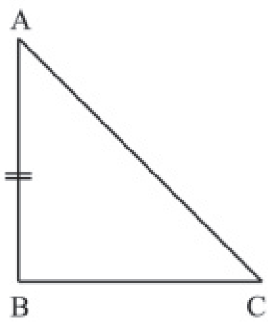
$\Delta DEM \cong \Delta DMF$ లు లంబకోణాలు

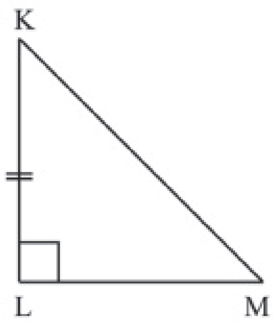
కర్ణాలు $\overline{ED} \cong \overline{FD}$ దర్వాతం

$\overline{DM} \cong \overline{DM}$ (ఉమ్మడి భుజం)

అభ్యాసం 9.7

1. ప్రక్క ఫటంలలో $m\angle L = m\angle B = 90^0$, $\overline{AB} = \overline{KL}$ ఏ ఇతర నియమముల వలన రెండు త్రిభుజాలు లం-క భు సర్వసమాన నియమమును అనుసరించి సర్వసమానములగును.





2. ΔABC $AB = AC$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ $\Delta ABD, \Delta ACD$ ఏ భాగాలు సర్వసమానము వలన $\Delta ABD, \Delta ACD$ లం-క-భు సర్వసమాన నియముమును అనుసరించి సర్వసమానములగును.

10వ అధ్యాయం

క్షేత్ర గణితం (MENSURATION)

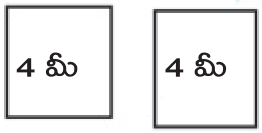
10.1 ఉపోద్ఘాతం -

ఏదైనా ఒక తలం సరిహద్దు రేఖల పొడవుల మొత్తం ఆ తలం యొక్క చుట్టుకొలత అవుతుంది. ఒక చుట్టూ ఉన్న ప్రహరీగడ పొడవు, తోట సరిహద్దులు ఫోటోఫ్రేము మొదలైన నాటి నుండి చుట్టుకొలతను తెలుసుకొగలం.

నిత్య జీవితంలో మీరు చూస్తున్న ఏ ఏ పరిస్థితులు చుట్టు కొంతల నిర్ణయనికి అనుకూలంగా ఉన్నాయో వ్రాయండి. రెండు ఉదాహరణలను ఇవ్వండి.

చెప్పి చూడండి

నడిచి వెళ్తె ఏ క్షేత్రంలో అధిక దూరం వెల్ల గలుగుతాం. ఒకటి 4 మీ పొడవు గల చతురస్త్రం చుట్టూ తిరుగిటకు లేక 4 మీ పొడవు 3 మీ వెడల్పు గల దీర్ఘ చతురస్రం చుట్టు తిరుగుటకు?



బడి వార్షిక ఆటల పోటిలో జరుగుతాయి. వివిధ దూరాలలో పరుగు పందేలు జరుగుతుంటాయి. ఆ సంవత్సరం జరగే ఆటల పోటీలో సమీర్ రహీమ్‌లు పోటిలో మాష్టారికి సహాయం చేస్తారు. వంద మీటర్ల పరుగుపందెం కోసం ట్రాకిలు వేయుటకై టేపులో 100 ను కొలిచి తిన్నని గీతలు గీసి మైదానాన్ని సిద్ధం చేశారు. ఆతరువాత 400 మీ. పరుగు పందెం కోసం ట్రాకులు నిర్మించాలి.

సమీర్ టీచర్‌తో సార్ మన మైదానంలో 400 మీ. పొడవు ట్రాక్ వేయుటకు మైదానం అంత పొడవుగా లేదు. 100మీ పోడవు ట్రాకుకే సరిపోయింది. 400 మీ. కొరకు అందుకు నాలుగు వంతులు అవసరమగును. ఇంత స్థలం మన బడి దగ్గరేది ?

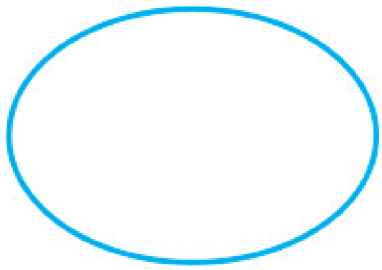
అన్నారు.

రహీమ్ - గత సంవత్సరం ఆటల పోటిలకు నీవు చూడలేదా ?

సమీర్ లేదు నా ఒంట్లో బాగులేక పోటి వలన నేను రాలేదు ?

రహీమ్ - 400 మీ పరుగు ట్రాకి కొరకు 100 మి పరుగు పందెం వల అని తన నోట్ పుస్తకంలో గోళకార బొమ్మను గీసి చూపించాడు.

రహీం - ఈ వరక మార్గంలో ఒక సారి చుట్టు పరిగిత్తితే దాని పొడవు 400 మీ. అవుతుంది.



చిత్రం 10.2

లక్రరేఖ చుట్టబడియున్న పటం యొక్క చుట్టుకొలత సూత్రం. నీకు తెలియాదా ? అన్నాడు.

చూచి చెప్పండి:-

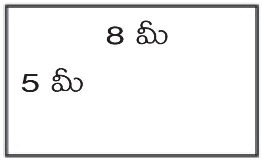
- ప్రక్క చిత్రంలో గల దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క చుట్టుకొలత ఎంత?

- ప్రక్క చిత్రం 10.3 లో గల దీర్ఘ చతురస్రం నుండి 2 మీటర్ల కొలత గల సమ చతురస్రమును కత్తిరించి తీసిన యెడల మిగిలిన దాని యొక్క చుట్టుకొలత ఎంత అగును?

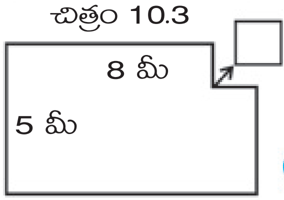
- రెండు కాగితాల యొక్క చుట్టుకొలతలు చూసి ఏమి తెలుసుకొన్నావు?

- చిత్రం 10.3 లో చూపినట్లు కాగితం యొక్క ఒక చివరినుండి 10.5 చిత్రంలో చూపినట్లుగా కత్తిరించి మిగిలిన కాగితమును ఈ ముక్కతో సరిచూసి రెండింటి చుట్టుకొలతలు చూసినచో మిగిలిన కాగితపు చుట్టుకొలత కట్ చేసిన చుట్టుకొలత తో సమానం అగునా? పెద్దది అగునా లేక చిన్నది అగునా?

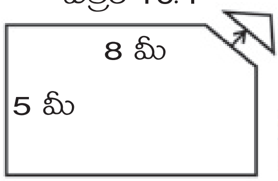
- చిత్రం 10.6 లో చూపినట్లు ఒక ముక్కను కట్ చేసి దాని చుట్టుకొలతతో మిగిలిన కాగితం చుట్టుకొలతను సరిపోల్చిన ఏమగును?



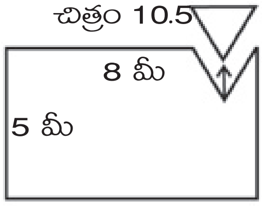
చిత్రం 10.3



చిత్రం 10.4



చిత్రం 10.5



చిత్రం 10.6

ఉదాహరణ - 1

38 సెం.మీ. పొడవు 22 సెం.మీ. వెడల్పు గల ఒక ఫోటో ఫ్రేమ్ యొక్క అల్యూమినియం రేకును తీసి 10 సెం.మీ. పొడవు గల చతురస్రాకారపు ఫోటోఫ్రేకు లను తయారు చేయవచ్చునా ?

మీకు తెలుసా ?

దీర్ఘ చతురుస్రం పొడవు (length) ను l గాను వెడల్పు (Breadth) ను b గాను వ్రాయవచ్చును.

సాధన

ఫోటో ఫ్రేకు పొడవు $= 38$ సెం.మీ.

వెడల్పు $= 22$ సెం.మీ.

అందు వాడిన అల్యూమినియం రేకు పొడవు = ఫోటోఫ్రేకు చుట్టుకొలత

$= 2 \times (l + b) = 2 \times (38 + 22)$ సెం.మీ.

$= 2 \times 60$ సె. $= 120$ సెం.మీ.

వాడిన అయ్యుమినియం రేకు $= 120$ సెం.మీ.

మీరు చేయవలసిన చతురస్రం ఫ్రేకు భుజం $=10$ సెం.మీ.

చుట్టు కొలత $=4\times10$ సెం.మీ. $=40$ సెం.మీ.

అనగా చతురస్ర ఫ్రేకు తయారుచేయుటకు 40 సెం.మీ. పొడవు గలరేకు అవసరమగును.

$$\text{ఫోటో ఫ్రేమల సంఖ్య} = \frac{\text{అల్యూమినియం రేకు పొడవు}}{\text{కొత్త ఫ్రకు చుట్టు కొలత}}$$

$$=\frac{120}{40}=3$$

సమాదానాలు వ్రాయండి

1. బాబు 30 సెం.మీ. పొడవు, 18 సెం.మీ. వెఢల్పు గల దీర్ఘచతురస్రాఫటంను జాన్ 24 సెం.మీ. పొడవు గల చతురస్త్రా కారపు ఫటంను తయారు చేసిన రెండింటికి ఫ్రెమ్‌లు కట్టుటకు సేం.మీ. రూ. 3 చుప్పున లెక్కించినచో మనం వైకునకు ఏక్కువ అగును ?
2. ఒక చతురస్రం ఒక దీర్ఘ చతురస్రం చుట్టుకొలత సమానం. దీర్ఘ చతురస్త్రం చుట్టు కంచె వేయుటకు మిటరు ఒకటి రూ 5 ల చుప్పున రూ 400 ఖర్చు అయ్యెను. మొదటి ప్రశ్నకు జవాబు వ్రాయండి.

తరువాత క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయండి.

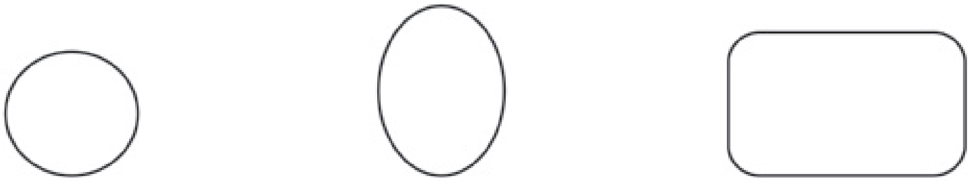
- తీగె కంటె పొడవును ఎలా తెలుసుకుంటారు ?
- దీర్ఘ చతురస్తం చుట్టుకొలతతో తీగ పొడవునకు పట్టి సంబంధం కలదు ?
- దీర్ఘ చతురస్తం చుట్టుకొలత ఎంత ?
- చతురస్తం చుట్టుకొలత తెలుసుకొనుటకై చతురస్తం భుజాన్ని ఎలా తెలుసుకున్నాం?
- చతురస్తం యొక్క ఒక్కొక్క భుజం పొడవు ఎంత ?

అభ్యాసం 10.1

1. బెబిన ఇంటిని తాకుతు పూల తోట గలదు. పూల తోటకు ఒక ప్రక్క వాళ్ల ఇల్లు ఉండగా మిగిలిన మూడు ప్రక్కల పొడవులు వరుసగా 13.5 మీ., 7.8 మీ , 11.7 మీ. తోట చూట్టూ కంటె వేయాలను కొనెను. కంచె వేయటకు మీటరుకు రూ 6.50 పై తోటి మొత్తం ఎంత ఖర్చు అగును ?
2. 10 సెం.మీ. పొడవు గల చతురస్త్రాకారపు కాగితాన్ని 12 సెం.మీ. పొడవు 8 సెం.మీ. వెడల్పు గల దీర్ఘ చతుస్త్రాకారపు కాగితాన్ని తీసుకొనుము. వాటి ఒక్కొక్క మూలన 4 సెం.మీ. బుజం గల చతురస్త్రాలు ఒక్కొక్కటి కత్తిరించండి. మిగిలిన కాగితం చుట్టుకొలతను కనుగొనుము.
3. ఒక దీర్ఘ చతురస్తం పొడవు, వెడల్పునకు 2 రెట్లు దాని చుట్టుకొలత 600 మీటర్లు దాని వెడల్పుతో సమాన పొడవు గల చతురస్తం చుట్టుకొలత ఎంత ?

10.2 వృత్త పరిధి

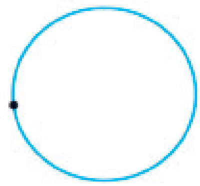
అనంద్ ఒక దళసరి కాగితాన్ని తీసుకొని వృత్తాకారంలో వివిధ ఆకారంలో కత్తిరించెను.



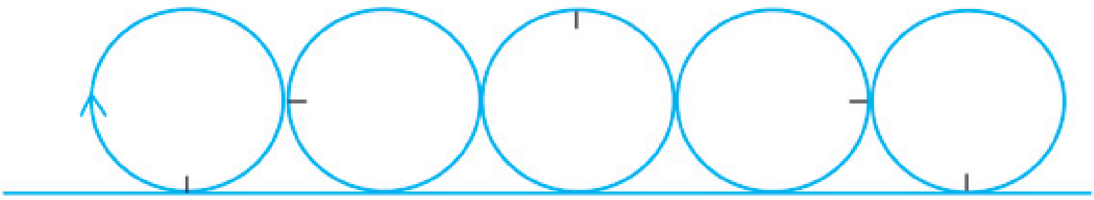
(క) (ఖ) (గ)

అతడు ఈ ఆకారాల అంచులో వివిధ రంగుల రిబ్బను అంటించాలనుకున్నారు. కాని దీనికి ఎంత పొడవు రిబ్బను అవసరమో తెలుసుకోలేక పోయేను. ఎందుకంట వాటి అంచులు తిన్నగా లేవు. కాబట్టి స్కేలుతో కొలవలేము. పై తరగతి చదువుతున్న వాణిమి అడిగాడు.

వాణి దారాన్ని తీసుకున్నది. వృత్తాకార కాగితం, అంచుపై ఒక చోట పెన్నుతో ఒక చుక్క పెట్టి దానికి అని పెరు పెట్టెను. నుండి దారాన్ని వృత్తం చుట్టు నెమ్మదిగా ఒక సారి చుట్టెను. దారం బిందువును చేలిన తరువాత అచ్చట ఒక గుర్తు పెట్టెను. తరువాత అను తో దారం ఒక చివరి నుండి దానిపై గల గుర్తు వరకు గల పొడవు వృత్తం చుట్టు కొలత అవుతుఇదని చెప్పెను.



వీణా స్నేహితురాలు మీనా దానిని మరొక విధంగా చేసి చూపించెను. మీన కాగితం రిబ్బను అంచుపై ఒక చోట ఒక చుక్క పెట్టెను తరువాత తెల్ల కాగితంపై స్కేలు సహాయంతో ఒక తిన్నని గీత గీసెను. తరువాత ఆ గీతపై కాగితపు రిబ్బను తాకినట్లు అమర్చెను. ఆ తరువాత రిబ్బనును మెల్లమెల్లగా గీతతో కలిపి చుట్టెను. కొంత దూరం చుట్టిన తరువాత ఆ చుక్క గీతపై మరొక చోట దాకింది.



ఇప్పుడు మీన కాగితపు రిబ్బను తీసి గీతపై తగిలినరెండు బిందువుల మధ్య దూరాన్ని కొలిసి వృత్తాకారపు కాగితం చుట్టు కొలత తెలియచేసెను.

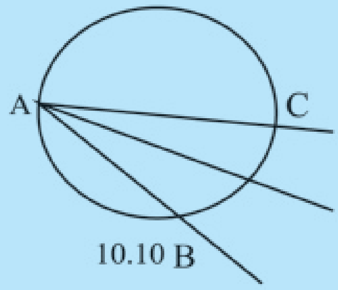
వారిద్దరి పని చూపిన తరువాత అను ఒక సీసా మూతను తీసుకొని కాగితం రిబ్బను తహాయంతో దాని చుట్టుకొలతను తెలుసుకోగలిగెను.

వాణి మీనా అనులు చుట్టు కొలతలను కనుగొనే పద్ధతులలో మికు నచినది ఏది ? ఎందుచేత

ప్రయత్నించండి :

పని - 1

- సమాన కొలతలు గల రెండు పళ్లెములను తోసు కొనుము. పైన చెప్పిన పద్ధతులలో ఏదో ఒక దాని ప్రకారం ఆ రెండింటి చుట్టుకొలతలను కనుగొనండి. ఆ రెండు చుట్టు కొలతల మధ్య సంబంధం ఏమైన ఉన్నదా ?



- ప్రక్క పటం ను చూడుము. ఒక దానికి అని పేరు పెట్టండి. ఒక దారపు ముక్కను తీసుకొని దాని ఒక చివరను బిందువు వద్ద ఉంచండి. దారం బిందువును తాకుతుంది. నెమ్మదిగా
- దారాన్ని పట్టి అంచు చుట్టూ చుట్టండి. దారం తాకవున్న మరొక చోట బిందువును గుర్తించి పేరు పెట్టండి.
- ఒక దారపు ముక్కను తీసుకొని దాని ఒక చివరను బిందువు వద్ద ఉంచండి. దారం బిందువును తాకుతుంది. నెమ్మదిగా దారాన్ని పట్టి అంచు చుట్టూ చుట్టండి. దారం తాకవున్న మరొక చోట బిందువును గుర్తించి పేరు పెట్టండి.
- A, C ల మధ్య దూరాన్ని స్కేలు సహాయంతో కొలవండి. పొడవు వృత్తాకారంలో పట్టీ వ్యాసం అవుతుంది.
- పట్టి చుట్టు కొలతను కొలవండి. వ్యాసం యొక్క ఎన్ని వందులతో ఈ చుట్టు కొలత సరిపోతుందో నిర్ణయించండి.

