সরল গণিত

(বীজগণিত)

অষ্টম শ্রেণি

শিক্ষক শিক্ষানির্দ্দেশালয় এবং
রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পরিষদ
ওড়িশা, ভুবনেশ্বর

ওড়িশা প্রাথমিক শিক্ষা কার্যক্রম
প্রাধিকরণ, ভুবনেশ্বর

সরল গণিত (বীজগণিত)

অষ্টম শ্রেণি

লেখক মণ্ডলী ঃ

ড. প্রসন্ন কুমার শতপথি (সমীক্ষক)
ড. রজনী বল্লভ দাশ
শ্রী. নগেন্দ্র কুমার মিশ্র
শ্রীমতী কুমুদিনী জী
শ্রী কৈলাস চন্দ্র স্বাইঁ

সংযোজনা ঃ

ড. নলিনীকান্ত মিশ্র
ড. তিলোত্তমা সেনাপতি
ড. সবিতা সাহু

সংশোধন ঃ

শ্রী মদন মোহন মহান্তি
শ্রী নারায়ণ সাহু
শ্রী মানস মিশ্র
শ্রী কার্ত্তিক চন্দ্র বেহেরা

অনুবাদক মণ্ডলী :

প্রফেসর দীপাস্য কুণ্ডু (সমীক্ষক)
শ্রীমতী সুচিত্রা দাস (অনুবাদক)
শ্রীমতী মধুমিতা ব্যানার্জ্জী

সংযোজীকা ঃ

ড. সবিতা সাহু

প্রকাশক ঃ

বিদ্যালয় ও গণশিক্ষা বিভাগ, ওড়িশা সরকার

মুদ্রণ বছর ঃ ২০২২

মুদ্রণ ঃ পাঠ্যপুস্তক উৎপাদন ও বিক্রয়, ভুবনেশ্বর

প্রস্তুতি ঃ মাধ্যমিক শিক্ষা পরিষদ, ওড়িশা কটক ও শিক্ষক শিক্ষা নির্দ্দেশালয় এবং
রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পরিষদ,
ওড়িশা, ভুবনেশ্বর

এই পুস্তক সম্বন্ধে কিছু কথা

আজকের যুগ হচ্ছে বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিদ্যার যুগ। তাত্ত্বিক ও প্রয়োগমূক-এ উভয় দিকে বিজ্ঞানের অগ্রগতি লিখনে, গণিত শাস্ত্রের এক বলিষ্ঠ ভূমিকা আছে। গণিত শাস্ত্রের বীজগণিত হচ্ছে একটি গুরুত্বপূর্ণ অঙ্গ। বিদ্যালয় স্তরে বীজগণিত পাঠ্যক্রম একটি উপযুক্ত ভিত্তিভূমির উপরে প্রতিষ্ঠিত হওয়া বাঞ্ছনীয়।

সারা বিশ্বের অন্যান্য বিকাশশীল দেশদের মতো ভারত মধ্য এক্ষেত্রে উল্লেখনীয় ভূমিকা গ্রহণ করেছে। মাধ্যমিক শিক্ষাস্তরের জন্য জাতীয় স্তরে প্রস্তুত National Curriculam Frame Work-2005 -এ গণিত শিক্ষাকে অধিক গুরুত্ব দেওয়া গিয়েছে। তদনুযায়ী জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও তালিম পরিষদ (NCERT), পাঠ্যখসড়া ও পাঠ্যপুস্তক প্রণয়ন করেছেন। জাতীয় শিক্ষাস্রোতকে দৃষ্টি দিয়ে ওড়িশা মাধ্যমিক শিক্ষা। পরিষদ, শিক্ষক, শিক্ষা নির্দেশালয় এবং রাজ্য শিক্ষা গবেষণা প্রতিষ্ঠান ও প্রশিক্ষণ পরিষদ দ্বারা প্রস্তুত রাজ্য পাঠ্যক্রম আধারের অষ্টম শ্রেণীর জন্য সিলেবাস প্রস্তুত করেছিল ও তদনুযায়ী নূতনভাবে সরল গণিত (বীজগণিত) পাঠ্যপুস্তক প্রকাশ করেছেন। অভিজ্ঞ লেখকদের দ্বারা পাঠ্যপুস্তক রচনা করা গিয়ে পুস্তকের পাণ্ডুলিপিকে রাজ্যস্তরীয় একটি কর্মশালাতে কার্যরত গণিত শিক্ষক শিক্ষয়িত্রী দ্বারা পুঙ্খানুপুঙ্খ আলোচনা করা গেছে। পরবর্তী সময়ে সিলেবাস কমিটির মধ্য পাণ্ডুলিপিটি পঠিত ও আলোচিত হয়েছে। আলোচনালব্ধ পরামর্শকে পাথেয় করে পাণ্ডুলিপিটি সংশোধিত হয়েছে।

শিক্ষক শিক্ষা নির্দেশালয় এবং রাজ্য শিক্ষা গবেষণা প্রতিষ্ঠান ও প্রশিক্ষণ। এই পুস্তকটির আবশ্যকীয় সংশোধনের জন্য গণিত বিশারদ ও কার্যরত গণিত শিক্ষক ও শিক্ষয়িত্রীদের দ্বারা ২০১৪ সালে প্রয়াস করা হলেও এটা হয়ে ছিল না। ২০১৭ সালে এই পুস্তকের সংশোধন কার্য করা গেছে। তারপরেও তথ্যগত ত্রুটি যদি থেকে যায়, কর্তৃপক্ষকে জানাবেন।

সূচিপত্র

সেট্ (SET)

অধ্যায় ১

1.1 উপক্রমনিকা Introduction

বিখ্যাত জার্মান গণিতজ্ঞ জর্জ ক্যান্টর (1845-1918) হচ্ছেন সেট্ তত্ত্বের প্রবর্তক। সেট্ তত্ত্ব গণিতকে সরল ও সুন্দর করতে মুখ্য ভূমিকা গ্রহণ করেছে। এর মাধ্যমে জটিল গাণিতিক তত্ত্বকে সাবলীল ঢঙে বিশ্লেষণ করতে পারছি। সেট্ তত্ত্ব গণিতশাস্ত্রের মূল অংশকে সুদৃঢ় করার সাথে গণিতের বিভিন্ন বিভাগগুলির মধ্যে সম্বন্ধকে দৃঢ়ীভূত করেছে।

1.2 সেট্ ও এর উপাদান ঃ

আমরা অনেক সময়ে কথা প্রসঙ্গে চাবিগোছা, ছাত্রদল, গোরুরদল, ক্রিকেট টিম ইত্যাদি বলে থাকি। এখানে গোছা, দল, পুঞ্জ, টিম ইত্যাদি এক একটি গোষ্ঠী বা সমাহারে সেরকম বাসনসেট, সোফাসেট বললে আমরা যথাক্রমে বাসনের সমষ্টি ও সোফার সমষ্টিকে বুঝে থাকি। তাই যে কোনো নির্দিষ্ট বস্তুদের নিয়ে একটি সেট্ পরিকল্পনা করে থাকি। উদাহরণস্বরূপ—

(i) উড়িষ্যার জেলা সমূহ
(ii) ইংরাজী ভাষার বর্ণমালা
(iii) সপ্তাহের দিনগুলি
(iv) বাঘ, ভল্লুক, সিংহদের দল
(v) আপেল, আঙুর, কমলা, নারকেল ফল
(vi) আলু, বেগুন, কুমড়ো, কফি সবজি সমষ্টি
(vii) গণন সংখ্যা সমষ্টি
(viii) যুগ্ম সংখ্যা 2, 4, 6, 8 সমষ্টি

এই সমষ্টিকে নিয়ে এক একটি সেটের পরিকল্পনা করতে পারব। যে বস্তুগুলিকে নিয়ে সেট্টি গঠিত। সেগুলিকে এক একটি উপাদান বলা যায়। ওড়িশার জিল্লা সমষ্টি পুরী, কটক, বালেশ্বর, সম্বলপুর, ফুলবাণী ইত্যাদি এক একটি উপাদান। সেরকম গণন সংখ্যা সেট্র 1, 2, 3.....আদি এক একটি উপাদান।

তোমার জন্য কাজ ঃ

(i) ইংরাজী ভাষার বর্ণমালাতে থাকা উপাদানগুলি লেখো।

(ii) এক অঙ্ক বিশিষ্ট অযুগ্ম গণন সংখ্যাসেট্র উপাদানগুলি লেখো।

সেট্ গঠন করার সময়ে আমাদের লক্ষ্য রাখতে হবে যে কোনো প্রদত্ত বস্তু উক্ত সেটের উপাদান কি না, তা নির্দিষ্টভাবে স্থিরীকৃত করতে পারা আবশ্যক।

উদাহরণস্বরূপ 'সুন্দর ফুল'দের নিয়ে একটি সেট গঠন করা সম্ভব নয়। কারণ সৌন্দর্যর এমন কিছু মাপকাঠি নেই যার দ্বারা আমরা কোন ফুলটি সুন্দর ও কোন ফুলটি সুন্দর নয় তা নিশ্চিতভাবে বলতে পারব। সেরকম বৃহৎ গণন সংখ্যাদের নিয়ে একটি সেট্ গঠন সম্ভব নয়। কারণ কোনো কোনো সংখ্যা বৃহৎ তার নির্দিষ্ট উপায় বলা যাবে না। সুতরাং নির্দিষ্টভাবে স্থির হয়ে না থাকা উপাদানগুলি নিয়ে সেট্গঠন অসম্ভব।