మీకు తెలుసా ?

వృత్తాకార క్లాత్తం యొక్క అంచు పొడవు లేక దాని చుట్టు కొలత ను దాని పరిధి అంటారు.

సైకిల్ లేక స్కూటర్ చక్రం, బండి చక్రం మొదలైన వాటి పరిధిని దారం లేక టేపు సహాయంతో కాలవవచ్చును. వివిధ యంత్ర్రపతాలకు వృత్తాకార పరికరాలు ఉంటాయి. వాటి పరిధిని తప్పు లేకుండా తెలుసు కోవలసిన అవసరం ఉంది. దారం లేక టేపు సహాయంతో పరిధిని కొలిచి తెలుసుకొనుట పూర్తిగా సరైయనది కాదు. అందుచేత దీనికి ఒక గణిత సూత్రం అవసరముగుచున్నది.

మీకు తెలుసా ?

వృత్త వ్యాసం దాని వ్యాసార్థానికి రెండురెట్లు

వృత్త పరిధికి దాని వ్యాసం, వ్యాసార్థాం మధ్య ఏ విధమైన సంబంధం గలదో చూద్దాం రండి. వేరు వేరు వ్యాసార్థాలు గల 5 వృత్తాలను తీసుకొని వీటి పరిధిలను కనుగొని కింది పట్టికలో వ్రాయుము.

వృత్తం	వ్యాసార్థం	వ్యాసం	పరిధి	పరిధి వ్యాసం	పరిధి వ్యాసార్థం
1	3.3	6.6	20.72	$\frac{20.72}{6.6} = 3.14$ (సుమారుగా)	$\frac{20.72}{3.3} = 2\times3.14$
2	3.5	7.0	31.6	$\frac{22.0}{7.0} = 3.14$ (సుమారుగా)	$\frac{22.0}{3.5} = 2\times3.14$
3	5.0	10.0	31.4	$\frac{31.6}{10.0} = 3.14$ (సుమారుగా)	$\frac{31.6}{5.0} = 2\times3.14$

వృత్తం	వ్యాసార్ధం	వ్యాసం	పరిధి	పరిధి వ్యాసం	పరిధి వ్యాసార్ధం
4	7.0	14.0	44.0	$\frac{44.0}{14.0}=3.14$ (సుమారుగా)	$\frac{44.0}{7.0}=2\times3.14$
5	15.0	30.0	94.0	$\frac{94.0}{30.0}=3.13$ (సుమారుగా)	$\frac{94.0}{15.0}=2\times3.13$

వృత్తం పరిధి, దాని వ్యాసంల అనుపాతం ఎల్లప్పుడు సమనమని పై పట్టిక వలన తెలుస్తున్నది. అన్ని వృత్తాల పరిధి, వ్యాసులు అనుపాతం (పరిధి వ్యాసం) ఒక స్థిరసంఖ్య దీనిని పై అంటారు, దాని గుర్తు

మనకు తెలుసు

- వృత్తపరిధి వ్యాసానికి 3 రెట్లు
- వృత్తపరిధి 'c' వ్యాసం 'd' వ్యాసార్ధం 'r'

$\frac{c}{d}=\pi \quad c=\pi d \quad c=2\pi r\ (\therefore d=2r)$

మీకు తెలుసా ?

π అనునది గ్రీకుభాషలో ొక అక్షరం

π విలువ సుమారు $\frac{22}{7}$ లేక 3.14 గా తీసుకోబడును.

తెలుసుకుందాం

వృత్తం ఆకారంలో సంబంధం లేకుండా వృత్త పరిధి దాని వ్యాసం లనిష్పత్తి ఎల్లప్పుడు సమానంగా ఉ ంటుంది. వివిధ వ్యాసాలతో వృత్తాలను గీయండి. ప్రతిదాని పరిధిను కొలవండి. దానిని ఆ వృత్తం వ్యాసంచే భాగించండి. అన్న వృత్తాల భాగఫలాలు ఒకటే. అవుతాయు. ఈ భాగఫలం లేకు అనుపాతం (పరిధి వ్యాసం) ను π ద్వారా తెలుయచేయడమగును 1761 లంబర్ట్ అనే గణిత శాస్త్ర వేత్త ఎన్నో పరిక్షలు చేసి దీనిని ప్రకటించెను. π ఒక అవరణీయసంఖ్య కాని ప్రపంచంలో వేరు వేరు చోటు పై మువలను వేరు వేరుగా ప్రకటంచేమైనది. ఇది సుమారు ప్రక్క ప్రక్కనే ఉంటుంది. క్రింది పట్టికను పరిశీలించండి.

π సరాసరింలువ	గణిత శాస్త్ర వేత్త నాగంకత	కాలం
$\pi=\sqrt{10}$ వర్గతూలం $=3.16$	వేదాతు (ఇండియా)	క్రీపూ 3000 బసశా
$\pi=\frac{22}{7}=3.1428$	ఆర్క మెడిస్ (గ్రీస్)	క్రీపూ 287-212
$\pi=3.1416$	టోలెమి (గ్రీస్)	క్రీపూ 150
$\pi=\frac{355}{113}$	చుంగిచి (చైనా)	క్రీపూ 150
$\pi=\frac{62832}{20000}=3.1416$	ఆర్యభట్ట (ఇండియా)	క్రీపూ 499
$\pi=\frac{3927}{1250}=3.1416$	భస్కరాచార్య (ఇండియా)	క్రీపూ 1150
$\pi=\frac{9801}{1103\sqrt{8}}=3.1415926218033$	రామానుజన్ (ఇండియా)	క్రీపూ 1887యు1919

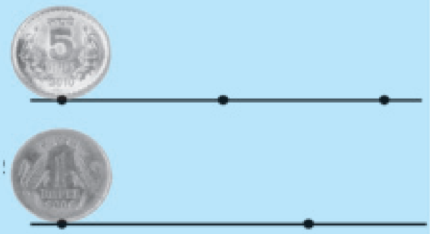
మనం సాధారణంగా π విలువను $\frac{22}{7}$ లేక 3.141 గా తీసుకుంటు π విలువలో చేయలసిన లెక్కలందు π విలువను ఇవ్వడమను. లెక్క సంభందగా చేయుటకై π విలువను $\frac{22}{7}$ లేక 3.141 లేక 3.14 గా తీసుకోవడం జరుగుచున్నది.

బంగారం గాజులు తయారు చేయునపుడు గాజు వ్యాసానికి 3 వందులు గల బాంగారం తీగెను తీసుకొన బడును. కాబట్టి వృత్తాకార వస్తువులను తయారు చేయుటకు అవసరమైన తీగే రేకు, మదలైన వాటిని దాని వ్యాసానికి మూడు మత్తం పొడవును తీసుకొవడం జరుగుచున్నాది. దానికోసం 3× వ్యాసం సూత్రాన్ని ఉపయోగించబడును. సరిఅయిన వివువకై ను తీసుకొన వలెను దాని విలువ $\frac{22}{7}$ లేక 3.141 గా తీసుకొనబడును.

ప్రయత్నించండి. :

10.11

- రూ.5 నాణెం, ఒక రూపాయి నాణెం తీసుకొనుము.
- రూ. 5 నాణెం అంచుపై ఒక చోటు ఇంకుగుర్తు పెట్టండి.
- ఒక రూపాయి నాణెం అంచుపై ఎరుపు రంగు గుర్తు పెట్టండి.
- నోట్ పుస్తకంలో ఒక పేజీపై రెండు తిన్నని గీతలు గీయండి. ఒక గీతపై రూ 5 నాణెంను ఉంచి మెల్లగా గీతను తాకునట్లు దొర్లించండి. గీతపై వేరువేరు చోట నల్ల మచ్చాలు ఏర్పడతాయి.
- ఈ పాయి నాణెన్ని కూడా ఆ విధంగా చేయండి. ఎర్రమచ్చలు ఏర్పడును.



10.12

పరిశీలించండి.

- మొదటి గీతపై గల రెండు ప్రక్కప్రక్కన గల నల్ల మచ్చల మధ్య దూరం రూ 5 నాణెం యొక్క పరిధి అవుదుంది.
- రెండవ గీతపై గల రెండు మచ్చల దూరం రూపాయి నాణెం పరిధి అవుతుంది.

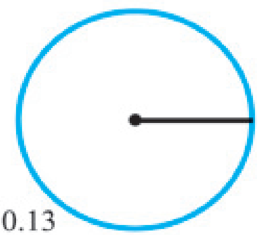
క) ఏ రెండు నాణెలు ఒకసారి తీరుగుటకు ఏది అధిక దూరం.

ఖ) ఏ నాణెం ఎన్ని సార్లు తిరిగినచో నోటు పుస్తకం పేజి చివరకు చేరుకొనును.

ఉదాహరణ -

ఒక వృత్త వ్యాసార్థ 25 సెం.మీ. దాని పరిధి ఎంత ($\pi = 3.14$)

సాధన - వృత్త వ్యాసార్థ $= r = 25$ సెం.మీ.



10.13

$\therefore$ వృత్త పరిధి $= 2\pi r = 2 \times 3.14 \times 25$ సెం.మీ. $= 157$ సెం.మీ.

సాధించుము.

క) ఒక గాజు వ్యాసం 3.5 సెం.మీ. అయిన దాని పరిధి ఎంత ?

ఖ) ఒక చక్రం వ్యాసార్థం 21 సెం.మీ. అయిన అది ఎన్ని సార్లు తిరిగినచో 66 మీ. దూరం పోవును.

ఉదాహరణ -

ఒక వృత్త పరిధి 66 మీ. అయిన దాని వ్యాసమెంత ? వ్యాసార్థం ఎంత ? ($\pi = \frac{22}{7}$)

సాధన

మొదటి పద్ధతి :

వృత్త పరిధి $= \pi d = 66$ మీ. (d వృత్తవ్యాసం)

$\therefore d = \frac{66}{\pi}$ మీ.

$= \frac{66}{\frac{22}{7}}$ మీ.

$= \frac{66 \times 7}{22}$ మీ. $= 21$ మీ.

$\therefore$ వ్యాసార్థం $r = \frac{d}{2} = \frac{21}{2}$ మీ. $= 10.5$ మీ.

రెండవ పద్ధతి

వృత్త పరిధి $= \pi d = 66$ మీ.(r వృత్త వాసార్థం)

$\therefore r = \frac{66}{2\pi}$ మీ. $= \frac{66}{2 \times \frac{22}{7}}$ మీ.$= \frac{66}{\frac{44}{7}}$ మీ.

$= \frac{66 \times 7}{44} = \frac{21}{2}$ మీ. $= 10.5$ మీ.

$\therefore$ వ్యాసం $= 2 \times$ వ్యాసార్థం మీ. $= 21$ మీ.

- పై రెండు పద్ధతులలో గల తేడాను వ్రాయుము.
- పై పద్ధతులలో ఏ పద్ధతి సులభం అనిపించింది - ఎందు చేత ?

ఉదాహరణ 4

ప్రక్క పటంలో మూడు అర్ధ వృత్తాల ద్వారా ఏర్పడిన ఫటం కలదు. ప్రతీ అర్ధ వృత్తం వ్యాసం 7 సెం.మీ. అయినచో ఫటం యొక్క చుట్టుకొలత ఎంత ?

సాధన -

ఒక్కొక్క అర్ధ వృత్త వ్యాసం $d = 7$ సెం.మీ.

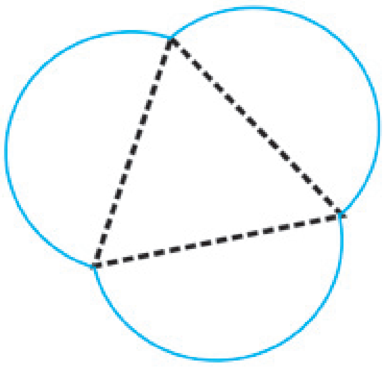
ప్రతీ అర్ధ వృత్తం పొడవు = వృత్త పరిధిలో సగం

$= \pi d \times \frac{1}{2} = \frac{22}{7} \times 7 \times \frac{1}{2}$ సెం.మీ.

$= 11$ సెం.మీ.

ఫటం చుట్టుకొలత $= 3$ ఒక అర్ధ వృత్తం పొడవు.

$= 3 \times 11$ సెం.మీ $= 33$ సెం.మీ.



10.14

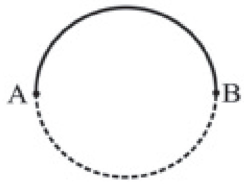
పరిసిలించండి -

ఒక ఘటం 10.15 (క) లో ఒక వృత్తాన్ని రెండు సమభాగల చేయబడినది. పై భాగం ఒక అర్ధవృత్త ఆకారంలో కలదు. దాని చివరిబిందువులు A, B గా గుర్తింటడమయినది.

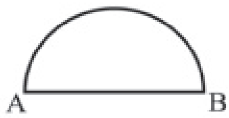
ఈ అర్ధవృత్తాకారంలో గల గీత పొడవు

= మునుపటి వృత్త పరిధి యొక్క రెండు సమభాగాలలో ఒకభాగం (అర్ధ పరిధి)

$$= \frac{2\pi r}{2} = \pi r$$



ఘటం 10.15 (ఖ) లో ఒక అర్ధవృత్త పరిధి కలదు. దాని రెండు సరిహద్దులు A నుండి B వరకు గల అర్ధ వృత్తంలో పాటు $\overline{AB}$ రేఖాఖండం అగును. ఈ AB రేఖఖండం అర్ధ వృత్త వ్యాసం.



10.15

కావున (ఖ) ఘటంలోని అర్ధ వృత్తం చుట్టు కొలత - అర్ధవృత్త పొడవు వృత్తవ్యాసం

కావున (ఖ) ఘటంలోని అర్ధ వృత్తం చుట్టు కొలత = అర్ధవృత్త పొడవు + వృత్తవ్యాసం

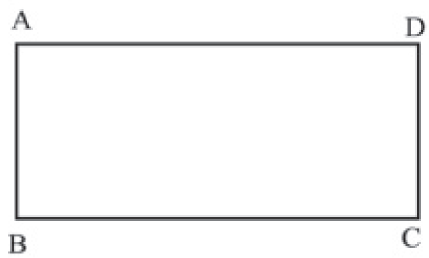
$$= \pi r + 2r$$

అభ్యాసం 10.2

1. ఒక వృత్త వ్యాసం 0.42 మీ. అయిన దాని పరిధి ఎంత ? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$
2. వృత్తాకారంలోని తీగెను నిటారుగా చేయడమయినది. తరువాత దానిని పెద్ద చతురస్రా కారంగా మార్చడమయినది. చతురస్త్రం భుజం పొడవు 22 సెం.మీ. అయినచో వృత్త వ్యాసార్ధం ఎంత ?
3. 14 సెం.మీ. వ్యాసార్ధం గల వృత్తాన్ని కార్డుబోర్డు నుండి కత్తిరించి దానిని రెండు అర్ధవృత్తాలుగా తిరిగి కత్తిరించడమయినది. ఒక్కొక్క అర్ధవృత్తం అంచులకు లేస్ అంటించుటకు ఎంత పొడవు లేస్ అవసరమగును?

10.3. వైశాల్యం :

ఒక సమతలంపై గీచిన ఒక సంపూర్ణ చిత్రలను సమతలం నుండి వేరు చేయండి. ఇది సంపూర్ణ చిత్రం యొక్క అంతర్భాగం అవుతుంది. తోటలో కొలత భాగానికంచే వేసినట్లు ఇది ఉంటుంది. గట్లు ద్వారా కొలత భుమిని పోలంగా మారుస్తుంటాం. సమతలం నుండి. మీరు చేసిన భాగం యొక్క పరిమాణంను అస్థలం యొక్క వైశాల్యం అంటారు.



ప్రక్క ఘటం 10.16 (క) లో $ABCD$ ఒక దీర్ఘ చతురస్రం. ఘటం (ఖ) లో $ABCD$ చే పరిమితమైన భాగానికి రంగు వేయడమైనది. $ABCD$ దీర్ఘచతురస్రం రంగు వేసిన భాగంను కలిపి $ABCD$ దీర్ఘ చతురస్రం అంటారు.

రంగు వేసిన ఆ భాగ పరిమాణంను $ABCD$ దీర్ఘ చతురస్రం పస్త్ర పైశాల్యం అంటారు.

10.16

పొడవును కొలుచుటకు మీటరు ప్రమాణాన్ని తీసుకుందాం. ద్రవ పదార్థాలకు లీటరును తీసుకుంటాం. అదే విధంగా వైశాల్యానికి 1 మీటరు భుజంగల చతురస్త్ర వేశార్థా 1 చదవవు మీటరును ప్రమాణంగా తీసుకుంటాం. చిన్న చిన్న వాటి వైశాల్యలను చ.సెం.మీ. తీసుకుంటాం.