দ্রষ্টব্য- মনে রেখো যে সেট্ ও এর উপাদানের কোনো সত্তা নেই। এই দুটি পদ সত্তাবিহীন।

তোমার জন্য কাজ ঃ

(i) পাঁচটি বিভিন্ন সেটের উদাহরণ দিয়ে তাদের উপাদানগুলি লেখো।

(ii) দুটি উদাহরণ দাও যাকে নিয়ে সেট্ গঠন সম্ভব না।

1.3 সসীম ও অসীম সেট্ ঃ (Finite and Infinite Sets)

যদি কোনো সেটের উপাদানগুলি একটি একটি করে গুনলে গণন প্রক্রিয়ার পরিসমাপ্তি ঘটবে। তবে উক্ত সেট্টি একটি সসীম সেট্ অন্যথা উক্ত সেট্কে অসীম সেট্ বলা যায়।

উদাহরণস্বরূপ ইংরাজি ভাষার বর্ণমালার সেট্ এক অঙ্ক বিশিষ্ট গণনসংখ্যাদের সেট্ প্রত্যেকটি এক একটি সসীম সেট কিন্তু সমস্ত গণন সংখ্যা সেট্ একটি অসীম সেট্।

তোমার জন্য কাজ ঃ দুটি সসীম সেট ও দুটি অসীম সেটের উদাহরণ দাও।

1.4 সেট্র লিখন ঃ (Presentation of Sets)

সাধারণত সেট্ ইংরাজী বর্ণমালার বড় অক্ষর A, B, C, D... ইত্যাদি দ্বারা নামকরণ করা যায় ও সেটের উপাদানগুলিকে ছোট অক্ষর a, b, c, d.... দ্বারা সূচিত করা যায়। যদি সেট্ A-র একটি উপাদান a-হয়ে থাকে। তবে আমরা লিখব **$a \notin A$ এবং একে a belongs to A বা a is an element of A** বলা যায়। b, A-র একটি উপাদান হয়ে না থাকলে $b \notin A$ লেখা যায়। একে **b, A-র উপাদান না (b does not belong to A or b is not element of A)** বলে পড়বে।

সেট্ লেখার জন্য দুপ্রকার পদ্ধতি অবলম্বন করা যায়।

(a) তালিকা পদ্ধতি বা সারণী পদ্ধতি

(b) সূত্র পদ্ধতি বা সেট্ গঠনকারী পদ্ধতি।

(a) তালিকা পদ্ধতি ঃ এক জোড়া দ্বিতীয় বন্ধনী {} মধ্যে যে উপাদানগুলি নিয়ে যে সেটটি গঠিত তাদেরকে একটির পরে একটি রাখা যাবে ও প্রতি উপাদান পরে কমা (,) দেওয়া যাবে। উদাহরণস্বরূপ যদি A সেট সপ্তাহের বারদের নিয়ে গঠিত, তবে তালিকা পদ্ধতিতে নিম্ন মতে লেখা যাবে।

A={ সোমবার, মঙ্গলবার, বুধবার, গুরুবার, শুক্রবার, শনিবার, রবিবার} যদি B সেটটি এক অঙ্ক বিশিষ্ট গণনবর্গ সংখ্যাদের সেট হয় তবে তালিকা পদ্ধতিতে লিখব,

B={1, 4, 9}

লক্ষ করো যে A ও B উভয় সেট সসীম সেট।

কিন্তু আমরা যদি একটি অসীম সেটের তালিকা পদ্ধতিতে লিখি তবে প্রথমে এর উপাদানগুলি অনুক্রমকে লক্ষ্য করে অতি কমে তিনটি উপাদান লিখে অবশিষ্ট উপাদানগুলির জন্য কিছু বিন্দু দিয়ে দেব। উদাহরণস্বরূপ গণন সংখ্যাদের সেট N={1, 2, 3...}

এবং পূর্বে সংখ্যাদের সেট Z={0 ± 1, ± 2...} অর্থাৎ Z={-2, -1, 0, 1, 2}

মনে রাখো: (i) কোনো সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে লেখার সময় উপাদানগুলি যে কোনোক্রমে লিখলেও সেটটি অপরিবর্তিত থাকবে। যথা:

{a, b, c}={b, a, c}={c, a, b}={a, c, b}

(ii) সেট উপাদানগুলি লেখার সময় যদি কোনো উপাদান একাধিকবার লেখা যায় তবে সেই উপাদানগুলি সেটে একবার মাত্র লেখা যাবে। যথা:

{1, 2, 3, 3, 2}={1, 2, 3}

(b) সূত্র পদ্ধতি:

কয়েকটি সেট আছে, যাদের তালিকা পদ্ধতি লেখা অসম্ভব। উদাহরণস্বরূপ সমস্ত ভারতীয়দের সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে লেখা হবে না। এরকম অনেক উদাহরণ পাব। মাত্র এ সমস্ত সূত্র পদ্ধতির লেখা প্রকাশ করা সহজ। এই পদ্ধতি যদি সমস্ত ভারতীয়দের সেট S রূপে সূচিত, তবে সূত্র পদ্ধতিতে লিখব।

S={x 1x, একজন ভারতীয়}

কিংবা S={x : x একজন ভারতীয়}

এখানে '1' কিংবা ':'-কে **যেমন (Such that)** বলে পড়া যায় ও বন্ধনী অন্তর্গত উক্তিকে সমস্ত x-দের সেট যেমন X একজন ভারতীয় বলা যায়। মনে রাখো যেমন পড়ে থাকা উক্তিটি x-র একটি ধর্ম আছে। এখানে S-এর উপাদানগুলি হল সেই সমস্ত ব্যক্তি যারা ভারতীয় আছে।

এই পদ্ধতি সমস্ত গণনসংখ্যা ও সমস্ত পূর্ণ সংখ্যার সেট N ও Z-কে সূত্র পদ্ধতিতে প্রকাশ করতে পারব।

N={x 1x একটি গণন সংখ্যা}

Z={x 1x একটি পূর্ণ সংখ্যা}

পুনশ্চ তালিকা পদ্ধতির সেট P={2, 4, 6, 8...} হলে, সূত্র পদ্ধতির সেট P={x 1x=2^n1 n∈N লেখা যাবে। কারণ সেট P-র প্রত্যেক উপাদান ধনাত্মক যুগ্ম সংখ্যা।

অপরপক্ষে যদি একটি সেট B={x 1x=2n, n∈N, n≤5}-কে সূত্র পদ্ধতিতে লেখা গিয়ে থাকে তবে উক্ত সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে B={2, 4, 6, 8, 10} ভাবে লেখা যাবে।

তোমার জন্য কাজ ঃ

(i) তালিকা পদ্ধতিতে লিখতে পারব কি? (a) N সেট (b) Z সেট।

(ii) N, Z এর Q সেটগুলি সসীম না অসীম সেট?

(iii) উপরোক্ত সেটদের মধ্যে এমন এক সেটকে বাছ, যার উভয় পদ্ধতিতে লিখতে পারা যাবে।

উদাহরণ-1 তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশিত নিম্নলিখিত সেটগুলিকে সূত্র পদ্ধতিতে লেখো।

(i) $S=\{-1, 1\}$(ii) $P=\{3, 6, 9, 12, 15\}$ এবং (iii) $T=\{-1, -2, -3, -4\}$

সমাধান: (i) $S=\{x \ 1x^2=1\}$ (ii) $P=\{x \ 1x=3n, n\in N, n\leq 5\}$ (iii) $T=\{-x \ 1x\in N\}$

উদাহরণ-2 সূত্র পদ্ধতিতে দেওয়া নিম্নলিখিত সেটগুলি তালিকা পদ্ধতিতে লেখো:

(i) $A=\{x \ 1x\in N, 5\leq x \ \leq 0\}$ (ii) $B=\{x \ 1x=2n, n\in N. \ x\leq 5\}$

এবং (iii) $C=\{x \ 1x=3^n, n\in \ N\}$

সমাধান:

(i) এখানে A-র উপাদানগুলি 5 ও 10 এদের মধ্যবর্তী সমস্ত গণন সংখ্যা। সুতরাং

$$A=\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

(ii) এখানে B সেটের প্রত্যেক উপাদান একটি যুগ্ম গণন সংখ্যা যার 5 থেকে ছোট।

$$B=\{2, 4\}$$

(iii) এখানে প্রত্যেক উপাদান 3n, $n\in N$/ $\therefore$ উপাদানগুলি 3, 9, 27, 81... ইত্যাদি।

$\therefore$ $C=\{3, 9, 27, 81...\}$ সেটটি একটি অসীম সেট।

উদাহরণ- 3 নিম্নলিখিত সেটগুলির মধ্যে সসীম সেটগুলি বেছে নাও।

(i) $A=\{x \ 1x^2=1\}$ (ii) $B=\{-x \ 1x \ x\in N\}$

(iii) $C=\{x \ 1x= 2^n, n\in N\}$ (iv) $D= \{x \ 1x\in Z, -5 < x < 5\}$

সমাধান: তালিকা পদ্ধতি লিখলে।

(i) $A=\{1,-1\}$ (ii) $B=\{-1, -2, -3...\}$

(iii) $C=\{2, 4, 8, 16...\}$ (iv) $D=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