మీకు తెలుసా ?

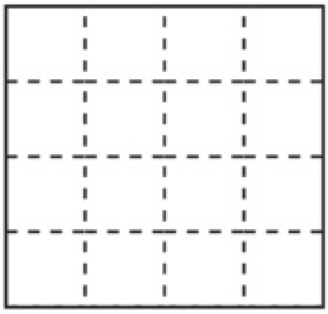
1 చదరపు మీటరు - 10 మీ.

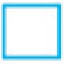
కారణను తెలుపుము.

10.3.1. సమ చతురస్ర వైశాల్యం :

ప్రక్కన 4 మీ భుజం గల చతురస్త్రం కలదు.

ఇది ఒక 1 మీ. భుజం గల ఒక చతురస్త్రం దీని కొలప్రమాణంగా తీసుకొలచ్చును.



 ఈ ఆకారంలోని ఆసనాలను తీసుకొనుము. వాటిని ప్రక్కన చూపిన కఖగఘ చతురస్త్రంపై ఒక దాని ప్రక్కన మరొక దానిని అమర్చండి. ఎన్ని వరుసలు అయ్యేనో చూడండి.

ఫటం 10.17 ను చూడుము. ఆసనాలు ఒక్కొక్క వరుసలో నాలుగు ఉన్నాయి. 4 వరుసలలో ఉన్నయి. కాబట్టి 1 మీ. పొడవు గల చతురస్త్రం అసనం కఖగఘ చతురస్త్రం పై 4× 4 =16 ఉన్నాయి.

ఇప్పుడు చెప్పండి.

కఖగఘ చతురస్త్రంలో ఎన్ని అసనాలు వేయడమయ్యింది?

16 కాబట్టి దాని వెశాల్యం =16 చ మీటర్లు

16= 4× 4 లేక 4 యొక్క వర్ణం

కాబట్టి 4 మీ పొడవు గల చతురస్త్రం వైశాల్య $= 4^2$

మీకు తెలుసా ?

4×4ను 4 గా రాయవచ్చును.

ఇక్కడ ఆధారం 4 మొత్తం 2

4^2ను 4 యొక్క వర్గం అంటారు.

చతురస్త్రం భుజం a మీ అవినచో దాని వైశాల్యం $= a^2$ చ.మీ. అగును.

ఒక చతురస్త్రం వెశాల్యం 9 చ. సెం.మీ. అయినచో దాని భుజం ఎంతఅగును ? అని శ్యామ్ అడిగెను.

రమణ ఆలోచించి 3 సెం.మీ. అని చేప్పెను.

శ్యామ్ : ఎలా ?

రమణ : $3\times3=9$ లేక $3^2=9$

చతురస్త్రం వైశాల్యము (ఖాడిము)^2

భుజం = 3 సెం.మీ.

చెప్పి చూడండి.

ఒక చతురస్త్రం వేశాల్యం 25 చ.సెం.మీ. అయినచో దాని భుజం పొడవు ఎంత ?

శ్యాం - ఒక వేళ చతురస్త్రం వైశాల్యం 324 చ. సెం.మీ. అయినచో దాని చూసిన పొడవు గుణిస్తే ఆ లబ్దం 324 అవుతుంది.

విషయాన్ని ఉపాధ్యాయునికి వారు అడిగారు.

ఉపధ్యాయుడు - ఒక సంఖ్యను మరొక సంఖ్యం గుణించగా వచ్చే లబ్దం ఆ సంఖ్య యొక్క వర్గం అవుతుంది.

అనగా $3\times3=9$ అవుతుంది అని 3 యొక్క వర్గం

అదే విధంగా $4\times4=16$ కాబట్టి 16 అనునది 4 యొక్క వర్గం

3 ను 9 యొక్క వర్గములముని, 4 ను 16 యొక్క వర్గములం అని అందురు.

కాబట్టి 9 యొక్క వర్గములం 3, 16 యొక్క వర్గమూలం 4 అగును (ఎందుకనగా $4\times4=16$)

ఇపుడు 324 యొక్క వర్గమూలం కనుగొనండి

వారంతా 324 యొక్క వర్గమూలం కనుగొనుటకు ప్రయత్నించారు)

$$324=2\times2\times3\times3\times3\times3$$
$$=2\times3\times3\times2\times3\times3$$
$$=18\times18$$

324 యొక్క వర్గమూలం $=18$

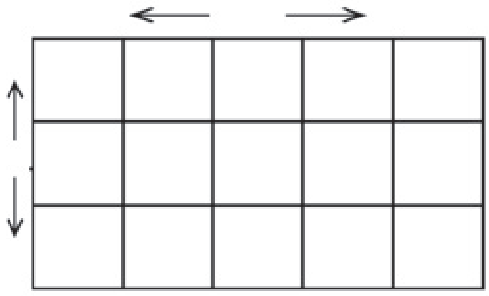
ఒక చతురస్రం వైశాల్య 324 చ. సెం.మీ. అయినచో దాని భుజం 18 సెం.మీ. అగును.

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

చతురస్ర భుజం = చతురస్రం వైశాల్యం యొక్క వర్గమూలం

10.3.2. దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం -

ప్రక్క పటంను చూడండి. పొడవు 5మీ. వెడల్పు 3మీ. అయిన దాని వైశాల్య ఎంత 1 మీ భుజం గల చతురస్త్రాంకారంలోని కాగా భోర్డు ముక్కలను తీసుకొని కఖగఘ దీర్ఘ చతురస్రాకారపు స్థళంపై ఒక దాని ప్రక్కన మరొకదానిని అమర్చాండి.



- ఇలా ఎన్ని వరుసలలో అమర్చారు ?
- మొత్తం ఎన్ని అయ్యాయి $=5\times3=15$
- మొత్తం కార్డు బోర్డుల వైశాల్యము $=15\times1$
- మొత్తం $=15\times1$ చ.మీ. $=15$ చ మీ. అయ్యేను.
- కావున దాని పొడవు, వెడల్పు లబ్ధం $=5\times3=15$

అందుచేత పొడవు a మీ. వెడల్పు b మీ అనుకున్నచో

దీర్ఘ చతురస్తం వైశాల్యం $=(a\times b)$ చ.మీ.

ఉదాహరణ -

5 మీ. పొడవు గల ఒక చతురస్రా వైశాల్యం కంటె దానికి రెండు ప్రక్క పొడవు గల చతురస్త్రం వైశాల్యం ఎంత అధికం?

సాధన -

> మీకు తెలుసా?
> 5 మీ. చతురస్రా అనగా దాని ప్రతిభుజం పొడవు 5మీ.

చతురస్త్రం పొడవు 5 మీ.

చతురస్త్రం వైశాల్యము $= 5^2$ చ.మీ. $= 25$ చ. మీ.

దాని పొడవునకు 2 వంతులు ఎక్కువ $= 5 \times 2 =$ 10 మీ.

10 మీ పొడవు గల చతురస్త వైశాల్యం $= 10^2$ చ. మీ. $=$ 100 చ. మీ.

రెండు చతురస్త్రాం పైశాలలో భేధలు $=$ 100 చ. మీ. - 25 చ. మీ. $=$ 75 చ. మీ.

ఉదాహరణ 4

100 మీ. పొడవు గల దీర్ఘచతురస్త్రం వైశాల్యం 2000 చ. మీ. సమాన పొడవు గల మరొక దీర్ఘచతురస్త్రం వెడల్పు మొదటిదాని వెడల్పునకు 2 వంతులు అయిన రెండవ దీర్ఘ చతురస్త్రం వైశాల్యం ఎంత ?

సాధన : మొదటి దీర్ఘ చతురస్త్రం పొడవు $=$ 100 మీ.

దీర్ఘ చతురస్ఠ వెడల్పు = 2000 చ.మీ.

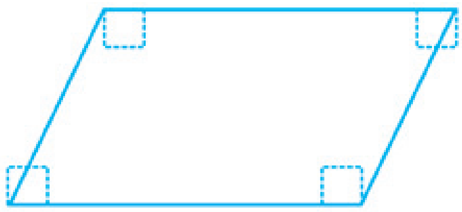
పొ $\times$ వె = 2000 చ. మీ.

వెడల్పు = $\dfrac{2000}{\text{వెడల్పు}} = \dfrac{2000}{100}$ చ. మీ. $= 20$

రెండవ దాని వెడల్పు మొదటి దాని వెడల్పునకు 2 వంతులు $= 20 \times 2 = 40$మి.

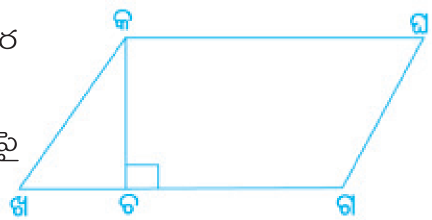
పొడవు $=$100 మీ., వైశాల్యం పొడవు $= (100 \times 40)$ చ.మీ. $= 4000$ మీ.

10.4. సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం -



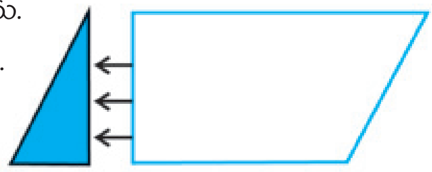
తరగతిలో దీర్ఘ చతురస్త్రం చతపరిరసితశ్రీ వైశాల్యం కనుగొనుటను జోసెఫ్ విన్నాడు. సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైసల్యం కనుగొనుటకై అతడు చతురస్త్రాకారపు కాగితం రిబ్బను తీసుకున్నాడు.

1 సెం.మీ. భుజం గల చతురస్త్రాం కాగితం రిబ్బను తీసుకొని సమాంతర చతుర్భుజం ఒక మూల నుండి అమర్చడు. ప్రారంభించాడు. ఆతడు తీసుకున్న చతురస్త్రాకారపు రిబన్‌లో కొలత భాగం సమాంతర చతుర్భుజంనకు వెలువల ఉండి పోయింది. కాబట్టి అతడు ఏం చేశాడు ? ఉపాధ్యాయుని అడిగాడు ఉపాధ్యాయుడు కింది విధంగా చేసి చుపించెను.



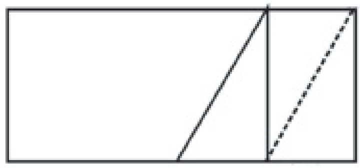
- ఒక కాగితపు రిబ్బను ముక్కను తీసుకొని దానిపై సమాంతర చతుర్భుజంను నిర్మించెను. దాని పేరు కఖగఘు అనుకొనుము.
- సెట్ స్కేయర్‌ను వినియోగించుకొని క బిందువు వద్ద ఖగ భుజంపై లంబాన్ని గీచెను. దానికి కచ అని పేరు పెట్టెను.

- కఖగఘ సమాంతర చతుర్భుజాన్ని మొదటి రిబ్బను వేరు చేసెను.
  కఖగఘసమాంతర చతుర్భుజం భుజాల పొడవులను కొలిచెను.
- ఘగ కఖ $=$10 సెం.మీ., కఘ ఖగ $=$14 సెం.మీ.



- లంబం కచ పొడవు కొలచెను కచ $=$6 సెం.మీ.
- ఇప్పుడు కచఖ త్రిభుజాకారాన్ని సమాంతర చతుర్భుజం నుండి వేరు
- చేసెను.
  మిగిలిన క చ గ ఘ ను చూపించెను.
- కచఖ త్రిభుజాన్ని తీసుకొని మిగిలిన యొక్క ఘగ అంచుతో జత
- చేసెను.

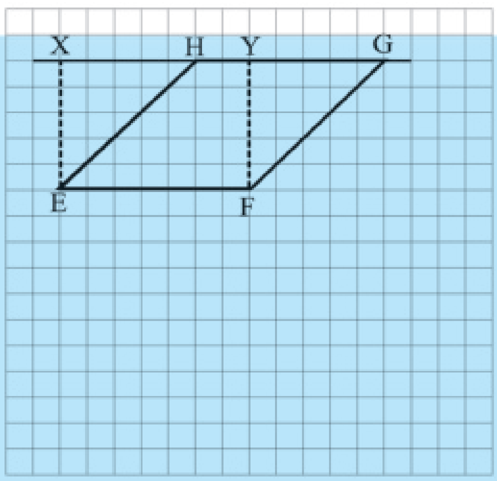
ఘగ, కఖ రెండింటి పొడవులు సమానం (ఒక్కొక్కటి 10 సెం.మీ.) అందుచేత రెండు అంచులు పూర్తిగా కలసి పోయాయి. ఆ తరువాత దాని ఆకారం ప్రక్కన గల ఘటం ఆకారంలోనికి మారింది. చ కోణాన్ని ఛ గా తీసుకోవడమయింది. ఇప్పుడు దీర్ఘ చతురస్రాకారపు ఘటం ఏర్పడింది.



చఛ భుజం పొడవు $=$ చ గ భుజం పొడవు $+$ ఖ చ భుజం పొడవు
$=$ మొదటి ఘటంలోని ఖగ భుజం పొడవు 14 సెం.మీ.
కచ భుజం పొడవు 10 సెం.మీ.
కచఛఘ దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం $= l \times b =$ (14 $\times$10) చ.సెం.మీ.
దీర్ఘ చతురస్రం వెడల్పు కచ సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఖ శీర్షం నుండి ఖగ భుజంపై గీసిన లంబం ఈ లంబం కచ PC ను సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఖగ భుజంపై ఎత్తు అందురు. ఖగ భుజంను సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యాన్ని కనుగొనుము.

✍

ప్రయత్నించండి :



- ఒక గ్రాఫ్ కాగితం తీసుకొని దానిపై EF రేఖను గీయండి.
- EF లో సమాన పొడవు గల HG రేఖను గీయండి. గ్రాఫ్ కాగితంపై EF, GH లు సమాంతరంగా ఉండవలెను. E, H గ్రాఫ్, కాగితంపై పై నుండి క్రిందకు గల గీతపై ఉండరాదు. ఇప్పుడు EH, FG రెండు రేఖా ఖండాలను గీయండి. దీని
- వలన EF, GH సమాంతర చతుర్భుజం ఏర్పడుతుంది. ఈ సమాంతర చతుర్భుజంలో ఉన్న గదులను లెక్కించండి. వాటిలో వైశాల్యాన్ని నిర్ణయించండి.

చతురస్రా కరపు గదులను లేక్కించునపుడు పూర్తిగా ఉన్న గదులనే లెక్కలోని తీసుకోవాలి సగానికి పైగా ఉన్న గదిని ఒక గదిగా తీసుకొని సగంకంటె తక్కువ ఉన్న గాలిని లెక్కించకుడా విడిచిపెట్టివలెను.

- F బిందువు నుండి H,G రేఖా ఖండంపై F,Y లంబాన్ని గీయండి.
- GH రేఖఖండాన్ని ఎడమ దిశగా పొడిచ్‌డి. E బిందువు నుండి పోడిచిన భాగంపై లంబం నిర్మించండి. దీనిని EX అనుకొనుము.
- $XEFY$ ఒక దీర్ఘచతురస్త్రం అవుతుంది. గ్రాఫ్ కాగితంలోని చదరపుగదులను లెక్కించి $XEFY$ దీర్ఘ చతుపస్తం వైశాల్యం తీసుకొనుము.
- ఇప్పుడు $EFGH$ సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం $XEFY$ దీర్ఘ చతురస్తం వైశాల్యంనకు సమానం అని తెలుసుకుంటారు.

ఇచ్చట $HEFG$ సమాంతర చతుర్భుజం, $XEFY$ దీర్ఘ చతురస్తం భుజం ఒకటె $XEFY$ దీర్ఘచతురుస్తం భూజం $XEFY$ ఒకటె $XEFY$ దీర్ఘ చతురస్త ఎడల్పు XE సమంతర చతుర్భుజం $HEFG$ ఎత్తు కూడా XE అగును.

కాని దీర్ఘ చతురస్త వైశాల్యం $= t \times b = EF \times EX$

కాబట్టి సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం $= EF \times EX$

అనగా సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం భుజం ఎత్తు

కాబట్టి సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం

కనుగొనుటకు సూత్రం (భూజం $\times$ ఎత్తు) చ యునిట్

మీకు తెలుసా ?

ఒకే భూమిపై ఒకే ఎత్తులోగల సమాంతర చతుర్భుజం దీర్ఘచతురస్తం వైసాల్యం సమానం

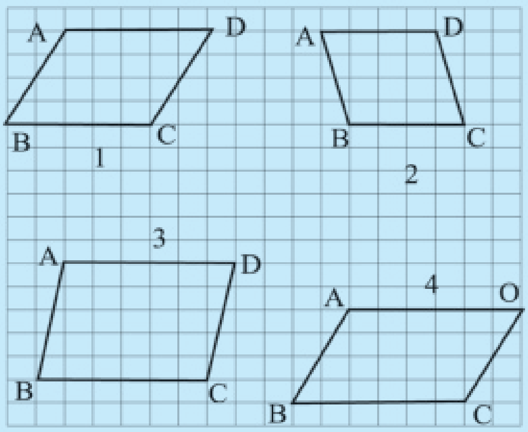
చెప్పి చూడండి.

సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం ఎత్తు తెలిసినచో భుజాని ఎలా తెలుసుకోగలుగుతారు.