মধ্যে A ও D সসীম সেট।

1.5 শূন্য সেট

পরিমেয় সংখ্যাদের মধ্যে শূন্য '0' যেরকম গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা গ্রহণ করে থাকে, ঠিক সেরকম সেটদের মধ্যে শূন্য সেটের ভূমিকা মধ্য গুরুত্বপূর্ণ।

সংজ্ঞা: যে সেটে কোনো উপাদান না থাকে সেই সেটকে শূন্য সেট বলে। শূন্য সেটকে $\varnothing$ সংকেত দ্বারা সূচনা করা যায়। $\varnothing$-র একটি বিকল্প রূপ { }।

উদাহরণস্বরূপ (i) $A=\{x \ 1x \neq x\}=\varnothing$ অর্থাৎ A সেটের প্রত্যেক উপাদান নিজের সাথে সমান না। তাই এটা একটা শূন্য সেট। কারণ এ রকম কোনো বস্তু নেই যে কি নিজের সহিত সমান না।

(ii) $B=\{x1 \ x\in N \ 1<x < 2\}=\varnothing$

B সেটের উপাদান (i) ও (ii) মধ্যে থাকা একটি গণন সংখ্যা কিন্তু 1 ও 2 মধ্যে কোনো কিছু না থাকার জন্যে B একটি শূন্য সেট।

1.6 উপসেট (Subset) :

A ও B সেট দ্বয় মধ্যে যদি A সেট প্রত্যেক উপাদান B সেটের উপাদান হয়ে থাকে তবে সেট A-কে B-র একটি উপসেট বলা যায় (A is subset of B)। সংকেতে একে $A \subset B$ লেখা যায়।

উদাহরণস্বরূপ মনে কর A={1, 2, 3} B={0, 1, 2, 3, 4} তবে $A \subset B$ কারণ A সেটের প্রত্যেক উপাদান B সেটের আছে।

AB-র একটি উপসেট থাকলে, B-কে A-র অধিসেট বলা যায়, সংকেতে একে $B \supset A$ লেখা যায়।

মনে রাখো— (i) প্রত্যেক সেট্ নিজের উপসেট অর্থাৎ

যদি A একটি সেট্ তবে A<A1 সেরকম ∅=∅।

কারণ A সেটে প্রত্যেক উপাদান সেই সেট A-র মধ্যে একটি উপাদান।

(ii) শূন্য সেটে কোনো উপাদান না থাকার জন্য সেটা যে কোনো সেটের একটি উপসেট অর্থাৎ যদি S একটি সেট তবে ∅ <S।

তোমার জন্য কাজ

(i) দুটি সেটের উদাহরণ দাও। (আলোচিত উদাহরণ ছাড়া)

1.7 সেট প্রক্রিয়া (Set Operations) :

পরিমেয় সংখ্যা ক্ষেত্রে যোগ, বিয়োগ, গুণ যেমন একটি প্রক্রিয়া ঠিক সেরকম সেটদের মধ্যে সংযোগ, ছেদ ও অন্যর মধ্য এক একটি প্রক্রিয়া। আমরা এখানে সেট সম্বন্ধীয় প্রক্রিয়াগুলি বিষয়ে আলোচনা করব।

(a) সংযোগ (Union) :

A ও B সেটদ্বয়ে থাকা সমস্ত উপাদানকে নিয়ে গঠিত সেটকে A ও B-র সংযোগ বলা যায়। এবং এটি $A \cup B$ সংকেত দ্বারা সূচিত হয়। $A \cup B$ মধ্য একটি সেট।

সূত্র প্রণালীতে লিখব: $A \cup B = \{x1\ X \in A$ বা $X \in B\}$

এখানে $X \in A$ বা $X \in B$-র অর্থ হচ্ছে X উপাদানটি A কিংবা B কিংবা উভয় A ও B-র উপাদান। উদাহরণস্বরূপ:

যদি A={1, 3, 5}, B={2, 4, 6} তবে $A \cup B$={1, 2, 3, 4, 5, 6}

পুনশ্চ S={a, b, c}, T={b, c} তবে $S \cup T$={a, b, c}

(b) ছেদ (Intersection) :

A ও B সেট দ্বয়ে থাকা উপাদানগুলির মধ্যে যে উপাদানগুলি উভয় A ও B সেটের উপাদান হয়ে থাকবে, তাদেরকে নিয়ে গঠিত সেটকে A ও B-র ছেদ বলা যায়। এবং এটি $A \cap B$ সংকেত দ্বারা সূচিত করা যায়।

সূত্র প্রণালীতে $A \cap B = \{x\ 1x \in A$ এবং $X \in B$

$x \in A$ এবং $X \in B$ র অর্থ হচ্ছে A ও B উভয় সেটর X হচ্ছে একটি সাধারণ উপাদান (Common element) ।

মনে করো—$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 3, 5\}$ তবে $A\cap B=\{1, 3\}$

সেরকম $S=\{a, b, c\}$, $T\{p, z, r\}$ তবে $S\cap T=\varnothing$ অথবা $S\cap T=\{\ \}$

কারণ S ও T উভয় সেটে কোনো সাধারণ উপাদান নেই। এক্ষেত্রে আমরা S ও T সেটদ্বয়কে **অনছেদী সেট (Disjoint sets** বা **Non-intersecting sets)** বলি।

(c) অন্তর (Difference) :

যদি A ও B দুটি সেট, তবে A সেটে যে উপাদানগুলি B সেটে নেই,তাদেরকে নিয়ে গঠিত সেটকে A অন্তর B সেট বলা যায়। এবং এটি A - B দ্বারা সূচিত হয়।

সূত্র প্রণালীতে: $A - B =\{x\ 1x\in A$ এবং $X \notin B\}$ সেরকম $B - A=\{x\notin B$ এবং $x \notin A\}$

উদাহরণস্বরূপ মনে করো $A=\{1, 2, 3, 4\}$,$B=\{3, 4\}$ তবে $A - B=\{1, 2\}$

এবং $B - A=\varnothing$

তোমার জন্য কাজ ঃ

1. মনে করো $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{2, 4, 6\}$

তবে $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ এবং $B - A$ নির্ণয় করো।

2. শূন্যস্থান পূরণ করো।

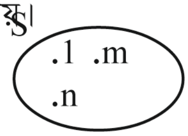
$A \cup B =$ ——	$A \cap A =$ ——	$A - A =$ ——
$A \cup \varnothing =$ ——	$A \cap \varnothing =$ ——	$A - \varnothing =$ ——

1.8 ভেনচিত্র (Venn Diagram) :

সেট, উপসেট ও সেট প্রক্রিয়াকে সহজে বোঝার জন্য আমরা সেট তত্ত্ব চিত্রর সাহায্য নিয়ে থাকি। একে ভেনচিত্র বলে। প্রথমে এই চিত্রের ধারণা দিয়েছিলেন বিশিষ্ট ইংরেজ তর্ক শাস্ত্রবিদ জন ভেন। **(John Venn 1834-1883)** চিত্রে সেটদের আবদ্ধ ক্ষেত্র বা বৃত্তাকার ক্ষেত্র দ্বারা সূচনা করা গেছে। আবদ্ধ ক্ষেত্রের অন্তর্দেলের সেটের উপাদানগুলি থাকার ধারণা করা যায়।

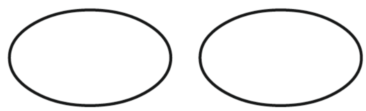
উদাহরণস্বরূপ

(i) $S=\{l, m, n\}$ সেটের ভেনচিত্র পাশে দেখানো গেছে। (চিত্র বসবে)



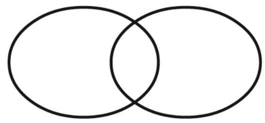
$S=\{l, m, n\}$ চিত্র (1.1)

(ii) যদি দুটি সেট A ও B পরস্পর অনছেদী হয় তবে এদের ভেনচিত্রকে পার্শ্বস্থ চিত্রে দেখানো গেছে।



অনছেদী সেট

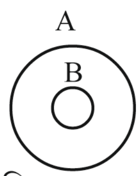
(চিত্র-1, 2) সেট $A\cap B=\varnothing$



পরস্পরছেদী সেট

চিত্র: 1.3 (a)

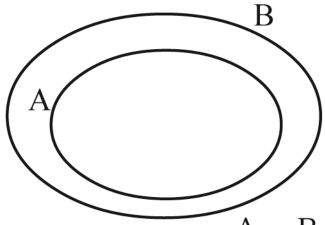
যদি A সেটের কিছু উপাদান B সেটে থাকে তবে এর ভেনচিত্রকে পার্শ্বস্থ চিত্রে দেখানো গেছে।



চিত্র: 1.3 (b)

$B\subset A$ (b) (B, A-র একটি উপসেট)

(iii) দুটি সেট A ও B মধ্যে যদি $A \subset B$ হয়ে থাকে তবে উক্ত ভেনচিত্রকে পার্শ্বস্থ চিত্রে দেখো।



(চিত্র-1.4) $A \subset B$

পূর্বে বর্ণিত সেট প্রক্রিয়াকে ভেনচিত্র দ্বারা দেখাতে পারব।

চিত্র A B (1, 4) $A \subset B$

উদাহরণ-4

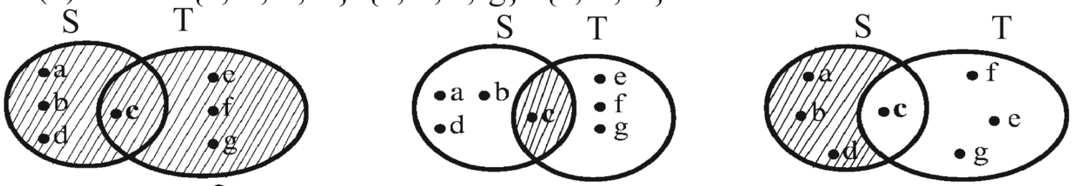
যদি S={a, b, c, d} ও T={c, e, f, g} হয়,