పట్టికలోని ఖాళీ గదులను పూరించండి.

గ్రాఫ్ కాగీతంపై గల చతురస్తంపు గదులను లేక్కించి సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం తెలుసుకొని కిందిపట్టి వ్రాయండి.

ఫటం	భుజం	ఎత్తు	వైశాల్యం	భుజ$\times$ఎత్తు
1				
2				
3				
4				



ఉదాహరణ -5 :

ఒక సమాంతర చతుర్భుజం భుజం పొడవు 8.2 సెం.మీ. ఈ భుజంపై ఎదురుగా ఉన్న బిందువు నుండి గీసిన లంబం పొడవుగల 2.3 సెం.మీ. అయిన దాని వేశాల్యం ఎంత ?

సమాంతర చతుర్భుజం భుజం 8.2 సెం.మీ., ఎత్తు = 2.3 సెం.మీ.

వైశాల్యం = భుజం × ఎత్తు

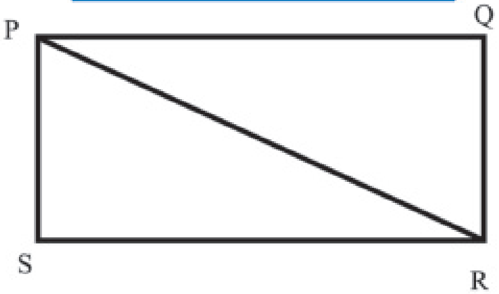
= (8.2 × 2.3) చ. సెం.మీ. = 18.86 చ.సెం.మీ.

10.5 త్రిభుజ వైశాల్యం

త్రిభుజాకారంలో ఉన్న స్థలం చుట్టు కంటె వేయుటకు అయ్యే ఖర్చు దాని చుట్టుకొంతపై ఆధారపడి ఉంటుందని మనకు తెలుసు. అదే విధంగా ఆ స్థలం దున్నుటకు, మట్టి చదును చేయటకు, గడ్డి, వెలుక్కలు నాటుటకు అయ్యే ఖర్చు దాని వైశాల్యపై ఆధారపడిఉంటుంది.

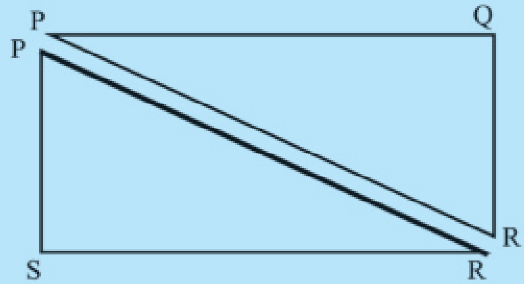
మీకు తెలుసా ?

సమాంతర చతుర్భుజంలో ఏ భుజాన్ని అయినా భుమిగా తీసుకోవచ్చు. ఈ భుమిపై ఎదురుగానున్న బిందువున గచిన లంబం ఎత్తు అగును.



ప్రయత్నించండి :

- ఒక కాగితాన్ని తీసుకొని దానిని దీర్ఘచతురస్త్ర నిర్మించిదానికి
- $PQRS$ గా గుర్తించుము.
- దాని PR కర్ణం శీసి దాని అంచున PR ను కత్తిరించుము.
  దానివలన ఏర్పిన PRS త్రిభుజాన్ని PRQ త్రిభుజంపై ఉంచండి.
- రెండు త్రిభుజాలు సర్వ సమానములని మీరు గ్రహించగలరు.
- ఈ రెండు త్రిభుజ వైశాల్యలు సమానమా ?



పరిశీలించండి-

- ఈ విధంగా ఏర్పడిన లంబకోణ ప్రభుజింలోని ఒక భుజం దీర్ఘ చతురస్త్రం పొడవు, రెండవ భుజం దీర్ఘచతురస్త్రం వెడల్పు అగును.
- రెఇడు త్రిభుజాలు ఒక దానిలో ఒకటి పూర్తిగా కలిసి పోవుటవలన వాటి వైశాల్యాలు సమానం.
- రెండు త్రిభుజల వైశాల్యాల మొత్తం దీర్ఘచతురస్త్ర వైశాల్యనికి సమానం అందుచేత

మీకు తెలుసా ?

ఒక దీ. చ. యొక్క కర్ణము దానిని రెండు సమాన వైసాల్యాలు గల రెండు లంబకోణ త్రిభుజలుగా విభజిస్తుంది.

ఏర్పడిన లంబకోణ త్రిభుజ వైశాల్యం = మొదటి దీర్ఘచతురస్త్రం వైశాల్యం సగం

$= \frac{1}{2} \times$ దీర్ఘ చతురస్త్ర వైశాల్యం

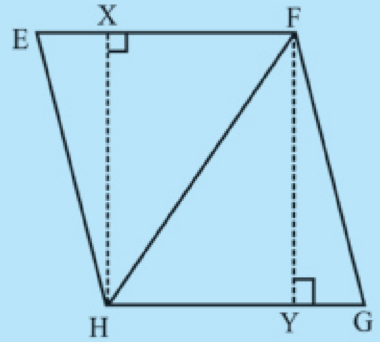
$= \frac{1}{2} \times$ (పొడవు వెడల్పు) చ. మీ.

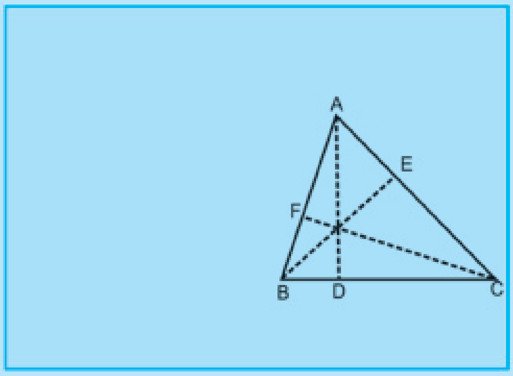
$\frac{1}{2} \times$ లంబకోణ ఆసన్న భుజాల లబ్ధం.

ప్రయత్నించండి :

- ఒక సమచతుర్భుజంను నిర్మించండి. ప్రక్క ఫటంలో చూపిన విధంగా పేరు పెట్టండి.
- దాని వ్యతిరేఖ శీర్షాలను కలుపుతూ కర్ణమును గీయండి.
- సమాంతర చతుర్భుజం $(EFGH)$ దాని కర్ణం (FH) అంచు మీదుగా కత్తిరించినచో ఆ రెండు త్రిభుజాలను ఒక దానిపై మరొకటి ఉంచండి. వాటి సంబంధాన్ని పరిశీలించండి. ఏమి గమనించారా?
- ఏర్పడిన త్రిభుజాలు EFH, GFH రెండు సమాన వైశాల్యం కలపి.
- EFH త్రిభుజ వైశాల్యం $+ GFH$ త్రిభుజవైశాల్యం
- $= \frac{1}{2} \times$ సమాంతర చతుర్భుజవైసాల్యం

$= \frac{1}{2} \times$ భుజం $\times$ ఎత్తు

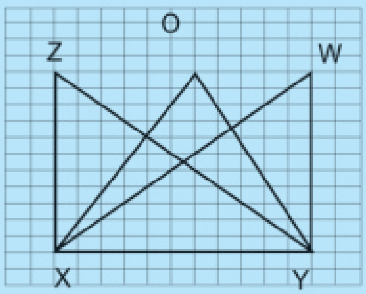




దీనిని బట్టి త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ భుజం $\times$ ఎత్తు

ప్రయత్నించండి :

- ఒక గ్రాఫ్ కాగితం తీసుకొనుము. దానిపై XY భూమిని. తీసుకొని XY పై XYZ, OXY, WXY అవే మూడు త్రిభుజాలను నిర్మించండి. Z, O, W బిందువులు మూడు గ్రాఫ్ కాగితం నుండి కుడికి పోయె ఒక గీతపై ఉండవలెను.
- గ్రాఫ్ కాగితంలోని గతులను లెక్కించి ప్రతిభుజ వైసల్యాన్ని నిర్మించండి.
- మూడు త్రిభుజల వైసల్యాం మధ్య ఏ విధమైన సంబంధం కలదు.



ఉదాహరణ -

ఒక త్రిభుజం భూమి 20 సెం.మీ. ఎత్తు 5.3 సెం.మీ. అయిన దాని వైసాల్యా ఎంత ?

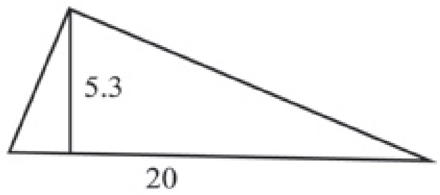
త్రిభుజం భూమి = 20 సెం.మీ.

ఎత్తు = 5.3 సెం.మీ.

వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ భూమి $\times$ ఎత్తు

$= \frac{1}{2} \times 20 \times 5.3$ చ. సెం.మీ.

$= 53$ చ. సెం.మీ.



10.6. వైశాల్యానికి

వైశాల్యాన్ని తెలుసుకొనుటకై ఉపయోగించే ప్రమాణాన్ని ఇది వరకే మనం తెలుసుకున్నాం.

1. చ.దరపు మీటరు $= 1000$ చ. మీ.రు.

1. కి.మీ. = 1000 మీ.

1 చ.కి.మీ. $= (1000)^2$ చ.మీ.

$= 1000000$ చ. మీ.

1 సెం.మీ. = 10 మి. మీ.

1 చ. సెఇ.మీ. $= (10)^2$ చ.మీ.మీ.

$= 100$ చ.

చెప్పి చూడండి
1000 చ.సె.మీ. = 1.చమీ.
అగును

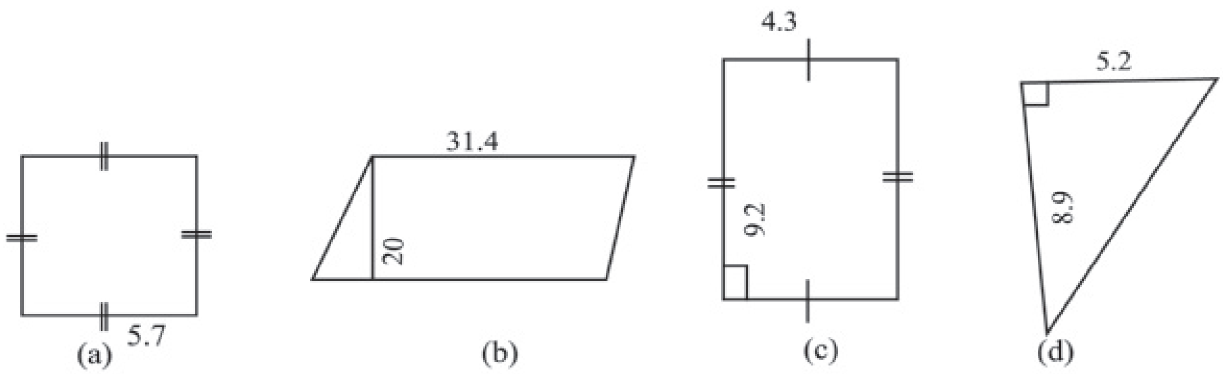
సాధించుము -

క) 1000 చ. మీ. లు ఎన్ని చ. మీ. అగునా

గ) 100 చ. మీ. ఎన్ని చ. సెం.మీ. కు సమానం

అభ్యాసం 10.3

1. క్రింది చిత్రాల వైశాల్యనులను కనుగొనండి ?



2. ఖాళీ గదులను పూరించుము.

అకారం పేరు	వైశాల్యం	భుమి	ఎత్తు
సమాంతర చతుర్భుజం	174 చ.మీ.	15 .మీ.	?
త్రిభుజం	1 చ.మీ.	?	2.5 సె.మీ.
సమాంతర చతుర్భుజం	1చ.మీ.	?	2000 మీ.
దీర్ఘ చతురస్త్రం	15.36 చ.మీ.	4.8 మీ.మీ	?
త్రిభుజం	64.95 చ.మీ.	?	15 మీ.

3. ఒక ధీర్ఘచతురస్త్రం వైశాల్యం 500 చ.మీ. దాని పొడవు 25 మీ వెడల్పు ఎంత? దాని చుట్టూ కంచె వేయుటకు మీటరు 1 కి. రు. 9.50 పై చుప్పున మొత్తం ఎంత ఖర్చు అగును.

4. 15 సెం.మీ. పొడవుగల చతురస్త్ర వెడల్పు 15 సెం.మీ. భుమిగల త్రిభుజ వైశాల్యంలో సమానం అయిన ఆ త్రిభుజం ఎత్తు ఎంత ?

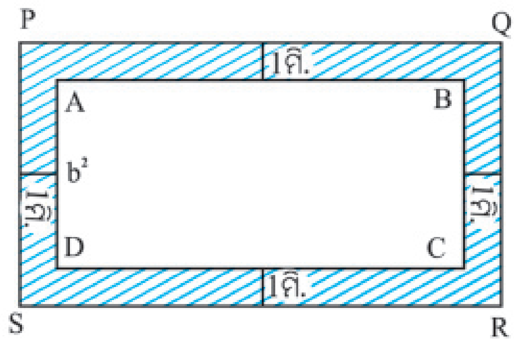
5. త్రిభుజాకారంలో ఉన్న ఒక పోలం భూమి, 60 మీ. ఎత్తు, 20 మీ. 1 చ.మీ.కు 1500 రూ చొప్పున ఆ పొలం ఖరీదు ఎంత అవుతుంది ?

6. 50 సెం.మీ. ఎత్తు గల రెండు త్రిభుజాల ప్రసాల్యా మొత్తం 1 చ.మీ. అందులో ఒక ఒక త్రిభుజం భుమి 160 సెం.మీ. అయిన రెండవ దాని భుమి ఏడల్పు ఎంత ?

10.7. దీర్ఘ చతురుస్తం లోపల, బయుట అంచులను తాకుతూ ఉన్న స్థల వైసాల్యం.

కొన్ని ఇళ్లకు చుట్టూ కాలినడక బాటి ఉండటం మనం చూస్తుంటాం. మీ పుస్తకంలో ఒక పేజిను తీసి చూడండి. నాలుగు అంచులుకు మధ్య కొంత ఖాళీస్థలం ఉంటుంది.

ఇటువంటి కొన్ని ఉదాహరణలను ఇవ్వండి.

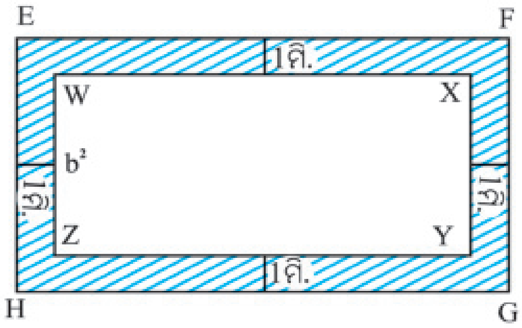


ప్రక్క $ABCD$ దీర్ఘ చతురస్త్రం కలదు. దాని నాలుగు అంచులను తాకుతు సమాన వెడల్పులో గుర్చించిన భాగం కలదు. ఈ స్థలం వైసాల్యం కనుగొందాం. రంగు గల భాగం నాలుగు ప్రక్కల ఒకే వెడల్పుతో ఉండుట వలన వెలువత $PQRS$ కూడా ఒక దీర్ఘ చతురస్త్రం అవుతుంది.

అందుచేత రంగు వేసిన భాగం వేశాల్యం = $PQRS$ దీర్ఘ చతురస్త్రం వేశాల్యం $ABCD$ దీర్ఘ చతురుస్త్రం వైసాల్యం.

ఉదాహరణ 7

20 మీ. పొడవు 15 మీ వెడల్పు గల దీర్ఘ చతురస్త్రం చుట్టు 1 మీ వెడల్పు గల దారి కలదు. అయిన దారి వైసాల్య ఎంత ?



సాధన -

$WXYZ$ ఒక దీ॥చ॥ అనుకొనుము

దీ॥చ॥ పోడవు $=$ 20 మీ.

వెడల్పు $=$15 మీ.

వైశాల్యం $=$ 20 మీ. $\times$15 మీ. $=$ 300 చ.మీ.

దాని చుట్టూ బాటకలదా ఖాట వెడల్పు $=$1 మీ

$EFGH$ అనే కొత్త దీఒఒ చ రర ఏర్పడినది.

$EFGH$ దీ॥ చ॥ పొడవు $EF = 22$ మీ.

వెడల్పు $EH =$17 మీ.

$EFGH$ దీ॥ చ॥ వైశాల్యం $=$ పొడవు $\times$ వెడల్పు

$=$ 22 మీ $\times$ 17 మీ.

$=$ 374 చ.మీ.

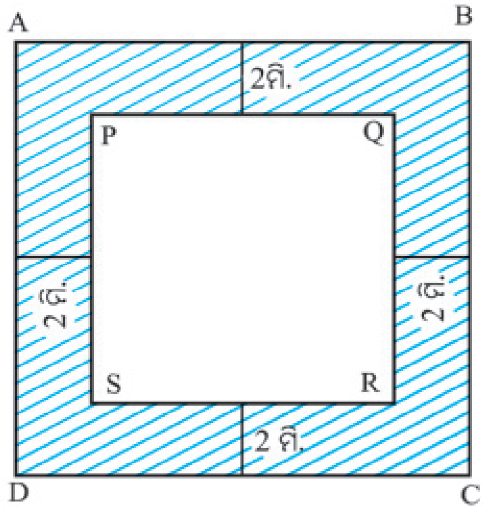
బాట వైశాల్యం $= EFGH$ దీ॥చ॥ వైశాల్యం - $WXYZ$ బ దీ॥ చ ॥ వైసాల్యం

$=$374 చ.మీ. - 300 చ.మీ.

ఖాటవైసాల్యం $=$ 74 చ॥మీ.

ఉదాహరణ - 8

40 మీ. ఖాజం గల చతురస్త్రా కారపు మైదానం లోపల 2 మీ. వెడల్పు గల బాటకలదు. ఆ ఖాటను ఖగు చేయుటకు చ.మీ.నకు రూ 2.50 పై చొప్పున ఎఖాత ఖర్చు ఆగును.



సాధన - చతురస్త్రాకార వైదానం ను $ABCD$ అను॥ దాని లోపల ఖట కలదు.

$ABCD$ చతురస్త్రం వైసాల్యం $=$ భుజం $\times$ భుజం

$=$ (40 $\times$ 40) చ.మీ.

$=$ 1600 చ.మీ.

$=(40\times40)$

$=1600$

ABCD చతురస్త్రంలోగల $PQRS$ కూడ ఒక చతురస్త్రం

చతురస్త్రా భుజం = 40 మీ. - (2×2) మీ.

= 36 మీ.

PQRS వైసాల్యం =(36 మీ.×36 మీ.)

=1296 చ.మీ.

బాట వైసాల్యం = చతురస్త వైశాల్యం - *PQRS* చతురస్త పైసాల్యం

=1600 చ.మీ. - 1296 చ.మీ.

= 304 చ.మీ.

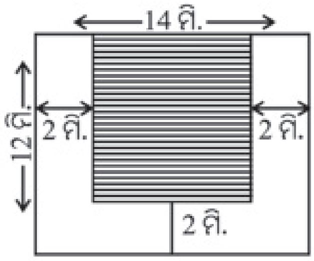
ఖాగు చేయుటకు 1 చ.మీ.కు అయ్యే ఖర్చు = రూ 2.50 పై

304 ఖ.మీ. కు అయ్యే ఖర్చు = 304 × 2.50

= రూ. 760

అభ్యాసం 10.4

1. 45 మీ. పొడవు 20 ను వెడల్పు గల దీర్ఘచతురస్త కారపు మైదానంలోపల అంచులను తాకుతు చుట్టు 2.5 మీ. వెడల్పు కంకర్ వేయుటకు (చ.మీ. రూ. 14 చొప్పున మొత్తం ఎంత ఖర్చు అగును.



2. ప్రక్క ఫటంలో గీతలున్న భాగం వైసాల్యాన్ని కనుగొనండి.
3. 60 మీ వెడల్పు 75 మీ. పొడవు గల ఆటస్థలంలోపల చుట్టూ 1.5 మీ. వెడల్పున గడ్డి కోయుటకు చ.మీ. 1 కు రూ. 3 చొప్పున ఎంత ఖర్చు అగును.
4. 40 మీ. పొడవు 30 మీ. వెడల్పు గల దీర్ఘచతురస్తం లోపల అంచులను దాకుతూ 1 మీ వెడల్పున మట్టి వేయుటకు చ.మీ. 1కు. రూ 8 చొప్పున ఎంత ఖర్చు అగును.
5. ఒక స్కేలులో 20 మీ. పొడవు 12 మీ. వెడల్పు గల ప్రార్ధన గృహం లోపల గోడను తాకుతూ 1 మీ. వెడల్పున టైల్సు అమర్చవలెను. టైల్సు చతురస్త్రాకారంలో ఉండి ఒక్కొక్క దాని ఖాడం పొడవు 25 సెం.మీ. అయిన మొత్తం ఎన్ని టైల్సు అవసరమగును.
6. ఒక చతురస్త్రా కారంలో ఉన్న మైదానం ఖాడం పోడవు 40 మీ. వైదానం అంచును తాకుతూ చుట్టూ 1 మీ వేడల్పు గల ఖాట వేయుటకు చ.మీ. 1 కు 10 రూ. చొపున రూ. 1640 ఖర్చు అయ్యేను అయినచో

   క) మైదానం వైశాల్యం ఎంత

   ఖ) ఖట వైశాల్యం ఎత

   గ) బాటతో కలిసి మైదానం ఏ వకారంలో కలదు ?

   ఘ) ఈ స్థలం విలువల పొడవు ఎంత ?

ప్రయత్నించండి :

- కాగితంపై 3 సెం.మీ. వ్యాసార్థం గల వృత్తం గీయండి. దానిని కత్తిరించి కాగితం నుండి వేరు చేయండి. కాగితం ఒక ప్రక్కన ఎరుపురంగు వేయండి. అదే విధంగా వేరు వేరు కాగితాలపై 4 సెం.మీ., 5 సెం.మీ., 6 సెం.మీ. వ్యాసార్థాలు గల వృత్తాలను గీయండి మునుపటి. వలె కత్తిరించి వేరు చేయండి. వాటికి వేరు వేరు రంగులు వేయండి.
- ప్రతీ వృత్తాకార కాగితాన్ని ఒకదానిపై మరొకటి ఉంచండి. ఆ వృత్తాలన్నింటి కేంద్ర బిందువు ఒకటై ఉండవలెను. వైశాల్యాన్ని అనుసరించి వాటిని కింది నుండి పైకి అమర్చవలెను.
- అవి ఏ విధంగా కనిపించునో చూడండి.
- ప్రతీ వృత్త వైశాల్యం కనుగొనండి.

11వ అధ్యాయం

విషయ నిర్వహణ (దత్తాంశ నిర్వహణ)

11.1 పరిచయం

క్రింది తరగతులలో (దత్తాంశ) విషమ నిర్వహణ, విశ్లేషశ్రీ, విషయ లేఖనం గూర్చి తెలుసుకున్నాం. ఒక బడిలో 246 మంది పిల్లలు కలరు. వారి వయుఖలను తెలుసుకొని క్రింది పట్టికలో రాయబడినది.

వయస్సు	పిల్లల సంఖ్య
6	30
7	34
8	36
9	40
10	38
11	37
12	31

పై పట్టిక నుండి క్రంది ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయుము.

క) ఏ వయస్సు కల పిల్లలు అధికంగా ఉన్నారు ?

ఖ) ఏ రెండు పిల్లల సంఖ్య మధ్య గల తేడా 2 కలదు ?

గ) 10 సంవత్సరాలు, దానికంటె ఎక్కువ వయుస్సల గల పిల్లలు ఎంతమంది కలరు.

ఘ) అత్యపు అత్యధిక వయుసు గల పిల్లల మధ్య ఆనుపాతం ఎంత ?

ఈ తరగతికి చెందిన ఉత్తంశ నిర్వహణ గూర్చి మరింతగా తెలుసుకుందాం.

ఏదైనా ఒక సంఘటన జరిగే అవకాశం దాని పరిమాణం నిర్ణయించుటకు గూర్చి తెలుసుకుందాం.

11.2 సంభావ్యత ఏడల అనగానన

- మన నిత్య జీవితంలో జరుగుతుండే కొన్ని సంఘటనలు దీగున ఇవ్వబడినవి.
- ఈ రోజు కొరాపుట్‌లో అధిక వర్షం కురిసే సంభావ్యత కలదు. (ఇచ్చట బట్టకి మేఘలను చూసి చెపవచ్చును) దూరదర్శనిలు, వాటిని గూర్చి విషయసేకరణ చేయుము.
- వర్షాలు లేవు. కావున కూరగాయుల ధరలు పెరిగే సంభార్యత కలదు.
- రలేజ్ఞ సాన్ అవుతాడా అదే సందేహం నాకుకలదు.
- క్రికేట్ ఆటలో మీ టీమ్ టాసి గెలుస్తుందని 50-50 సంభావ్యత అవుతుంది.

ఈ విషయాలను అధ్యయనం చేసినచో కొన్ని సందర్భాలలో ఇ సంఘటనలు సంభమించవచ్చు. మరికొన్ని సందర్భాలలో సంభవించక పోవచ్చు రంగాంలో సంఘటనలు సంభవించడం చాలా తక్కువ. మరికొన్ని సందర్భాలలో సంఘటన సంభవిఞచడం, సంబవించకపోవడం అనునది సరి సమానంగా ఉండవచ్చు.

ఇప్పుడు సమఘటనలలో దేని ఘణపరిమాణం అధికమో దాభుజం పొడవు, అధికం. అదే విధంగా రెండు వృత్తాలలో దేని వైశాల్యము అధికమా దాని వాసార్థం అధికం ఇది ఖఛ్చితంగా సంబవిస్తాయి. ఇండియా, ఆస్ట్రేలియా మధ్య జరిగే క్రికెట్ ఆటలో ఇండియా గెలిచే అవకాసం ఎఞతగా ఉన్నాయో అస్ట్రేలియా గెలవడానికి కూడా అవకాశాలు అంతగా ఉన్నాయి.

చెప్పి చుడండి

సంభవం, అనుకోవడం, సందేహించడం వంటి పదాలకు గణిత శుత్రంలో సంభావ్యత పదాలు అందురు. క్రింది మూడు పరిస్థితులో ఏది ఖఛ్చితంగా జరుగును ? ఏది జరగదు ? ఏది జరుగవచ్చు, జరగకపోవచ్చు ?

మొదటి పరిస్థిది - ఒక నెలలో రెండు సార్లు పౌర్ణమి వచ్చుట .

రెండవ పరిస్థితి - ఏదైనా ఒక నెలలో 1 నుండి 8 తేదీలలోపు రెండుసార్లు సోమవారం రావచ్చు.

మూడవ పరిస్థితి - ఒక నెలలో అమావస్య ఒకేసారి వస్తుంది.

మీ నిత్య జీవితంలో సంబవించే వాటిలో ఖఛ్చితంగా సంభవిస్తాయనే వాటిని మూడుంటిని వ్రాయండి? ఆ విధంగా సంభవించక పోవుట అనే వాటిని మూడంటిని వ్రాయండి.

11.3. నాణె టాస్ (ఎగురు) వేసే సమయంలో సంవవృత -

సాధరణ జీవితంలో సంభివృతను తక్కువ లేక ఎక్కువ అనే పదాల ద్వారా తెలియచేస్తాం దాని వలన సంభవం పరిమాణం నిర్ధిష్టింగా ఉండదు.

సంభవాన్ని సంఖ్యల ద్వారా తెలియచేసినచో అసదుపాయం తొలగిపోవచ్చు ఇచ్చట సంభవాన్ని సంఖ్యల ద్వారా తెలియచేద్దాం.

H T

ఒక నాణెంను తీసుకొని ఏగురు వేసిన హెడ్ లేక టెయిల్ లలో ఏది పడుతుందో చెప్పగలరా ?

ప్రయత్నించండి :

- ఒక నాణెను తీసుకొనుము.
- దాని హెడ్, టెయిల్ ను గుర్తించుము.
- ఆ నాణేన్ని 20 సార్లు ఎగుర వేయుము. ఏ ప్రక్క ఎన్ని సార్లు పడిందో ఒక పట్టికలో వ్రాయుము.
- 20 సార్లులో ఎన్ని సార్లు హెడ్, ఎన్ని సార్లు టెయిల్ పడిందో లెక్కించుము.

సీలా, మీరాలు 14 సార్లు ఎగురవేసేరు. ప్రతీసారి నాణెంలో ఏ ప్రక్క పడిందో వ్రాసారు. పట్టికలో హెడ్‌ను H తోను టెయిల్‌ను T తో గుర్తించి పట్టికలో గుర్చబడినది.

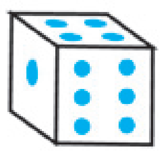
ఎగురవేస్సే సార్లు (టాస్ వరుస సంఖ్య)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ఫలితం	H	H	H	H	T	T	H	H	H	H	T	H	T	T

పట్టికను పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయుము. ఈ పట్టికలో వ్రాయుబడిన H, T ల వరుసలలో దేనికి నిర్థిష్ట క్రమంలో కలదు.

ఇచ్చట ఎటువంటి నిర్థిష్ట సంరచన క్రమలో లేదు మీరు నాణెమును ఎగురువేయునపుడు హెడ్ (H) లేక టెయిల్ (T) లలో ఏదైనా ఒక టాసిలో మీరు హెడ్‌గాని, టేల్ గాని పొందగలుగుతారు. ఇందులో మొత్తం సంభావ్యత ఫలితాలు రెండు కలవు.

11.4 లుడూను దొర్లించుటలో సంభావ్యత -

లుడూ పిక్కను మీరు చూసి ఉంటారు. దానికి ఎన్ని తలాలు కలవు. లుడూ పిక్కకు. 6 ప్రక్కలు (తలాలు) కలవు. 6 తలాలను గుర్తించుటకు 1 నుండి 6 వలకు అంకేలను సూచించు బిందువులు ఉండును. లుడూ పిక్కను వేసెనప్పుడు ప్రక్క ఉన్న తలంలోని బిందువులను లెక్కించి ఆ సంఖ్య రాయబడును. లుడూ ఆటలో అప్పుడప్పుడు ఒక నిర్థిష్టమైన బిందువుకొరకు నిరీక్షంచవలసి వుంటుంది. కావలసిన అంకె వస్తుందని ఆశిస్తు ఉంటారు. మీరు అనుకున్న అంకెను ప్రతిసారు పొందగలుగుతారా ? దానిని మీరు పొందవచ్చు, పొందలేక పోవచ్చు. మనం లుడూ వేయునపుడు ఏ అంకె వస్తుందో దానిని ముందుగా చేప్పలేం.



ప్రయత్నించండి :

- ఒక లుడూ పిక్కను తీసుకొనుము.
- దానిని తిప్పి వేయగా వచ్చు అంకెను క్రింది పట్టికలో వ్రాయుము. దాని ఎదురుగా టాలీ గుర్తు వ్రాయుము.
- ఈ విధంగా 30 సార్లు వేయుము. వాలీ గుర్తులను లెక్కించి ఏ అంకె ఎన్ని సార్లు వచ్చెనో వ్రాయుము.

లుడూ వేయుగా వచ్చిన సంఖ్య	టాలీ గుర్తు	ఎన్నిసార్లు వడింది.
1		
2		
3		
4		
5		
6		

- మీరు తయారు చేసిన పట్టికను చూసి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి.

క) ఏ అంకె అన్నింటి కంటె ఎక్కువ సార్లు వచ్చెను.

ఖ) ఏ అంకె అన్నింటి కంటె తక్కువ సార్లు వచ్చెను.

లుడూ పిక్కను ఒక సారి వేస్తే 1,2,3,4,5, లేక 6 లలో ఏదో ఒక అంకె వస్తుంది. అనగా ఒచ్చట మొత్తం సంభవ్యత ఫలితం ఆరు అగును.

ప్రయత్నించండి :

- మీరు మీ స్నేహితులు కలిసి లుడూను ఒక్కొక్కరం 30 సార్లు వేయండి.
- ఎన్ని సారు 1, 2, 3, 4, 5 లేక 6 వచ్చిందో పట్టికలో వ్రాయుము.

	ఎన్ని సార్లు వచ్చెను.					
పేరు	1	2	3	4	5	6
నీవు						
నిస్నేహితుడు						

అభ్యాసం 11.1

1. ఒక లుడూ పిక్కను 40 సార్లు వేయగా 1,2,3,4,5 లేక 6 అంకెలలో ఎది ఎన్ని సార్లు వచ్చెనో తెలుసుకొని ఒక స్తంబకార గాఫ్‌ను తయారు చేయుము.
2. (క) ౦౦డు నాణిలను ఒకేసారి ఎగురవేయుము. వచ్చిన ఫలితం సంభావ్యత అవుతుంద? కాదా ?
   ఖ) మీరు ఒక్కొక్కసారి రెండు నాణేలు తీసుకొని 10 సార్లు ఎగురవేయుము. ఫలితాన్ని క్రింది పట్టికలో వ్రాయుము.

టాస్ వేసిన సార్లు	౦౦డు నాణిలు పడే (T T)	సంఖ్య లు పడే సంఖ్య		పడే సంఖ్య (H H)
		(H T)	(T H)	
10				

గ) నీ పట్టికను నీస్నేషితులు తయారు చేసిన పట్టికలో సరిపోల్చుము.

11.5 సంభావ్యత -

ఒక నాణినికి రెండు ప్రక్కలు ఉంటాయి. ఆ రెండింటిలో ఒకటి హెడ్ (H) రెండవది టెయిల్ (L) కావున ఎగుర వేసినచో రెండింటిలో ఏదో ఒకటి వచ్చును. ప్రతీసారు ఎగురువేసిన హెడ్ పడే సంభావన ఎంతవరకు ఉన్నదో టెల్ పడే సంభావన కూడా అంతవరకు కలవు.

మనం ఎగురవేసే సమయంలో హెడ్ పడితే అనుకున్న ఫలితం. అది ఎన్ని సార్లు హెడ్ పడితే ఆ సంఖ్య అనుకున్న ఫలిత సంఖ్య అవుతుంది. దీనిని సంభావ్యత అందురు.

$$\text{హెడ్ (H) సంభావ్యత} = \frac{\text{అనుకున్న ఫలితంలసంఖ్య}}{\text{మొత్తం ఫలితంల సంఖ్య}} = \frac{1}{2}$$

అదే విధంగా టెల్ (T) పడే సంభావ్యత $= \frac{1}{2}$

లుడూ పిక్కలో మొత్తం 6 తలాలు ఉంటాయి.