তবে $S \cup T$, $S \cap T$, S - T নির্ণয় করে প্রত্যেকের ভেনচিত্র অঙ্কন করো।

(a) $S \cup T=\{a, b, c, d\} \cup \{c, e, f, g\}=\{a, b, c, d, e, f, g\}$

(b) $S \cap T=\{a, b, c, d\}$^ $\{c, e, f, g\}=\{c\}$

(c) $S - T=\{a, b, c, d\}-\{c, e, f, g\}=\{a, b, d\}$



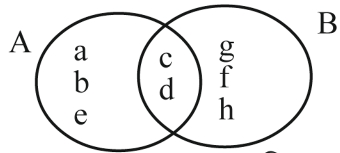
($S \cup T$) রেখাচিত্র (a)   ($S \cap T$) রেখাচিত্র (b)   (চিত্র-1.5)   (S - T) রেখাচিত্র (c)

উদাহরণ: 5 প্রদত্ত ভেনচিত্রের $A \cup B$, $A \cap B$, A-B-কে তালিকা প্রণালীতে লেখো।

সমাধান: $A \cup B=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$A \cap B=\{c, d\}$

$A - B=\{a, b, c\}$



(চিত্র-1.6)

অনুশীলনী-1

1. $A=\{1, 2, 3, 4\}$ হলে উক্তগুলির মধ্যে ঠিক উক্তির জন্য (T) ও ভুল উক্তির জন্য (F) লেখো।

(i) $3 \in A$ (ii) $5 \in A$ (iii) $4 \notin A$

(iv) $7 \notin A$ (v) $\{3\} \in A$ (vi) $\{3\} \subset A$

(vii) $3 \subset A$ (viii) $\{3, 4\} \in A$ (ix) $\{3, 4\} \subset A$

(x) $\{1, 2, 3, 4\} \in A$ (xi) $\{1, 2, 3, 4\} < A$

2. $\subset, \supset, =, \in, \notin$ সংকেতদের মধ্যে উপযুক্ত সংকেতকে বেছে নিম্নস্থ শূন্যস্থানগুলি পূরণ করো।

(i) a...{a, b, c}   (ii) {a}...{a, b, c}   (iii) {c, a, b}...{a, b, c}

(iv) d...{a, b,c}   (v) {b, c}...{a, c, b}   (vi) {a, b, c}...{a, b}

3. নিম্নলিখিত সেটদের তালিকা পদ্ধতিতে লেখো।

(i) {x1 $x \in N$ 1< x<10   (ii) {2n 1n$\in$N $n \leq 4$}

(iii) {x 1n একটি যুগ্ম মৌলিক সংখ্যা   (iv) {x 1x একটি যুগ্ম সংখ্যা $x \in N$ ও x<10

(v) {x 1x একটি পূর্ণসংখ্যা $5 \leq x < 4$}   (vi) {x 1x এক সপ্তাহের একটি দিন}

(vii) {x 1x একটি গণন সংখ্যা 2< X< 3   (viii) {x1x=2^n $n \in N$ এবং $5 \leq x \leq 27$

4. নিম্নলিখিত সেটদের সূত্র পদ্ধতিতে লেখো।

(i) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ (ii) $\{a, l, i, o, u\}$ (iii) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(iv) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ (v) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ (vi) $\{3, 6, 9, 12, 15\}$

(vii) $\{5, 25, 125, 625\}$ (viii) $\{a, b, c...z\}$ (ix) $\{2, 4, 8, 16, 32...\}$

5. নিম্নলিখিত শব্দদের ব্যবহৃত অক্ষরদের সেট লেখো।

(i) Mathematics (ii) Arithmetic

(iii) Programme (iv) Commitee

6. যদি $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ এবং $B=\{2, 4, 6, 8\}$ হয়, তবে $A\cup B$ ও $A\cap B$-কে তালিকা প্রণালীতে লেখো।

7. যদি $\{x\ 1x\in N$ এবং $1< X\leq 6$ এবং $B=\{x\ 1x\in N$ এবং $4<X\leq 10$ হলে $A\cup B$ এবং $A\cap B$-কে তালিকা প্রণালীতে লেখো।

8. $A=\{1, 2, 3, 4\}$ এবং $B=\{2, 3, 5\}$ এবং $C=\{2, 4, 6\}$ হলে নিম্নোক্ত সেটগুলি তালিকা পদ্ধতিতে লেখো।

(i) $A\cup B$ (ii) $A\cap C$ (iii) $B\cap C$ (iv) $A\cup C$ (v) $B\cup C$ (vi) $A\cap B$

9. পার্শ্বস্থ ভেনচিত্র থেকে নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও। (চিত্র বসবে)

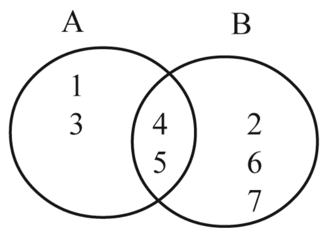
(i) সেট A ও সেট B-কে তালিকা পদ্ধতিতে লেখো।

(ii) $A\cap B$-কে তালিকা পদ্ধতিতে লেখো।

(iii) $A\cup B$-কে তালিকা পদ্ধতিতে লেখো।

(iv) $A - B$-কে তালিকা পদ্ধতিতে লেখো।

(v) $B - A$-কে তালিকা পদ্ধতিতে লেখো।



(চিত্র-1.7)

10. পার্শ্বস্থ ভেনচিত্র থেকে নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও।

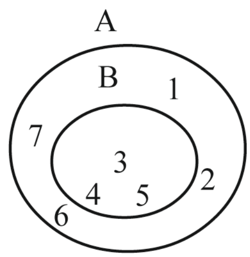
(i) সেট A ও B সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে লেখো।

(ii) $A\cap B$-কে তালিকা পদ্ধতিতে লেখো।

(iii) $A\cup B$-কে তালিকা পদ্ধতিতে লেখো।

(iv) $A\cup \varnothing$-কে তালিকা পদ্ধতিতে লেখো।

(v) $A\cap \varnothing$-কে তালিকা পদ্ধতিতে লেখো।



(চিত্র-1.8)

11. $A=\{a, b, c, d\}$ $B=\{c, d, e, f\}$ হলে

(i) $A - B$ ও $B - A$ সেটগুলি তালিকা পদ্ধতিতে লেখো।

(ii) $(A - B) \cup (B - A)$ সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে লেখো।

(iii) $(A - B) \cap (B - A)$ সেটকে নির্ণয় করো।

⌘⌘⌘⌘⌘⌘

পরিমেয় সংখ্যা (RATIONAL NUMBER)

অধ্যায় ২

2.1 উপক্রমণিকা (Introduction):

পরিমেয় সংখ্যা বিষয়ে আলোচনা করার পূর্বে আমরা পূর্বশ্রেণীর পাঠ্যক্রমে বর্ণিত গণন সংখ্যা বা স্বাভাবিক সংখ্যা সংপ্রসারিত স্বাভাবিক সংখ্যা ও পূর্ণসংখ্যা বিষয়ে সংক্ষেপে আলোচনা করব।

2.1.1 গণন সংখ্যা বা স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural Nubers) :

একটি সাধারণ মানুষের দৈনন্দিন জীবন ও জীবিকার প্রথমে যে সংখ্যা সমূহ ব্যবহার হয়েছিল তা হল গণন সংখ্যা বা স্বাভাবিক সংখ্যা।

এই সংখ্যা সমূহ সেটকে N দ্বারা চিহ্নিত করা যায়।

$N=\{1, 2, 3, 4...\}$

2.1.2 সংপ্রসারিত স্বাভাবিক সংখ্যা (Extended Natural Numbers) :

মনে করো তোমার কাছে 10 টাকা আছে।

তুমি একটি 10 টাকার মূল্যে পেন কিনলে। তোমার কাছে আর কত টাকা থাকল? তোমার কাছে যত টাকা থাকল তা হচ্ছে 0 টাকা।

এটি ভারতীয় গণিতজ্ঞদের অবদান বলে দৃঢ় মত পোষণ করা যায়। গণন পদ্ধতির এর বহুল ব্যবহারকে ভিত্তি করে পরবর্তী সময়ে একে গণন সংখ্যা সেটে শামিল করা গিয়ে উক্ত সেটকে সংপ্রসারিত **স্বাভাবিক সংখ্যা সেট (Extended Natural Number Set)** বলে। এই সংখ্যা সমূহকে N* বা W দ্বারা চিহ্নিত করা যায়।

$\mathbf{N^*=\{0, 1, 2, 3, 4...\}}$

দ্রষ্টব্য: {0, 1, 2, 3, 4...} সেটকে মধ্য সামগ্রিক সংখ্যা সেট (Whole Number Set) বলা যায়।

2.1.3 পূর্ণ সংখ্যা (Integers)

পূর্বে বর্ণিত স্বাভাবিক সংখ্যা এক একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। কয়েকটি নির্দিষ্ট পরিস্থিতিতে সংখ্যা ভিত্তিক গাণিতিক পরিপ্রকাশ জন্য কেমন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা পর্যাপ্ত না এসো, তা জানব।

মনে করো তোমার কাছে 10 টাকা আছে। তোমার একটি 11 টাকা মূল্য কলম কেনার আছে। তোমার কাছে থাকা টাকা এর জন্য পর্যাপ্ত না। এর পরিস্থিতির সমাধান জন্য তোমায় 1 টাকা ধার করতে পড়বে। এই পরিস্থিতিতে গাণিতিক সমাধান কেবল ধনাত্মক সংখ্যা '1' দ্বারা না হয় 'ঋণাত্মক 1' (যাকে আমরা -1 ভাবে লিখব) দ্বারা সম্ভব।

অর্থাৎ 10 - 11= -1 সেরকম 10 - 12= -2

এরকম পরিস্থিতিতে সমাধানের জন্য -1, -2, -3 ইত্যাদি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা আবিষ্কৃত হল।

মনে রাখো: 0 একমাত্র সংখ্যা যা ধনাত্মক না কি ঋণাত্মক না।

ধনাত্মক পরিসংখ্যা, শূন্য ও ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা সমূহকে আমরা Z সেট দ্বারা প্রকাশ করি।

অর্থাৎ Z={...., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

Z সেট এক অসীম সেট এবং N সেট Z সেটের একটি উপসেট। অর্থাৎ $N \subset Z$

সেরকম ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা সেট {1, 2, 3} এবং ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা সেট {...4, -3, -2, -1} এক একটি অসীম সেট ও প্রত্যেক পূর্ণসংখ্যা সেটের এক একটি উপসেট।

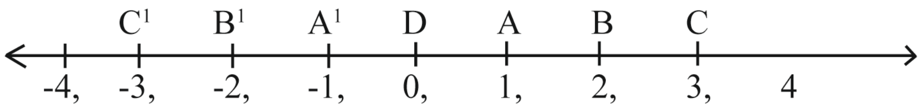
টীকা— অধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা সেট {-4, -3, -2, -1, 0} (Non positive integers)

অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা সেট। (Non negetive integers)

অথবা সংপ্রসারিত স্বাভাবিক সংখ্যা সেট (N*)={0,1, 2, 3...}

উভয় সেট অসীম সেট এবং উভয় সেটের সংযোগে পূর্ণসংখ্যা সেট (Z) হয়।

পূর্ণসংখ্যাগুলি সংখ্যা রেখার বিন্দুদের দ্বারা চিহ্নিত করা যাবে। নীচে দেওয়া গেছে সংখ্যাগুলিকে দেখো।



(2.1)

সরলরেখার যে কোনো বিন্দুকে D নামিত করো ও এই বিন্দুকে 0 সংখ্যার প্রতীক বলে ধরেনাও। একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য নিয়ে 0 বিন্দুর ডান দিকে A বিন্দু বসাও। এই চিত্র সংখ্যা 1-কে প্রতীক বোলে বলো। $\overline{0A}$ থেকে 0A দূরত্বর সাথে সমান করে A-র ডানদিকে রেখাখণ্ডগুলি ছেদ করো ও ছেদ বিন্দুদের B, C আদি নাম দাও। বর্তমান এই বিন্দুদের যথাক্রমে 2, 3... দের প্রতীক হবে। এরকম N সেটের সমস্ত উপাদানের জন্য সরলরেখার 0 ডানদিকে বিন্দুদের চিহ্নিত করতে পরবে। 0 -র বামদিকে A^1 B^1 C^1... বিন্দুদের চিহ্নিত করো যেমন $0A=0A^1=A^1B^1=B^1C^1=$- - - -।

বর্তমান A^1 B^1 C^1 বিন্দুদের যথাক্রমে ঋণাত্মক সংখ্যা -1, -2, -3... দের প্রতীক হবে। এই প্রকার সেট Z-র প্রত্যেক উপাদানের জন্য সরলরেখার বিন্দুদের চিহ্নিত করতে পারবে। **উক্ত সরলরেখাকে সংখ্যারেখা** (Number line) বলা হয়। উক্ত সরলরেখাকে **পূর্ণসংখ্যা সূচক রেখাচিত্র** বলা যায়।

এখানে মনে রাখা উচিত হবে Z -এর প্রত্যেক উপাদান। রেখাচিত্রের এর ডানদিকে থাকা উপাদান থেকে ছোট। বিপরীত ক্রমে Z -এর প্রত্যেক উপাদান, রেখাচিত্রের এর বাম দিকে থাকা উপাদান অপেক্ষা বড়।

2.2. পরিমেয় সংখ্যা (Rational Number)

মনে করো P ও Q উভয়ে পূর্ণসংখ্যা এবং $Q \neq 0$ তবে P-কে Q দ্বারা ভাগ করলে আমরা একটা পূর্ণসংখ্যা পাব কি?

6-কে 3 দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল 2 একটি পূর্ণসংখ্যা। কিন্তু 6-কে 5 দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল $\frac{6}{5}$ একটি পূর্ণসংখ্যা নয়। তাই ভাগ প্রক্রিয়াকে অধিক ব্যাপ্ত ও 0 ভিন্ন যে কোনো পূর্ণসংখ্যা দ্বারা ভাগ অর্থপূর্ণ করতে হলে আমাদের সংখ্যা সম্পর্কীয় জ্ঞানের পরিসরকে বাড়াতে হবে।

যদি p ও q দুটি পূর্ণসংখ্যা ও $q \neq 0$ তবে $p \div q$ বা $\frac{p}{q}$-কে পরিমেয় সংখ্যা বলে। সমস্ত পরিমেয় সংখ্যা সেটকে Q সংকেত দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

যে কোনো পূর্ণসংখ্যা M একটি পরিমেয় সংখ্যা। কারণ M-কে $\frac{M}{1}$ রূপে প্রকাশ করতে পারব। সে দৃষ্টিতে 0 মধ্য একটি পরিমেয় সংখ্যা। **Q সেট একটি অসীম সেট এবং $N \subset Z \subset Q$**

পরিমেয় সংখ্যা $\frac{p}{q}$-র হর $Q \neq 0$ কারণ কোনো সংখ্যাকে 0 দ্বারা ভাগ করা অসম্ভব।

2.2.1 পরিমেয় সংখ্যার ধর্ম (Properties of Rational Number)

1. সংবৃত্তি নিয়ম (Closure Law)

(i) স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural Number) এবং সংপ্রসারিত সংখ্যা (Extended Natural Number)

তলে শ্রেণীতে স্বাভাবিক সংখ্যার বিভিন্ন বীজগাণিতিক প্রক্রিয়ার জন্য এই নিয়ম বিষয়ে পড়েছ। এসো নীচের সারণী দেখে নিই।

প্রক্রিয়া	উদাহরণ	টিপ্পনী
যোগক্রিয়া	1+5=6 একটি স্বাভাবিক সংখ্যা। সেরকম 7+5=12 এটিও একটি স্বাভাবিক সংখ্যা যেকোন দুটি স্বাভাবিক সংখ্যা a ও b -র জন্য a+b একটি স্বাভাবিক সংখ্যা।	স্বাভাবিক সংখ্যা সেট যোগ প্রক্রিয়া সবৃত্তি নিয়ম পালন করে। সংপ্রসারিত স্বাভাবিক সংখ্যার জন্য মধ্য এটি প্রযুজ্য।
বিয়োগক্রিয়া	5 - 2=3 একটি স্বাভাবিক সংখ্যা। কিন্তু 2 - 5= -3 একটি স্বাভাবিক সংখ্যা নয়	স্বাভাবিক সংখ্যা সেটের বিয়োগ সংবৃত্তি নিয়ম পালন করে না। সংপ্রসারিত স্বাভাবিক সংখ্যার জন্য এটি প্রযুজ্য।
গুণনক্রিয়া	$2\times4=8$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা। $3\times7=21$ এটিও স্বাভাবিক সংখ্যা যদি a ও b যে কোনো দুটি স্বাভাবিক সংখ্যা হয়, তবে তাদের গুণফল $a\times b$ বা ab মধ্য একটি স্বাভাবিক সংখ্য	স্বাভাবিক সংখ্যা সেট গুণনক্রিয়া সংবৃত্তি নিয়ম পালন করে। সংপ্রসারিত স্বাভাবিক সংখ্যার জন্য মধ্য প্রযুজ্য।
ভাগক্রিয়া	$8\div4=2$ একটি স্বাভাবিক মধ্য $5\div8=\frac{5}{8}$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা নয	স্বাভাবিক সংখ্যা সেটের ভাগক্রিয়া সংবৃত্তি নিয়ম পালন করে না। সংপ্রসারিত স্বাভাবিক সংখ্যার জন্য মধ্য এটি প্রযুজ্য।

(ii) পূর্ণসংখ্যা (Integers)

এসো পূর্ণসংখ্যা সেটে বিভিন্ন বীজগাণিতিক প্রক্রিয়ার জন্য সংবৃত্তি নিয়ম সম্বন্ধে আলোচনা করব।