ప్రతీ తలంలో 1,2,3,4,5 లేక 6 లలో ఏదో ఒక అంకెకు చెందిన గుర్తులు ఉంటాయి. అందుచేత దీనిలో మొత్తం ఫలితం 6

ఒకవేళ మనకు పడే అంకె 5 అనుకూదాం అపుడు అవకాశాలు సంఖ్య 1

$$\text{కావున 5 పడే సంభావ్యత} = \frac{\text{ఉద్దేశాచినఫలితం}}{} = \frac{1}{6}$$

✍ అదే విధంగా 2 పడే సంభావ్యతను నిర్ణయించుము.

కొన్ని రంగాలలో సంభావ్యత పరిమాణం :

ఏదైన ఒక సంఘటన ఏ మాత్రం సంభవించనిచో దాని సంభావ్యత అనే విధంగా లుడూ వేసినపుడు 7 పడుట అనుదాని సంభావ్యత 0 ఎందుకనగా లుడూలో 7 పడే అవకాసం ఏ మాత్రం లేదు.

ఏ సంఘటన ఖచ్చితంగా జరుగునో దాని సంభావ్యత - 1

నాణెం ను ఎగుర వేసిన సమయంలో హెడ్ ( ) లేక టెల్ (   ) పడే సంభావ్యత కలదు. అందుచేత ఇచ్చట సంభావ్యత 1 ఎందుకనగా

టాస్ వేస్తె హెడ్ లేక టెల్‌లలో ఏదో ఒకటి ఖచ్చితంగా పడుతుంది.

ఏదైన సంఘటన సంభవించవచ్చు. సంభవించక పోవచ్చు. ఇచ్చట సంభావ్యత 0 మరియు 1 ల మధ్య ఉంటుంది.

టాస్ వేసే సమయంలో పడే సంభావ్యత $\frac{1}{2}$ ఇది 0 మరియు 1 ల మధ్య ఉంటుంది.

లుడూ వేసినపుడు 5 పడే సంభావ్యత $\frac{1}{6}$ (0,1 ల మధ్య)

చెప్పి చుడండి -

ఇటువంటి 3 పరిస్థితులను ఉదాహరణగా తీసుకొని ఫలితాలను వ్రాయండి.

అభ్యాసం 11.2

1. క్రింది వానిలో ఏది ఖచ్చితంగా జరుగుతుంది ? జరిగే సంభావన కలదు ? జరిగే సంభావన లేనే లేదో వ్రాయండి.

   క) పూర్ణిమనాడు సూర్య గ్రహణం వస్తుంది ?

   ఖ) 2010 సంవత్సరం ఫిబ్రవర్ నెలలో 29 దినములు ఉండును.

   గ) 8 దినముల తరువాత బజారులో దుంపల ధర తగ్గును.

   ఘ) రేపు మేఘాలతో కూడిన వాతావరణం ఉంటుంది

2. ఒక పళ్లెంలో ఎరుపు, నలుపు, తెలుపు, నీలం, ఎచ్చ, పసుపు రంగుల బంతులు ఒక్కొక్కటి సమాన ఆకారాలలో ఉన్నాయి. కళ్ళు మూసుకొని పళ్లెం నుఇుడి ఒక బంతిని తీసినచో

క) తెలుపు రంగు బంతి వచ్చే సంభావ్యత ఎంత ?

ఖ) పళ్లెంలో 6 బంతులు ఉండగా వాటిలో నీలం రంగు బంతి తీసే సంభావ్యత ఎంత ?

గ) నీలరంగు బంతి తీసిన తరువాత పచ్చరంగు బంతి తీసే సంభవ్యత ఎంత ?

3. మీ తరగతిలోని బాలబాలికలు మధ్య క్రికెట్ పోటీ అవుతుంది. అమ్మయిలు, అబ్బాయిలలో ఎవరు మొదటి బ్యాటింగ్ చేస్తారో నిర్ణయిస్తుంది. అమ్మయిలు మొదటి బ్యాటింగ్ చేయడానికి ఎఇుత వరకు గలదు.

4. లుడూ పిక్కను 20 సార్లు వేశావు క్రింఖది వానిలో ఏ అంకె ఎన్ని సార్లు పడిందో పట్టికలో వ్రాయండి.

లుడూ పిక్కను వెసిన సార్లు	ఏ అంకె ఎన్నిసార్లు పడింది.					
	1	2	3	4	5	6
20 సార్లు						

పై అంకె ఎన్నిసార్లు పడిందో పట్టికను చూసి చెప్పండి.

క్రింది ప్రశ్నలకు సమాదానాలు వ్రాయండి.

క) 20 సార్లు వేసినప్పుడు $\dfrac{\text{4 పడిన సార్లు}}{\text{మొత్తం సారు}}$ = ...

ఖ) లుడూ పిక్క వేసినప్పుడు 4 యొక్క సంభావ్యతను నిర్ణయిఖచండి.

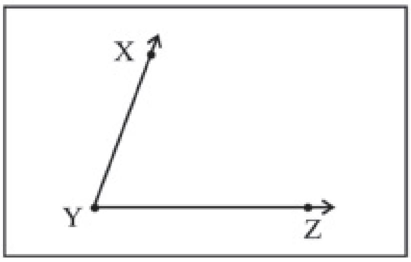
12వ అధ్యాయం

రేఖా చిత్రాల నిర్మాణం

12.1 పరిచయం

రేఖా చిత్రాలు నిర్మించే సమయంలో జ్యామెట్రీ బాక్సులోని స్కేలు, ప్రొటక్టరు, వృత్త లేఖిని, సెట్‌స్కేయర్లు మొదలైన వాటిని ఉపయోగిస్తుంటారు. వీటిని ఉపయోగించుకొని కింది తరగతులలో రేఖా ఖండాల సమద్విఖండన లంబరేఖ నిర్మాణం గూర్చి తెలుసుకున్నాం. అదే విధంగా ఇచ్చిన కోణ పరిమాణాన్ని సమద్విఖండన చేయుట గూర్చి తెలుసుకున్నారు. వృత్తలేఖిన సహాయంతో ఇచ్చిన కోణ పరిమాణంతో కోణం నిర్మించుటను గూర్చి తెలుసుకున్నారు. వాటిని మరొకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం రండి.

క) స్కేలు వృత్తలేఖిన సహాయంతో ఏదైనా ఒక కోణ పరిమాణంతో మరొక కోణా ఎలా నిర్మించగలమో చూద్దాం రండి.



ప్రక్కన ఒక కోణం బొమ్మ ఇవ్వడమయ్యింది.

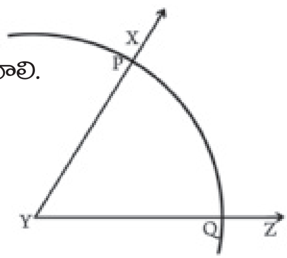
ఈ కోణం పేరు ఏమిటి ?

ఈ కోణ పరిమాణంతో సమానమైన $\angle ABC$ కోణం నిర్మించండి.

$\angle Y$ కు సన్నిహితమైన రెండు కిర్ణాల పేర్లు వ్రాయండి.

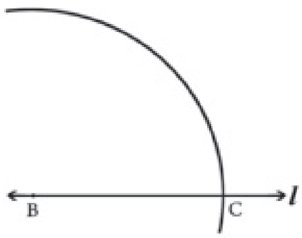
- మొదటి ఒక సరళరేఖ 'l'ను గీయండి.

- l రేఖ పై B బిందువును గుర్తించండి.
  ('B'బిందువు వద్ద $\angle Y$ యొక్క సమ పరిమాణంతో కోణం నిర్మించాలి.

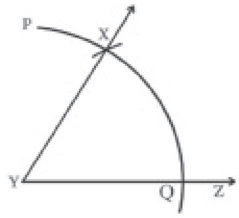


- ఇప్పుడు $\angle Y$ యొక్క శీర్షబిందువుపై వృత్తలేఖిని ముల్లును ఉంచండి. $\angle Y$ యొక్క రెండు $\overrightarrow{YX}, \overrightarrow{YZ}$ సన్నిహిత రేఖల P, Q బిందువుల వద్ద ఖండించునట్లు ఒక చాపం గీయండి.

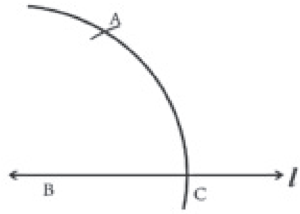
- వృత్త లేఖినిని మార్చకుండా అదే పరిమాణంలో దాని ముల్లును l శీర్షరేఖపై B బిందువు వద్ద ఉంచి ఒక చాపాన్ని గీయండి. అది l ను 'C'బిందువు వద్ద ఖండించును.



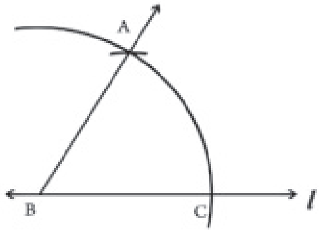
- వృత్తలేఖిని ముల్లు Q పైన పెన్సిల్ మున p పైన ఉండునట్లు పట్టు కొనుము.



- ఇప్పుడు వృత్తలేఖినిని మార్చకూండా దాని ముల్లును l రేఖపైగల 'C' బిందువు వద్ద ఉంచి ముందు గీసిన దానిపై మరొక చాపం గీయండి. వాటి ఖండన బిందువు 'A' అనుకొనుము.



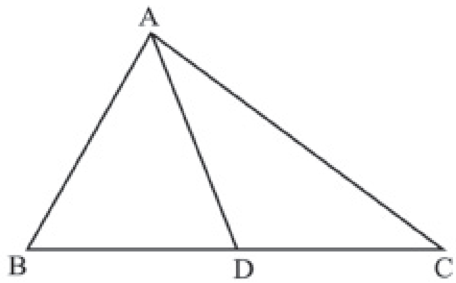
- ఇప్పుడు $\overrightarrow{BA}$ ను నిర్మించండి. $\angle ABC$ పరిమాణాంలో $\angle XYZ$ పరిమాణంలో సమానం అవుతుంది. $m\angle XYZ = m\angle ABC$



అభ్యాసం 12.1

1. స్కేలు వృత్త లేఖిని ఉపయోగించుకొని 60^0 పరిమాణంలో ఒక కోణం నిర్మించండి. దాన్ని సమద్విఖండన చేయండి.
2. వృత్త లేఖిని స్కేలును ఉపయోగించు కొని 90^0 కోణం నిర్మించండి. నిర్మాణ సోపానాలను రాయండి.
3. 8 సెం.మీ. పొడవు గల AB రేఖఖండాన్ని నిర్మించండి. దానిపై లంబసమద్విఖండన రేఖను నిర్మించండి. AB ను నాలుగు సమభాగాలు చేయగలమా ? ఎలా ?

12.2. త్రిభుజం యొక్క మధ్యమం (మధ్యగత రేఖ)



ప్రక్క పటం ను చూడండి. అది ΔABC దాని బుజం $\overline{BC}$ మధ్య బిందువును మీరు ఎలా గుర్తించగలుగుతారు. $\overline{BC}$ మధ్యబిందువును D అనుకొనము. $\overline{BC}$ కు ఎదురుగా ఉన్న శీర్షబిందువును అనుకోనుము A కు ఎదురుగా ఉన్న శీర్షబిందువు పటంలో రేఖాఖండం $\overline{AB}$ ను నిర్మించుము. $\overline{AD}, \Delta ABC$ యొక్క మధ్యగతరేఖ త్రిభుజంలో ఒక శీర్షబిందువు నుండి దానికి ఎదురుగా ఉన్న భాగంపై గల మధ్య బిందువులను కలుపుతూ గీసిన రేఖ ఖండాన్ని ఆ త్రిభుజం యొక్క మధ్యగతరేఖ అంటారు.

XYZ అనే త్రిభుజాన్ని నిర్మించుట. ఆ త్రిభుజంలోని ప్రతీ భుజం దానికి ఎదురుగా ఉన్న శీర్షబిందువు పేరును వ్రాయుము. ఆ త్రిభుజంలో ఎన్ని మధ్యగతరేఖలను నిర్మించగలం.

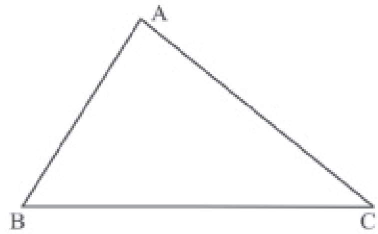
ప్రయత్నించండి -
ఒక త్రిభుజంలో ఎన్ని మధ్యగత రేఖలు కలవు.

12.2.1. స్కేలు, వృత్తలేఖిని ఉపయోగించుకొని త్రిభుజ మధ్యగత రేఖను నిర్మించము.

స్కేలు, వృత్తలేఖిని సహాయంతో మధ్యగతరేఖ ఎలా నిర్మించ వచ్చునో తెలుసుకుందాం.

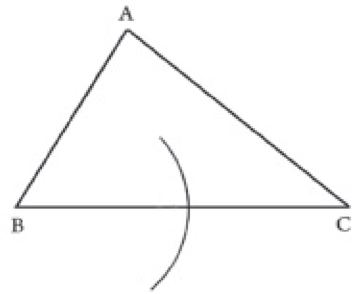
మొదటి సోపానం -

పటంలో చూపిన విధముగా త్రిభుజమును నిర్మిమంచండి. దానిని ABC అని పేరు పెరు పెట్టండి.



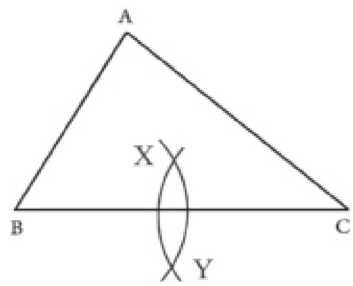
రెండవ సోపానం -

దాని $\overline{BC}$ భుజాన్ని సమద్విఖండన చేయుటకై B పై వృత్తలేఖిని ముల్లును ఉంచండి. $\overline{BC}$ పొడవులో సగానికి పైగా వ్యాసార్ధం తీసుకొని ఒక చోట చాపం గీయుము. అది $\overline{BC}$ భుజానికి రెండు ప్రక్కలకు వ్యాపించును.



మూడవ సోపానం -

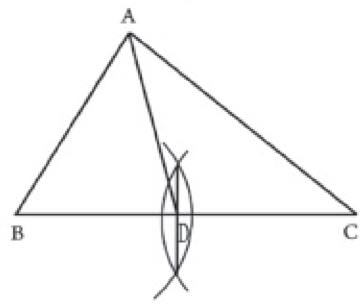
రెండవ సోపానంలో తీసుకున్న వృత్త లేఖిని పరిమాణంలో ముల్లు చేయకుండా వృత్త లేఖిని ముల్లును C పై ఉంచి మరొక చాపాన్ని గీయండి. అది మునుపటి చాపాన్ని X, Y బిందువుల వద్ద ఖండించును.



నాలగవ సోపానం

లను కలిపి రేఖను గీయండి $\overleftrightarrow{XY}$ యొక్క $\overline{BC}$ స మద్య ఖండన లంబం అగును. $\overleftrightarrow{XY}$ ను $\overline{BC}$ వద్ద ఖండించును.

పై నిర్మాణంలో ఈ D బిందువు $\overline{BC}$ యొక్క మధ్య బిందువు అగును. అప్పుడు $\overline{BC}$ వృత్తేఖ శీర్షబిందువు A తో D ను కలుపుము. ABC త్రిభుజం యొక్క మద్యగీతరేఖ అగును. ఇది $\overline{BC}$ యొక్క యొక్క సమద్విఖండన మద్యగలరేఖ అగును.



$\overline{AC}$ మధ్య బిందువును తీసుకొని E అని పేరు పెట్టి BE మధ్యగత రేఖను నిర్మించండి.

చెప్పి చూడండి.

ABC త్రిభుజంలో $\overline{BE}$ మినహా ఇతర మధ్యములు సంభవమగునా? ఎందుచేత ?

మీకు తెలుసా ?

త్రిభుజం యొక్క మూడు మధ్యగతరేఖలు ఒకే బిందువు గుండా పోవును ఆ బిందువును గురుత్వకేంద్రం అంటారు. కేంద్రభజం)

అభ్యాసం 12.2

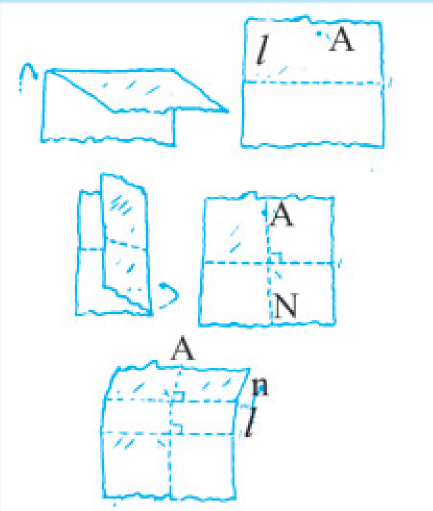
1. ఒక్కొక్క లంబకోణ, అధితకోణ, అల్పకోణ, త్రిభుజలను నిర్మించుము. ప్రతీ త్రిభుజ మూడు మధ్యగత రేఖలను నిర్మించండి.
2. ΔPQR ను తీసుకొనుము.
   క) దాని $\overline{PQ}$ యొక్క మధ్య బిందువు X ను తీసుకొని $\overline{RX}$ మధ్యగతాన్ని నిర్మించుము.
   ఖ) $\overline{QR}$ మధ్య బిందువు Y ను తీసుకొని $\overline{PY}$ మధ్య గీదన్ని నిర్మించుము.
   గ) ఇప్పుడు $\overline{RP}$ మధ్య బిందువును నిర్మయించి $\overline{QZ}$ మధ్య మధ్య నిర్మించగలదు.

12.3 దత్త సరళరేఖ సమాంతరరేఖ ను నిర్మించుట.

సమాంతల సరళరేఖలను గూర్చి మనం ఇది వరకు తెలుసుకున్నాం. ఇచ్చిన ఒక సరళరేఖకు సమాంతరంగా అనేక సరళరేఖలను న్గీంచవచ్చును. కాని సరళరేఖకు వెలుపల ఉన్న ఒక బిందువు నుండి సరళరేఖపై కేవలం ఒకే ఒక సమాంతర రేఖ నిర్మించుట సులభమగును. ఇప్పుడు కాగితాన్ని మడత పెట్టి ఒక సరళరేఖలో సమాంతరంగా మరొక సరళరేఖను నిర్మించండి.

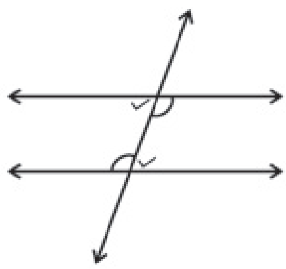
ప్రయత్నించండి :

- ఒక కాగితాన్ని తీసుకొనుము. దానికి మధ్యగా మడత పెట్టిము. మడత స్థానంలో ఏర్పడ్డ రేఖ ఖండం అగును.
- కాగితాన్ని తెరవండి రేఖ వెలుపల కాగితంపై బిందువును. గుర్తించండి.
- 'A' బిందువు మీదుగా కాగిదాన్ని మడత పెట్టండి. ఆ మడత l రేఖా ఖండానికి లంబంగా ఉండవలెను. ఆ లంబమును $\overline{AN}$ పేరు పెట్టుము.
- కాగితాన్ని తీసుకొని మమరొక మడత పెట్టుము. అది 'A' బిందువు మెదుగా $\overline{AN}$ లంబానికి ఒక లంబరేఖా ఖండాన్ని నిర్మించవలెను. దాని పేరు m అనుకొనుము. ఇప్పుడు $l \text{ u} m$ అగును.
- దినికి గల కరణాలగా అలోచించి వ్రాయుము.



ఏ ఏ సరతుల వలన రెండు శరళరేఖలు పరస్వరం సమాంతరాలగును ? దానిని గూర్చి మనం ఇది వరకే తెలుసుకున్నాం.

ఒండు సరళరేఖలను ఒక ఖండన రేఖ ఖండించినచో ఖండన బిందువు వద్ద ఏర్పడి ఏకాంతర కోణాలు పరస్వరం సమానం అయినచో ఆరెండు సరళరేఖలును సమాంతర రేఖలు అగును.



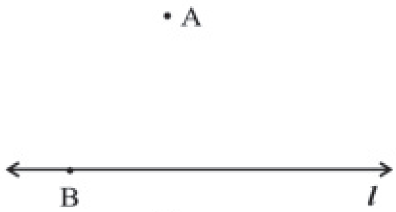
సమాంతరాలు అగుటకుగల ఇతర నియమాలను వ్రాయుము.

నియమాలగు ఉపయోగించుకొని స్కేలు, వృత్తలేఖిని సహాయంతో మనం ఒక సరళరేఖకు మరొక సమాంతర రేఖను నిర్మిద్దాం. కిందిసోపానలను ఉపయోగించి నిర్మాణం చేద్దాం.

ఉదాహరణ - 1

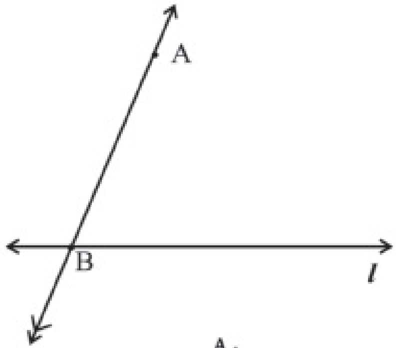
మొదటి సోపానం

ఒక సరళరేఖ 'l'ను గీయుము. దానికి వెలుపల 'A' అనే బిందువును గుర్తించుము.



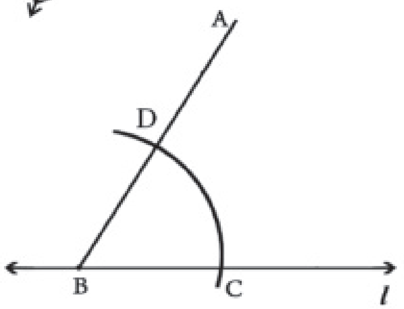
రెండవ సోపానం -

l పై B బిందువును తీసుకొని $\overleftrightarrow{AB}$ ను నిర్మించుము.



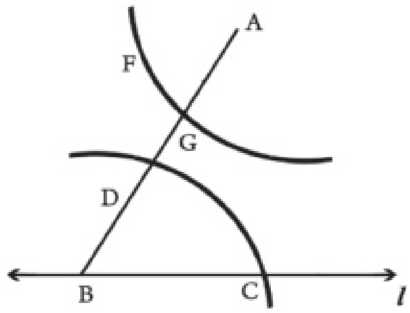
మూడవ సోపానం

B ను కేంద్రంగా చేసుకొని కొంత స్థానార్ధంతో ఒక చాపాన్ని గీయండి. ఆ చాపం 'l' ను C వద్ద $\overleftrightarrow{AB}$ ను D వద్ద ఖండించును.



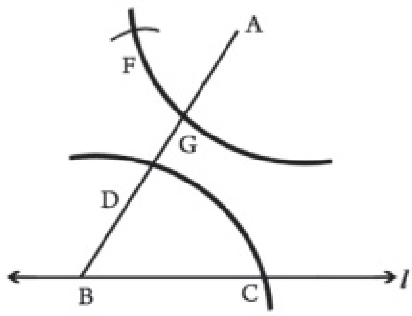
నాల్గవ సోపానం -

ఇప్పుడు A ను కేంద్రంగా తీసుకొని మూడవ కోపానంలో తీసుకున్న వ్యాసార్థాన్ని మార్చకుండా ఒక చాపాన్ని గీయండి. అవి $\overleftrightarrow{AB}$ ను G వద్ద ఖండించును.



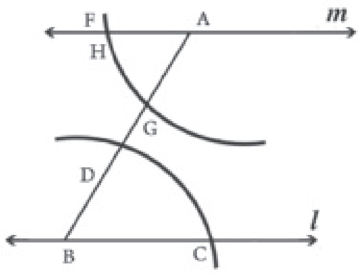
ఐదవ సోపానం -

G ను కేంద్రంగా చేసుకొని GDల మధ్య దూరాన్ని వ్యాసార్థంగా తీసుకొని ఒక చాపాన్ని గీయండి. అది నాల్గవ సోపానంలో తీసుకు గీసిన చాపాన్ని ఖండంచును. అ ఖండన బిందువును F అనుకొనుము.



ఆరవ సోపానం -

AF బిందువులను కలుపుము FA అగును. దానిని A దిశగా పొడిగించండి. అది ఖ సరళరేఖ అగును. $\overleftrightarrow{FA} \parallel l$



దీనికి గల కారణం వ్రాయుము.

పై ఉదాహరణలో $liim$ అయ్యును.

- ఖండన రేఖా ఖండం పేరు ఏమిటి ?
- ఇచ్చట ఎన్ని జతల ఏకాంతర కోణాలు గలవు ?
- ఎకాంతర కోణాల జతలను సూచించండి ?
- ఖండన రేఖకు ఒక ప్రక్కన గల అంతర కోణాల మొత్తములను కనుగొనండి. ఆ మొత్తం ఎంత ?

చూసి చెప్పండి.
(క) 'A' బిందువు తీసుకొని l సరళరేఖకు సమాంతరంగా మరో సరళరేఖ నిర్మించ గలమా? కారణం రాయండి.
(గ) ఉదాహరణ -1 లో మనం సమ పరిమాణంలో ఏకాంతర కోణాలు నిర్మించి సమాంతర సరళరేఖ పొందాము. నిర్మాణంలో కొంచెం మార్పు చేసి A బిందువు వద్ద సమాన పరిమాణంలో అనురూప కోణం నిర్మించి సమాంతర సరళరేఖ నిర్మించ గలమా? అయితే నిర్మించండి.

అభ్యాసం 12.3

1. $\overleftrightarrow{AB}$ ను నిర్మించుము. దాని బాహ్య బిందువు P ను తీసుకొనుము. P బిందువు మీదుగా $\overleftrightarrow{AB}$ కు సమాంతంగా $\overleftrightarrow{CD}$ ను నిర్మించుము. (నిర్మాణం కొరకు కేవలం స్కేలు, వృత్త లేఖిని యంత్రము (ఉపయోగించవలెను.
2. $\overleftrightarrow{PQ}$ ను నిర్మించుము. $\overleftrightarrow{PQ}$ నుండి 4 సెం.మీ. దురంలో $\overleftrightarrow{CD}$ ను నిర్మించుము. $\overleftrightarrow{PQ}$ $\overleftrightarrow{CD}$ గా ఉ ండవలెను. (సుచన $\overleftrightarrow{PQ}$ యొక్క ఏవైనా రెండు బిందువుల వద్ద $\overleftrightarrow{PQ}$ పై లంబాలను నిర్మించి $\overleftrightarrow{PQ}$ నుండి 4 సెం.మీ. దూరంలో రెండు బిందువును తీసుకొనవలెను.)
3. $'l'$ సరళరేఖను గీయుము. $'l'$ పై తీసివిధంగా P బిందువును గుర్తించుము. P బిందువు వేరుగా $'l'$ రేఖ సమాంతరంగా సరళరేఖను నిర్మించుము.
   - ఇప్పుడు $'l'$ పై Q బిందువును తీసుకొని $\overleftrightarrow{PQ}$ ను నిర్మించుము.
   - m సరళరేఖపై బిందువును తీసుకొని R బిందువు మీదుగా $\overleftrightarrow{PQ}$ తో సమాంతరంగా ఒక సరళరేఖను నిర్మించుము.
   - ఈ సరళరేఖ $'l'$ ను S బిందువు వద్ద ఖండించును.
   - ఈ రెండు జతల సమాంతర రేఖల ద్వారా ఏ విధమైన ఆకారం ఏర్పడినది.

12.4. త్రిభుజమును నిర్మించుట

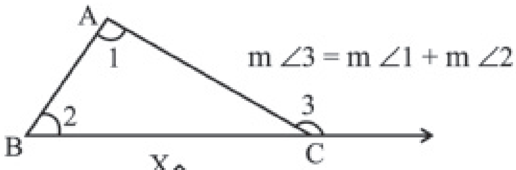
భుజల పొడవు, కోణాలు, పరిమాణంలను అనుసరించి భుజాల వర్ణకరణ చేయుబడిన విధంగా ఇదిరరేఖ మనం తెలుసుకున్నాం. భుజాలు పొడవులను అనుసరించి త్రిభుజాలు మూడు రకాలు అవి

చెప్పి చూడండి.
కోణాలను అనుసరించి త్రిభుజములు ఎన్నిరకములు

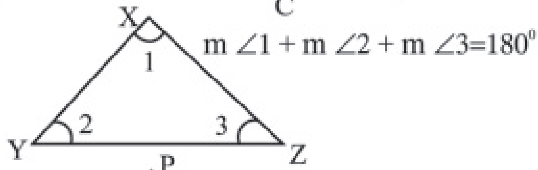
1. సమబాహు త్రిభుజ
2. సమద్విబాహు త్రిభుజ
3. విషమబాహు త్రిభుజం

వ అధ్యాయంలో త్రిభుజాల ధర్మాలను గూర్చి మనం తెలుసుకున్నాం. వాటిని మరొకసారి గుర్తు చేసుకుందాం.

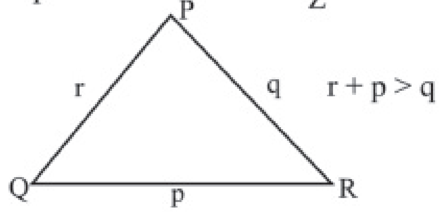
- త్రిభుజ బాహ్య కోణ పరిమాణం దాని అంతరభ మధ్య కోణాల మొత్తానికి సమానం.



- త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^0



- త్రిభుజంలోని ఏ రెండు భుజాల మొత్తం పొడవు మూడవ భుజం కంటె ఎక్కువ.



తొమ్మిద అధ్యాయంలో రెండు త్రిభుజల సర్వసమానతను గూర్చి తెలుసుకున్నాం. కింది నీయమలలో ఏ రెండు నియమములు కలిగియున్న ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానములగును.

క) ఒక త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాలు మరొక త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాలతో సమానం అయిన ఆ సర్వసమానములుగును.

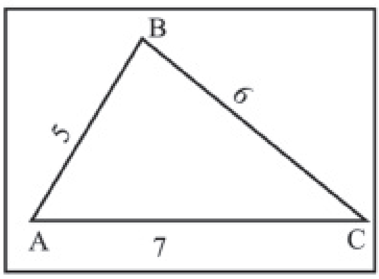
ఖ) ఒక త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజల పొడవులు వాటి మధ్య కోణం మరొక త్రిభుజం యొక్క అనురూప భాగాలలో సమానం అయిన అవి సర్వసమానము.

గ) ఒక త్రిభుజం యొక్క రెండు కోణాలు వాటి మధ్య భుజము.. మరొక త్రిభుజం యొక్క అనురూప భాగాలతో సమానం అయిన అవి సర్వసమానములు.

12.4.1. మూడు భుజాలు ఇచ్చిన త్రిభుజంను నిర్మించుట -

త్రిభుజంలోని మూడు భుజాల పొడవుల తెలిసినచో (రెండింటి మొత్తం మూడవదానికంటె ఎక్కువ) త్రిభుజమును నిర్మించవచ్చును. మొదట్టి త్రిభుజం చత్తు కటిం ను ముయుగా గీచి దానిలో ఇచ్చిన కోలతలను వ్రాసుకొనవలెను. ఈ చత్తు కంటం త్రిభుజం నిర్మాణంలో సహాయపడుతుంది.

ఉదాహరణ - 2



$AB = 5cm$, $BC = 6cm$, $CA = 7cm$

అయిన ΔABC నిర్మించుము.

మొదటి సోపానం -

$7cm$ పొడవుగల $\overline{AC}$ రేఖ ఖండాన్ని గీయుము.

రెండవ సోపానం -

ను కేంద్రంగాను 5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో (AB) ఒక చాపాన్ని గీయుము.

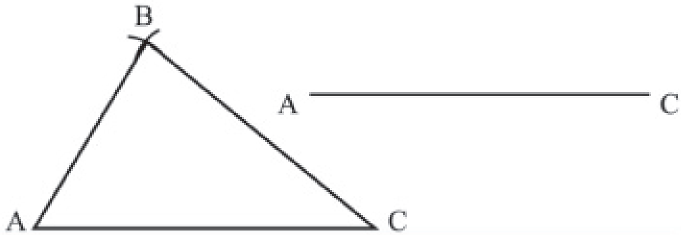
మూడవ సోపానం

’C’ ను కేంద్రంగా 6 సెం.మీ. BC వ్యాసార్ధంతో చాపాన్ని గీయండి. ఈ చాపం మొదటి చాపాన్ని ఖండించును. దానిని B అనుకొనుము.

నాల్గవ సోపానం

$\overline{AB}, \overline{BC}$ లను గీయుము.

ΔABC త్రిభుజం ఏర్పడినది.



ఒక ట్రేసింగ్ కాగితాన్ని తీసుకొని ΔPQR ను నిర్మించుము. అందులో $QR = 7$ సెం.మీ. $PQ = 5$సెం.మీ. $PR = 6$ సెం.మీ. ఉండవలెను. ΔPQR ను ΔABC పై ఉంచుము. ΔPQR యొక్క P బిందువు Q బిందువులు వరుసగా ΔABC యొక్క బిందువు A బిందువు పై ఉండవలెను. మీరు ఏమి పరిశీలించారు. ΔPQR, ΔABC లమధ్య ఏ విధమైన సంబంధం కలదు. కారణం వ్రాయుము.

అభ్యాసం 12.4

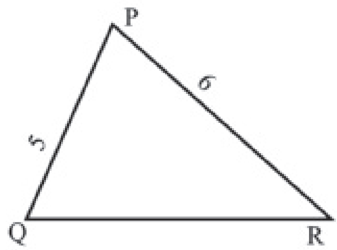
1. ΔXYZ ను నిర్మించుము. అందులో $XY = 4.8cm$, $YZ = 5.3cm$, $ZX = 5.6cm$ దాని శీర్షబిందువు నుండి కు లంబాన్ని గీయుము. దాని పొడవును కనుగొనుము.