প্রক্রিয়া	উদাহরণ	টিপ্পনী
যোগক্রিয়া	0+5=5 একটি পূর্ণসংখ্যা 7+5=12 মধ্য একটি পূর্ণসংখ্যা যে কোনো দুটি পূর্ণসংখ্যা a ও b জন্য a+b একটি পূর্ণসংখ্যা	পূর্ণসংখ্যা সেটে যোগক্রিয়া সংবৃত্তি নিয়ম পালন করে।
বিয়োগক্রিয়া	5 - 2=3 একটি পূর্ণসংখ্যা এবং 2 - 5= -3 মধ্য একটি পূর্ণসংখ্যা a ও b দুটি পূর্ণসংখ্যা জন্য a - b একটি পূর্ণসংখ্যা	পূর্ণসংখ্যা সেটে বিয়োগক্রিয়া সংবৃত্তি নিয়ম পালন করে।
গুণনক্রিয়া	$0\times3=0$ একটি পূর্ণসংখ্যা। $3\times7=21$ মধ্য একটি পূর্ণসংখ্যা। a ও b যে কোনো দুটি পূর্ণসংখ্যা হলে ab মধ্য একটি পূর্ণসংখ্যা।	পূর্ণসংখ্যা সেটে গুণনক্রিয়া সংবৃত্তি নিয়ম পালন করে।
ভাগক্রিয়া	$-14\div2= -7$ একটি পূর্ণসংখ্যা $5\div8=\frac{5}{8}$ একটি পূর্ণসংখ্যা না	তাই পূর্ণসংখ্যা সেটে ভাগক্রিয়া সংবৃত্তি নিয়ম পালন করে না।

উপরোক্ত তালিকা থেকে আমরা জানতে পারলাম যে পূর্ণসংখ্যা সেটে যোগক্রিয়া, বিয়োগক্রিয়া ও গুণনক্রিয়া সংবৃত্তি নিয়ম পালন করার সময় ভাগক্রিয়া উক্ত নিয়ম পালন করে না।

(iii) পরিমেয় সংখ্যা (Rational Numbers)

(a) যোগক্রিয়া—বর্তমান কয়েকটি পরিমেয় সংখ্যা জোড়কে যোগ করা যাক।

$\frac{3}{8}+\frac{(-5)}{7}=\frac{21+(-40)}{56}=\frac{-19}{56}$ এটি একটি পরিমেয় সংখ্যা সেরকম

$-\frac{3}{8}+\frac{(-4)}{5}=\frac{-15+(-32)}{40}=\frac{-47}{40}$ এটি মধ্য একটি পরিমেয় সংখ্যা।

$\frac{4}{7}+\frac{6}{11}=\ldots$ এটি একটি পরিমেয় সংখ্যা কি?

আর কয়েকটি পরিমেয় সংখ্যা জোড়ের জন্য এর যোগক্রিয়ার ফলাফল পরীক্ষা করো।

এই পরীক্ষা থেকে আমরা জানব যে দুটি পরিমেয় সংখ্যার যোগফল একটি পরিমেয় সংখ্যা। অর্থাৎ পরিমেয় সংখ্যা সেট যোগক্রিয়া সংবৃত্তি নিয়ম পালন করে।

অর্থাৎ যদি $a, b\in Q$ তবে $a+b\in Q$

b) বিয়োগক্রিয়া—কয়েকটি জোড়া পরিমেয় সংখ্যাকে নিয়ে আমরা বিয়োগ ক্রিয়া করব ও দেখব দুটি পরিমেয় সংখ্যার বিয়োগফল একটি পরিমেয় সংখ্যা হবে কি না?

$-\frac{5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{-5\times3-2\times7}{21}=\frac{-15-14}{21}=\frac{-29}{21}$ এটি একটি পরিমেয় সংখ্যা। সেরকম

$\frac{5}{8}-\frac{4}{3}=\frac{25-32}{40}=\frac{-17}{40}$ এটি মধ্য একটি পরিমেয় সংখ্যা।

$\frac{3}{7}-\left(\frac{-8}{5}\right)=\ldots$ এটি একটি পরিমেয় সংখ্যা কি?

আরও কয়েক জোড়া পরিমেয় সংখ্যাকে নিয়ে এর মতো বিয়োগফল নির্ণয় করো। দেখবে যে **পরিমেয় সংখ্যা সেটটি বিয়োগক্রিয়া সংবৃত্তি নিয়ম পালন করে।**

অর্থাৎ $a, b\in Q$ হলে $a - b\in Q$

(c) গুণনক্রিয়া—দুটি পরিমেয় সংখ্যার গুণফল বিষয়ে আলোচনা করা যাক।

$-\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{-8}{15}, \frac{3}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{35}$ এটি দুটি ক্ষেত্র গুণফল একটি একটি পরিমেয় সংখ্যা।

$-\frac{4}{5}\times\frac{-6}{11}=\ldots$ এটা একটি পরিমেয় সংখ্যা কি?

এরকম আরও কতকগুলি পরিমেয় সংখ্যা জোড়কে নিয়ে গুণফল স্থির করো। তোমরা নিশ্চয় সত্যে উপনীত হবে যে দুটি পরিমেয় সংখ্যার গুণফল একটি পরিমেয় সংখ্যা। অতএব পরিমেয় সংখ্যা সেটটি গুণনক্রিয়া সংবৃত্তি নিয়ম পালন করে।

অর্থাৎ $a, b\in Q$ হলে $a \times b\in Q$

(d) ভাগক্রিয়া—বর্তমান নিম্ন উদাহরণগুলি লক্ষ করো।

$-\frac{5}{3}\div\frac{2}{5}=\frac{-5}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{-25}{6}$ এটি একটি পরিমেয় সংখ্যা। সেরকম

$\frac{2}{7}\div\frac{5}{3}=\frac{2}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{35}$ এটি মধ্য পরিমেয় সংখ্যা।

$-\frac{3}{8}\div\frac{-2}{9}=\ldots$ এটি একটি পরিমেয় সংখ্যা কি?

কিন্তু যে কোনো একটি পরিমেয় সংখ্যা a জন্য $a\div0$ নিরর্থক। তাই পরিমেয় সংখ্যা সেটে ভাগক্রিয়া সংবৃত্তি নিয়ম পালন করে না। কিন্তু শূন্যকে ছেড়ে দিলে অন্য পরিমেয় সংখ্যাগুলির জন্য ভাগক্রিয়া সংবৃত্তি নিয়ম পালন করে।

নিজে করো প্রদত্ত সেটগুলি বিভিন্ন প্রক্রিয়া সংবৃত্তি নিয়ম পালন করে কি না (হ্যাঁ/না) মাধ্যমে প্রদত্ত তালিকা শূন্যস্থান পূরণ করো।

সংখ্যা সেট	সংবৃত্তি নিয়ম			
	যোগক্রিয়া	বিয়োগক্রিয়	গুণনক্রিয়	ভাগক্রিয়া
পরিমেয়	--	--	--	--
পূর্ণসংখ্যা	--	--	--	--
স্বাভাবিক সংখ্যা	--	--	--	--
সংপ্রসারিত স্বাভাবিক সংখ্যা	--	--	--	--

2. ক্রমবিনিময়ী নিয়ম

(i) স্বাভাবিক সংখ্যা- এসো গণন সংখ্যা ও স্বাভাবিক সংখ্যা এক বিনিময়ী নিয়মকে মনে করব।

প্রক্রিয়া	উদাহরণ	টিপ্পনী
যোগক্রিয়া	0+7=7+0=7 2+3=3+2=5 যে কোনো দুটি গণনসংখ্যা a ও b জন্য a+b=b+a	যোগক্রিয়া ক্রমবিনিময়ী নিয়ম পালন করে।
বিয়োগক্রিয়া	$5 - 3 \neq 3 - 5$	বিয়োগক্রিয়া ক্রমবিনিময়ী নিয়ম পালন করে না।
গুণনক্রিয়া	$5\times3=3\times5$	ক্রমবিনিময়ী নিয়ম পালন করে।
ভাগক্রিয়া	$5\div3\neq3\div5$	ভাগক্রিয়া ক্রমবিনিময়ী নিয়ম পালন করে না।

(ii) পূর্ণসংখ্যা

পূর্ণসংখ্যার জন্য বিভিন্ন প্রক্রিয়াগুলির ক্রমবিনিময়ী নিয়ম প্রযোজ্য কিনা জেনে নেব।

প্রক্রিয়া	উদাহরণ	টিপ্পনী
যোগক্রিয়া	-3+5=5+(3)	যোগক্রিয়া ক্রমবিনিময়ী নিয়ম পালন করে।
বিয়োগক্রিয়া	$5 - (-3)\neq -3 -5$	বিয়োগক্রিয়া ক্রমবিনিময়ী নিয়ম পালন করে না।
গুণনক্রিয়া	$(-3)\times5=5\times(-3)$	গুণনক্রিয়া ক্রমবিনিময়ী নিয়ম পালন করে।
ভাগক্রিয়া	$-3\div5\neq5\div(-3)$	ভাগক্রিয়া ক্রমবিনিময়ী নিয়ম পালন করে না।

(iii) পরিমেয় সংখ্যা

(a) যোগক্রিয়া

বর্তমান কত জোড়া পরিমেয় সংখ্যাকে যোগ করব।

$$-\frac{2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{-14+15}{21}=\frac{1}{21} \text{ ও } \frac{5}{7}+\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{15-14}{21}=\frac{1}{21} \text{ তাই } \frac{-2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{5}{7}+\left(\frac{2}{3}\right)$$

সেরক $\frac{-6}{3}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\frac{-58}{15}$ ও $\frac{-8}{3}+\left(\frac{-6}{5}\right)=\frac{-58}{15}$ তাই

$\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\frac{-8}{3}+\left(\frac{-6}{5}\right), \frac{-3}{8}+\frac{1}{7}=\frac{1}{7}+\left(\frac{3}{8}\right)$ নিজে পরীক্ষা করে দেখো।