2.క) ఒక సమబాహు త్రిభుజాన్ని నిర్మించుము. దాని భుజం పొడవు 5.5 సెం.మీ. ఉండవలెను. దాని ప్రతీకోణం పరిమాణం ఎంత ?

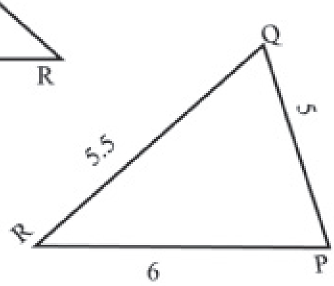
ఖ) 6 సెం.మీ. భుజం గల సమబాహు త్రిభుజంను నిర్మించుము. దాని ప్రతీకోణం పరిమాణం ఎంత కోలిచి వ్రాయుము.

3. ΔPQR లో $PQ = 5$ సెం.మీ. $QR = 5.5$ సెం.మీ. $RP = 6$ సెం.మీ.

క) ప్రక్క చిత్రం పటం ఆధారంగా PQR త్రిభుజమును నిర్మించుము.



ఖ) ప్రక్క చిత్రం పటం ఆధారంగా ΔPQR ను నిర్మించుము.



రెండు నిర్మాణలలో సమాన ఆకారంలో త్రిభుజాలు ఏర్పడతాయో ? కారణం వ్రాయుము.

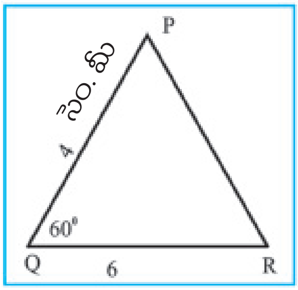
4. ఉమెస్ $BC = 5$ సెం.మీ. $CA = 3$ సెం.మీ. , $AB = 8.5$ సెం.మీ. తీసుకొని ΔABC ను నిర్మించుటకు ప్రయత్నించెను. మీరు ఈ కొలతలను తీసుకొని ΔABC ను నిర్మించేంటకు ప్రయత్నించుము. త్రిభుజ నిర్మాణం సంభవమా ? కారణాములలో జవాబు వ్రాయుము.

12.4.2 త్రిభుజంలో రెండు భుజలు వాటి మధ్య కోణం తెలిసినచో త్రిభుజంను నిర్మించుట (బుజం - కోణం - భుజం (భు-కో-భు)

ఒక త్రిభుజం యొక్క ఏవైనా రెండు భుజాలు వాటి మధ్య కోణం తెలిసినచో త్రిభుజాన్ని ఎలా నిర్మించవచ్చునో తెలుసుకుందాం.

ఉదాహరణ - 3 :

- ΔPQR త్రిభుజంలో $PQ = 4$ సెం.మీ., $QR = 6$సెం.మీ., $m\angle PQR = 60^0$ అయిన ΔPQR ను నిర్మించుము. ΔPQR ను నిర్మిద్దాం. మొదటి ఈ త్రిబుజం యొక్క చిత్తుపటంను గీయాలి. ప్రక్క పటంను చూడండి. క్రింది ప్రశ్నలకు సమాదానం
- వ్రాయుము.
- త్రిభుజంలో ఏ ఏ భుజాల పొడవులు ఇవ్వబడినవి.
  ఏ కోణం పరిమాణం ఇవ్వబడినది. అది ఆ రెండింటి భుజాల అంతర్గత కోణం అగును.
- మొదటి ఏ కోలతను తీసుకున్నచో నిర్మాణం సులభంగా ఉంటుంది.



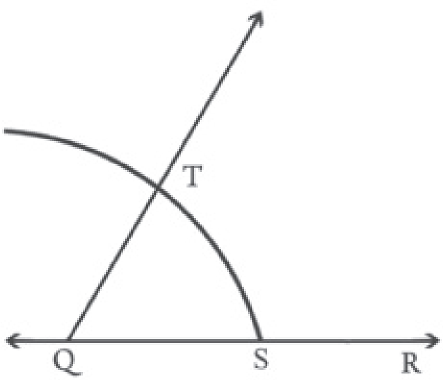
నిర్మాణ సోపానక్రమము -

$QR = 6$ సెం.మీ.రెఖను గీయుము.

రెండవ సోపానం మొదటి సోపానం :

$\overleftrightarrow{QR}$ యొక్క Q బిందువు 600 కోణం నిర్మించుము. దాని కొరకు వృత్తలేఖిని ముల్లును Q పైన ఉంచి కొంత వ్యాసార్ధలతో ఒక చాపాన్ని గీయండి. అది $\overleftrightarrow{QR}$ ను ఖండించును. ఆ ఖండన బిందువును అనుకొనుము. అదే వ్యాసార్ధంతో S ను కేంద్రంగా క్రీసుకొని మరొక చాపాన్ని గీయుము. అది మునుపట్టి చాపాన్ని ఖండిస్తుంది. ఆ ఖండన బిందువును T అనుకొనుము.

$\overrightarrow{QT}$ ను నిర్మించుము.



మూడవ సోపానం -

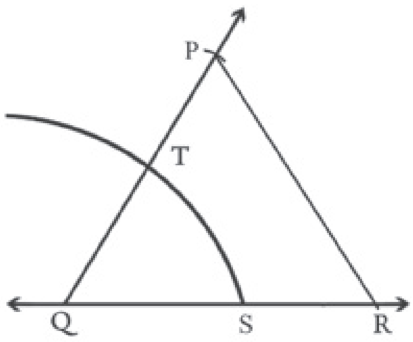
Q ను కేంద్రంగా 4 సెం.మీ. వ్యాసార్థంలో ఒక చాపాన్ని గీయుము. అది $\overrightarrow{QT}$ ను ఖండించును. ఆ ఖండన బిందువును గా గుర్తించుము.

నాల్గవ సోపానం -

$\overline{PR}$ ను కలుప వలెను.

ఐదవ సోపానం-

ΔPQR త్రిభుజము ఏర్పడును.




ప్రయత్నించుము. :

ఉదాహరణ - 3

ఒక త్రిభుజము యొక్క రెండు భుజాలు మరియు వాటి మధ్య కోణము ఇచ్చినపుడు త్రిభుజమును నిర్మించుట

పని - 1

ΔABC లో $AB = 4cm$, $AC = 5cm$, $m\angle C = 30^0$ అయిన త్రిభుజంలో నిర్మించగలమా? ప్రయత్నించుము?

ఆసమ భుజము $\overline{AC}$, $\angle C$ యొక్క ఒక చాపన్న భుజము శీర్షము B ప్రస్తుతం B బిందువును గుర్తించలేము కావున ఈ ప్రకరమైన విలువలతో త్రిభుజన్ని నిర్మించవలెను.

పని 2 - అదే విధంగా ΔABC లో $AB = 3cm$ ΔABC $AC = 5cm$, $m\angle B = 30^0$ త్రిభుజం నిర్మించుటకు ప్రయత్నించుము ఏమి తెలుసుకున్నారు ?

ABC త్రుభుజము నిర్మించగలిగామా? ఎందువలన ?

ఒక త్రిభుజమును నిర్మించుటకు రెండు భుజాలు మరియు వాటి మధ్య కోణము అవసరము గ్రహించుము.

అభ్యాసము 12.5

1. $DE = 5cm$, $DF = 3cm$, $m\angle EDF = 90^0$ అయిన ΔDEF ను నిర్మించుము ఈ త్రిభుజము యొక్క మిగిలిన భుజము మరియు మిగిలినరెండు కోణాల తోలతలను కనుగొనుము.

   పై విధంగా ఒక ట్రెస్ కాగితంను తీసుకొని ΔXYZ ను నిర్మించుము. వాటికొలతలు $XY = 5cm$, $XZ = 3cm$, $m\angle YXZ = 90^0$, ΔXYZ త్రిభుజంపైన ΔXYZ XY లు ఉండునట్లు ఉంచుము ? ఏమి గమనించారు ?

   ΔDEF, ΔXYZ ల మధ్య సంబంధం ఏమి ?

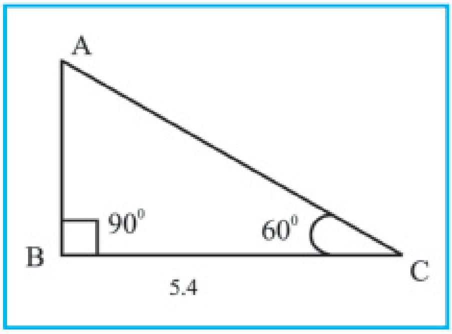
కారణం ప్రాయుము.

2. $BC = 7.5cm, AC = 5cm., m\angle S = 60^0$ అయిన ΔABC ను నిర్మించుము.

12.4.3. భుజముల మరియు దాని అసన్ని కోణములు ఇచ్చిన త్రిభుజమును నిర్మించుట (కో-భు-కో)

ఉదాహరణ 4

$BC = 5.4cm, m\angle ABC = 90^0$ మరియు $m\angle BCA = 60^0$ అయిన ΔABCను నిర్మించుము.



శోధన

త్రిభుజమును నిర్మించుటకు ముందు దాని చిత్తు పటంను నిర్మించాలు.

- త్రిభుజమును నిర్మించుటకు ఎన్ని కొలతలు ఇచ్చెను ?
- ఏ భుజము యొక్క కొలత ఇవ్వబడినది ?
- ఏ ఏ కోణాముల కోలతలు ఇవ్వబడినవి ?
- ఇచ్చిన కోణములు ఇచ్చిన బుజమును అసన్ని కోణంలు అగునా ?

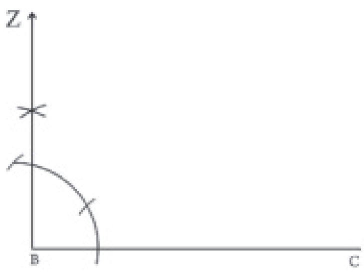
నిర్మాణ క్రమము -

మొదటి సోపానం

BC = 5.4 రేఖా ఖండాన్ని నిర్మించుము.

రెండవ సోపానం -

$\overline{BC}$ రేఖ ఖండములో B నుండి 90^0 కోణంతో ఒక $\overrightarrow{BZ}$ కిరణాన్ని నిర్మించుట



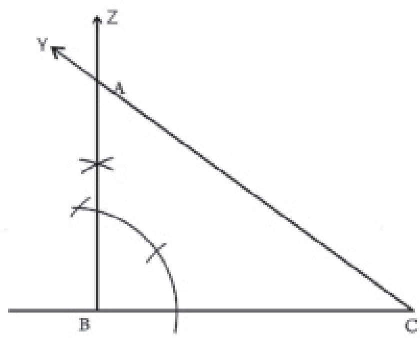
మూడవ సోపానం

$\overline{BC}$ రేఖా ఖండంపై C బిందువు వద్ద 60^0 కోణం చేయుట ఒక కిరణమును నిర్మించుము దీనిని $\overrightarrow{CY}$ చే సుచించుము.

$\overrightarrow{CY}$, $\overrightarrow{BZ}$ కిరణమును ఖండించును.

ఈ ఖండన బిందువున గా గుర్తించుము.

ΔABC త్రిభుజము ఏర్పడినది.



చెప్పి చూడండి

మొదటి ఒక రేఖా ఖండాన్ని నిర్మించుము దానిపై B ను ఎడమ పై C ను కుడిపై నామకరణం చేస్తు BC రేఖాఖండన్ని నిర్మించి ఇచ్చిన కొలతలను తీసుకొని త్రిభుజాన్ని నిర్మించగలమా ?

ఉదాహరణ 4 లో ఒక భుజము మరియు దాని ఆసన్న కోణాలు ఇవబడినవి. ఒకవేళ మనకు $PR = 6cm, m\angle P = 60^0, m\angle Q = 45^0$ ఉండునట్లు కొలతలు కలిగిన ΔPQR ను నిర్మించగలమా ? ఏ విధంగా నిర్మించగలము.

అభ్యాసము 12.6

1. $EF = 7.2cm, m\angle E = 90^0$, నుపయోగించి ΔEFG ను నిర్మించుము ?

   మీ జవాబుకు సకరణములను వ్రాయుము.

2. $m\angle X = 60^0, m\angle Y = 30^0, xy = 6.2cm$ నుపయోగించి ΔXYZ ను నిర్మించుము?

3. $LM = 5.4cm, m\angle L = 45^0, m\angle M = 90^0$, ΔKLM ను నిర్మించుము.

   క) ఈ త్రిభుజము యొక్క మిగిలిన రెండు భుజాల కొలతను కనుగొనుము

   ఖ) ఈ త్రిభుజము లో $\angle N$ యొక్క కొలత ఎంత ?

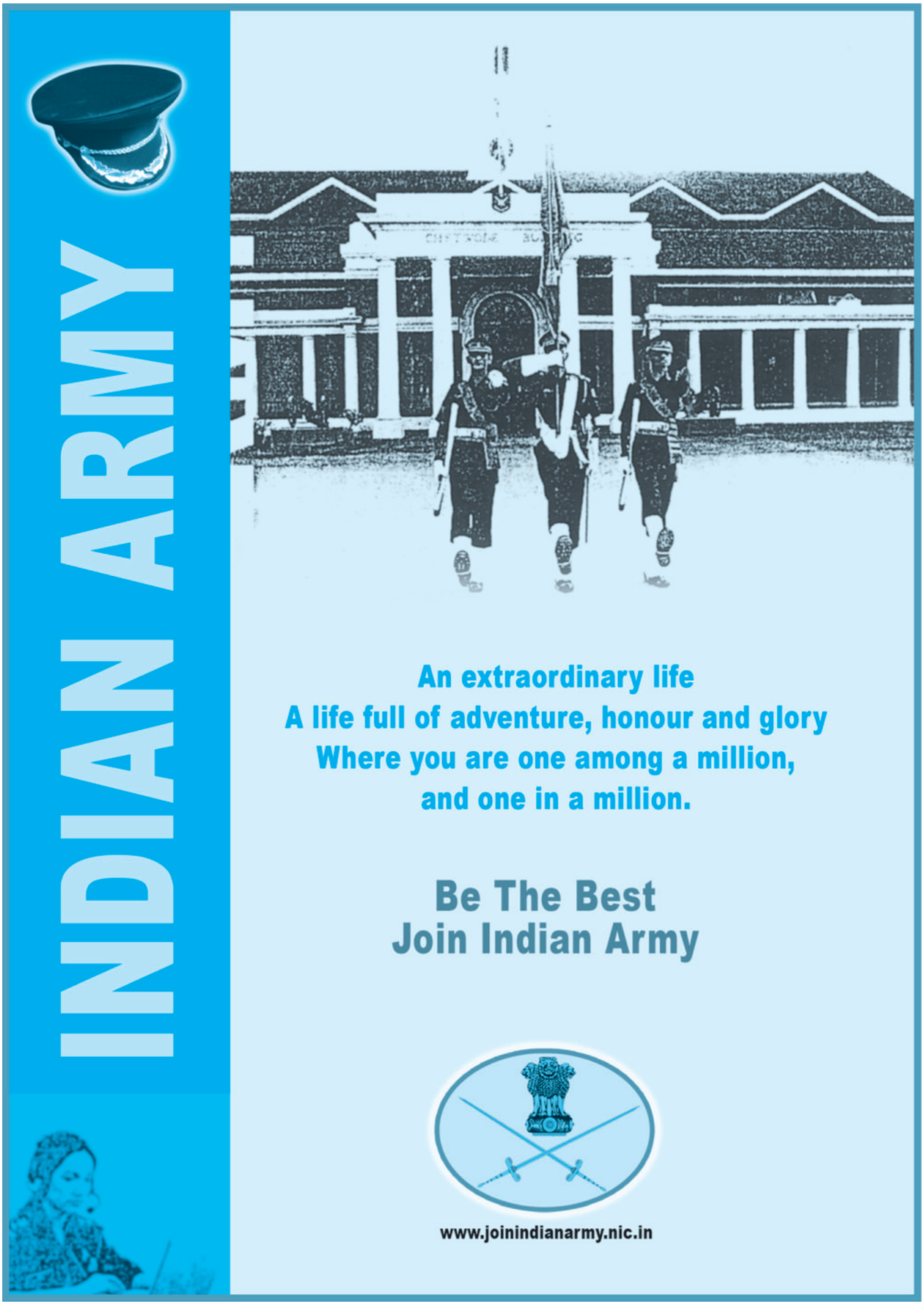
   గ) భుజల కొలతలను సరించి ఏటిధమైనటంవంటి త్రిభుజము ?

   ΔPQR ను ΔLMN పై నుంచుము. ΔPQR లో P, Q బిందువులు ΔLMN యొక్క L, M లతో ఏకిభవించునట్లు ఉంచుము.

   ΔPQR మరియు ΔLMN ఏ విధమైన సంబంధాన్ని కలిగియున్నవి? కరణము వ్రాయుము.

4. $BC = 5.3cm, m\angle B = 45^0, m\angle A = 75^0$ అయిన ΔABC

   ను నిర్మించుము మరియు త్రిభుజ నిర్మాణ క్రమమును వ్రాయుము.


INDIAN ARMY
An extraordinary life
A life full of adventure, honour and glory
Where you are one among a million,
and one in a million.
Be The Best
Join Indian Army
www.joinindianarmy.nic.in