তোমরা দেখবে যে কোনো দুটি পরিমেয় সংখ্যাকে যে কোনো ক্রমে যোগ করা যেতে পারে। তার জন্য আমরা বলি যে পরিমেয় সংখ্যা ক্ষেত্র যোগক্রিয়া ক্রমবিনিময়ী। অর্থাৎ যদি a ও b দুটি পরিমেয় সংখ্যা হয়, তবে a+b=b + a হবে।

(b) বিয়োগক্রিয় $\frac{2}{3}-\frac{5}{4}=\frac{-7}{12}$ এবং $\frac{5}{4}-\frac{2}{3}=\frac{7}{12}$ তাহ $\frac{2}{3}-\frac{5}{4}\neq\frac{5}{4}-\frac{2}{3}$

তোমরা দেখবে পরিমেয় সংখ্যার জন্য বিয়োগ প্রক্রিয়া ক্রমবিনিময়ী না।

সেরকম পরীক্ষা করে দেখবে $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\neq\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$ ।

(c) গুণনক্রিয়া $\frac{7}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{-42}{15}$ ও $\frac{6}{4}\times\left(\frac{-7}{3}\right)=\frac{-42}{15}$ সেরকম $-\frac{8}{9}\times\left(-\frac{4}{7}\right)=\frac{-4}{7}\times\left(\frac{-8}{9}\right)$

এরকম আর কিছু পরিমেয় সংখ্যাযোগকে গুণ করে দেখো। তোমরা দেখবে যে **পরিমেয় সংখ্যা গুণনক্রিয়া ক্রমবিনিময়ী। যে কোনো দুটি পরিমেয় সংখ্যা a ও b কক a x b = b x a**

(d) ভাগক্রিয়া $-\frac{5}{4}\div\frac{3}{7}\neq\frac{3}{7}\div\left(\frac{-5}{4}\right)$ (নিজে পরীক্ষা করে লেখ)

সেরকম অন্য জোড়া পরিমেয় সংখ্যা নিয়ে পরীক্ষা করো। দেখবে যে কোনো দুটি ভিন্ন অনশূন্য পরিমেয় সংখ্যা a ও b জন্য $a\div b\neq b\div a$। (পরীক্ষা করে লেখ)

নিজে করো

প্রদত্ত সেটগুলি বিভিন্ন প্রক্রিয়া ক্রমবিনিময়ী নিয়ম পালন করে কিনা (হ্যাঁ/না) মাধ্যমে প্রদত্ত তালিকা শূন্যস্থান পূরণ করো।

সংখ্যা সেট		ক্রমবিনিময়ী নিয়ম		
	যোগক্রিয়া	বিয়োগক্রিয়া	গুণনক্রিয়া	ভাগক্রিয়া
পরিমেয় সংখ্যা	--	--	--	--
পূর্ণসংখ্যা	--	--	--	--
গণনসংখ্যা	-	--	--	--
সংপ্রসারিত স্বাভাবিক সংখ্যা	--	--	--	--

(3) সহযোগী নিয়ম (Associative Law)

(i) স্বাভাবিক সংখ্যা গণন সংখ্যা পূর্বের শ্রেণীতে পড়ে থাকা সহযোগী নিয়মকে জেনে নেব।

প্রক্রিয়া	উদাহরণ	টিপ্পনী
যোগক্রিয়া	(3+4)+5=3+(4+5)	যোগক্রিয়া সহযোগী নিয়ম পালন করে।
বিয়োগক্রিয়া	$(3-4)-5 \neq 3-(4-5)$	বিয়োগক্রিয়া সহযোগী নিয়ম পালন করে না।
গুণনক্রিয়া	$7\times(2\times5)=(7\times2)\times5$, $4\times(6\times10)=(4\times6)\times10$	গুণনক্রিয়া সহযোগী নিয়ম পালন করে।
ভাগক্রিয়া	$(3\div4)\div5\neq3\div(4\div5)$	ভাগক্রিয়া সহযোগী নিয়ম পালন করে না।

সম্প্রসারিত স্বাভাবিক সংখ্যার ক্ষেত্রে উপরোক্ত পালন হয় কি না পরীক্ষা করে লেখ।

(ii) পূর্ণসংখ্যা

পূর্ণসংখ্যা সহযোগ নিয়মকে নীচে তালিকাতে দেওয়া গেছে।

প্রক্রিয়া	উদাহরণ	টিপ্পনী
যোগক্রিয়া	-2+[3+(-4)]=[(-2)+3]+(-4) যে কোনো তিনটি পূর্ণ সংখ্যা a, b, c জন্য a+(b+c)=(a+b)+c	যোগক্রিয়া সহযোগী নিয়ম পালন করে।
বিয়োগক্রিয়া	$5-(7-3)\neq(5-7)-3$	বিয়োগক্রিয়া সহযোগী নিয়ম পালন করে না।
গুণনক্রিয়া	$5\times[(-7)\times(-8)]=[5\times(-7)]\times(-8)$ যে কোনো তিনটি পূর্ণসংখ্যা a, b ও c জন্য $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$	গুণনক্রিয়া সহযোগী নিয়ম পালন করে।
ভাগক্রিয়া	$[(-10)\div2]\div(-5)\neq(-10)\div[2\div(-5)]$	ভাগক্রিয়া সহযোগী নিয়ম পালন করে না।

(iii) পরিমেয় সংখ্যা

(a) যোগক্রিয়া

$$-\frac{2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\frac{-2}{3}+\left(\frac{18-25}{30}\right)=\frac{-2}{3}+\left(\frac{-7}{30}\right)=\frac{(-20)+(-7)}{30}=\frac{-27}{30}$$

এবং $\left[-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)=\left(\frac{-10+9}{15}\right)+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-1}{15}+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-2-25}{30}=\frac{-27}{30}$

$$\therefore -\frac{2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\left[-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)$$

সেরকম পরীক্ষা করে দেখো $-\frac{1}{2}+\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{-4}{3}\right)\right]=\left[\frac{-1}{2}+\frac{3}{7}\right]+\left[\frac{-4}{3}\right]$

আর কিছু অধিক পরিমেয় সংখ্যা নিয়ে পরীক্ষা করে দেখো। এখান থেকে আমরা জানব যে পরিমেয় সংখ্যার জন্য যোগক্রিয়া সহযোগী। অর্থাৎ a, b, $c\in Q$ হলে a+(b+c)=(a+b)+c

(b) বিয়োগক্রিয়া

পরীক্ষা করে দেখো $\frac{-2}{3}-\left[\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right]=\left[-\frac{2}{3}-\left(\frac{-4}{5}\right)\right]-\frac{1}{2}$ সত্য কি?

বামপক্ষ $\frac{-2}{3}-\left[\frac{-8-5}{10}\right]=\frac{-2}{3}-\left(\frac{-13}{10}\right)=\frac{-20+39}{30}=\frac{19}{30}$

ডানপক্ষ $\left[\frac{-10+12}{15}\right]-\frac{1}{2}=\frac{2}{15}-\frac{1}{2}=\frac{4-15}{30}=\frac{-11}{30}$

$\therefore$ বামপক্ষ $\neq$ ডানপক্ষ। আর কিছু পরিমেয় সংখ্যা নিয়ে পরীক্ষা করে দেখো।

(c) গুণনক্রিয়া

বর্তমান গুণনক্রিয়া পরিমেয় সংখ্যা সহযোগী কি না দেখব।

$\frac{-7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{-7}{3}\times\frac{10}{36}=\frac{-70}{108}=\frac{-35}{54}$ এবং $\left(\frac{7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{2}{9}=\frac{-35}{12}\times\frac{2}{9}=\frac{-70}{108}=\frac{-35}{54}$

$\therefore\ \frac{7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\left(\frac{-7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{2}{9}$ সেরকম $\frac{2}{3}\times\left(\frac{-6}{7}\times\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{-6}{7}\right)\times\frac{4}{5}$

এখান থেকে জানলাম যে পরিমেয় সংখ্যা ক্ষেত্রে গুণনক্রিয়া সহযোগী।

$a, b, c\in Q$ জন্য $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$

(d) ভাগক্রিয়া

পরীক্ষা করে দেখো $\frac{1}{2}\div\left[-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right]+\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)\right]+\frac{2}{5}$ সত্যি কি?

বামদিক $=\frac{1}{2}+\left[-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right]=\frac{1}{2}\div\left[-\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\right]=\frac{1}{2}\div\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{-6}{5}\right)=\frac{-3}{5}$ এবং

দক্ষিণদিক $=\left[\frac{1}{2}\div\left(-\frac{1}{3}\right)\right]+\frac{2}{5}=\left(\frac{1}{2}\times\frac{-3}{1}\right)\div\frac{2}{5}=\frac{-3}{2}\div\frac{2}{5}=\frac{-3}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{-15}{4}$

$\therefore$ বামদিক $\neq$ ডানদিক

আরও কিছু পরিমেয় সংখ্যা নিয়ে পরীক্ষা করে দেখো।

দেখবে যে ভাগক্রিয়া পরিমেয় সংখ্যার সহযোগী নিয়ম পালন করেনা।

নিজে করো

প্রদত্ত সেটগুলি বিভিন্ন প্রক্রিয়া সহযোগী নিয়ম পালন করে কি না (হ্যাঁ/না) মাধ্যমে প্রদত্ত তালিকা শূন্যস্থান পূরণ করো।

সংখ্যা সেট	সহযোগী নিয়ম			
	যোগক্রিয়া	বিয়োগক্রিয়া	গুণনক্রিয়া	ভাগক্রিয়া
পরিমেয় সংখ্যা	--	--	--	--
পূর্ণসংখ্যা	--	--	--	--
স্বাভাবিক সংখ্যা	--	--	--	--
সংপ্রসারিত স্বাভাবিক সংখ্যা	--	--	--	--

2.3 শূন্যর তাৎপর্য

নীচে দেওয়া কয়েকটি উদাহরণকে লক্ষ্য করো।

$2+0=0+2=2$ (এখানে শূন্যকে একটি পূর্ণসংখ্যার সঙ্গে মেসান হল)

$-\frac{2}{7}+0=0+\left(\frac{2}{7}\right)=\frac{-2}{7}$ এখানে শূন্যকে একটি পরিমেয় সংখ্যার সঙ্গে মেসান হল)

আর কিছু সংখ্যা নিয়ে তার সঙ্গে শূন্য যোগ করে দেখো

এখান থেকে তুমি কী জানলে? তুমি দেখে বলবে যে 0-কে একটি পূর্ণসংখ্যা সাথে যোগ করলে যোগফল মধ্য একটি পূর্ণসংখ্যা হবে। সেরকম 0 সাথে একটি পরিমেয় সংখ্যাকে যোগ করলে যোগফল মধ্য একটি পরিমেয় সংখ্যা হবে।

সাধারণত $b+0=0+b=b$ (b, যদি একটি পূর্ণসংখ্যা হয়),

$x+0=0+x=x$ (x, যদি একটি পরিমেয় সংখ্যা হয়),

পরিমেয় সংখ্যা ক্ষেত্রে Q সেট শূন্যকে যোগত্মক অভেদ বলা যায়।

2.4 সংখ্যা 1-এর তাৎপর্য

বর্তমান লক্ষ্য করো। $5\times1=5=1\times5$ (গণনসংখ্যাকে 1 দিয়ে গুণ)

$-\frac{2}{7}\times1=1\times\frac{-2}{7}=\frac{-2}{7}$, $\frac{3}{8}\times1=1\times\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$ (পরিমেয় সংখ্যাকে 1 দিয়ে গুণ)

এখান থেকে কী জানলে?

যে কোনো গণনসংখ্যা পূর্ণসংখ্যা বা পরিমেয় সংখ্যাকে 1 দ্বারা গুণ করলে সেই সংখ্যাটি পাওয়া যায়। X যে কোনো পরিমেয় সংখ্যা হলে, $x\times1=1\times x=x$ হবে।

1 কে পরিমেয় সংখ্যা ক্ষেত্রে (Q সেট) গুণনাত্মক অভেদ বলা যায়।

2.5 সংখ্যার যোগাত্মক বিলোমী (Additive Inverse of a Number)

নীচের পরিস্থিতিতে লক্ষ্য করো।

$1+(-1)=(-1)+1=0$, $2+(-2)=(-2)+2=0$ এখানে জানলাম a যদি যে কোনো পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে $a+(-a)=(a)+a=0$ হবে। এখানে -a, a-এর যোগাত্মক বিলোমী অথবা a, -a -এর যোগাত্মক বিলোমী সেরকম $\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2+(-2)}{3}=0$ এবং $\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0\right)$ পুনশ্চ যে কোনো পরিমেয় সংখ্যা $\frac{a}{b}$ জন্য $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)+\frac{a}{b}=0$ $-\frac{a}{b}$ কে $\frac{a}{b}$ যোগাত্মক বিলোমী বলা যায়। অন্য পক্ষে $\frac{a}{b}$ কে $-\frac{a}{b}$ র যোগাত্মক বিলোমী মধ্য বলা যায়।

কোনো পরিমেয় সংখ্যা X যোগাত্মক বিলোমী $x_1 x+(-x)=(-x)+x = 0$

2.6 ব্যুতক্রম (Reciprocal of a Number)

কোন সংখ্যা দ্বারা $\frac{8}{21}$ কে গুনলে গুণফল 1 হবে?

নিশ্চিতভাবে সংখ্যাটি $\frac{21}{8}$ কারণ $\frac{8}{21}\times\frac{21}{8}=1$। সেরকম $\frac{-5}{7}$ কে $\frac{7}{-5}$ সাথে গুণ করলে গুণফল 1 হবে। এক্ষেত্রে আমরা $\frac{21}{8}$ কে $\frac{8}{21}$ র ব্যুতক্রম ও $\frac{7}{-5}$ কে $\frac{-5}{7}$ ব্যুতক্রম বলি।

একটি সংখ্যার ব্যুতক্রমকে উক্ত সংখ্যার গুণনাত্মক বিলোমী বলা যায়।

$\frac{c}{d}$ পরিমেয় সংখ্যাটি অন্য একটি পরিমেয় সংখ্যা $\frac{a}{b}$ ব্যুতক্রম বা গুণনাত্মক বিলোমী হলে $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=1$।

যদি পরিমেয় সংখ্যা $x\neq 0$ তবে x -এর গুণনাত্মক বিলোমী $\frac{1}{x}$ এবং $\frac{1}{x}$ গুণনাত্মক বিলোমী x হবে।

2.7 বণ্টন নিয়ম (Distributive Law)

তিনটি পরিমেয় সংখ্যা $\frac{-3}{4},\frac{2}{3}$ ও $\frac{-5}{6}$ (নেওয়া যাক)

দেখবে $\frac{-3}{4}\times\left\{\frac{2}{3}+\left(\frac{5}{6}\right)\right\}=-\frac{3}{4}\times\left\{\frac{(4)+(-5)}{6}\right\},\frac{-3}{4}\times\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$

পুনশ্চ $\left(\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{-5}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{5}{8}=\frac{-4+5}{8}=\frac{1}{8}\ \therefore\ \frac{-3}{4}\times\left\{\frac{2}{3}+\frac{-5}{6}\right\}=\left(-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{-3}{4}\times\frac{-5}{6}\right)$

এরকম আর কয়েকটি পরিমেয় সংখ্যা নিয়ে পরীক্ষা করে জানব যে যদি a, b ও c **যে কোনো তিনটি পরিমেয় সংখ্যা হয় তবে**

$a\times(b+c)=(a\times b+a\times c)$ এই নিয়মকে বণ্টন নিয়ম বলা হয়।

অনুশীলনী-2 (a)

1. নীচের সংখ্যাগুলি যোগাত্মক বিলোমী নির্ণয় করো।

   (i) $\frac{2}{8}$ (ii) $\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{-5}$ (iv) $\frac{2}{-9}$ (v) $\frac{19}{-6}$

2. নীচের সংখ্যাদের গুণনামুক বিলোমী নির্ণয় করো।

   (i) -13 (ii) $\frac{13}{19}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{-5}{8}\times\frac{-3}{7}$ (v) $-1\times\frac{-2}{5}$ (vi) -1

3. নীচের উক্তিগুলি কোন নিয়ম ব্যবহার করা গিয়েছে লেখো।

   (i) $-\frac{4}{5}\times 1=1\times\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}$ (ii) $-\frac{13}{17}\times\frac{-2}{7}=\frac{-2}{7}\times\frac{-13}{17}$

   (iii) $\frac{-19}{29}\times\frac{29}{-19}=1$ (iv) $\frac{1}{3}\times\left(6\times\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\times 6\right)\times\frac{4}{3}$

4. $\frac{6}{13}$ কে $\frac{-7}{16}$ ব্যুতক্রম সাথে গুণফল নির্ণয় করো।

5. $\frac{8}{9}, 1\frac{1}{8}$ র ব্যুতক্রম হবে কি? যদি না হয় তবে কেন?

6. $0.3,\ 3\frac{1}{3}$ র ব্যুতক্রম হবে কি? যদি না হয় তবে কেন?

7. **উত্তর দাও**

(i) একটি পরিমেয় সংখ্যা যার ব্যুতক্রম নেই।

(ii) একটি পরিমেয় সংখ্যা যার ব্যুতক্রম সে সংখ্যা সহিত সমান।

(iii) একটি পরিমেয় সংখ্যা যা সেই সংখ্যার যোগাত্মক বিলোমী সঙ্গে সমান।

8. শূন্যস্থান পূরণ করো।

(i) শূন্যর ব্যুতক্রম —।

(ii) — ও — সংখ্যাদের নিজে নিজের ব্যুতক্রম।

(iii) - 5-র ব্যুতক্রম —

(iv) $\frac{1}{x}1(x \neq 0)$র ব্যুতক্রম —।

(v) যে কোনো দুটি পরিমেয় সংখ্যার গুণফল এক —।

(vi) একটি ঋণাত্মক পরিমেয় সংখ্যার ব্যুতক্রম একটি —।

2.8 বিভিন্ন সংখ্যা সেটের মধ্যে সম্পর্ক।

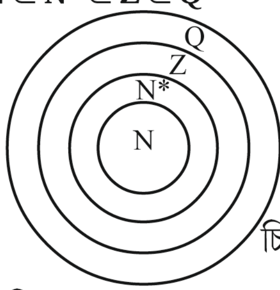
এ পর্যন্ত আমরা আলোচনা করে থাকা সংখ্যা সেট হল $\mathbf{N \subset N^* \subset Z \subset Q}$

(i) N (গণন স্বাভাবিক সংখ্যা সেট)

(ii) N* (সংপ্রসারিত স্বাভাবিক সংখ্যা সেট)

(iii) Z (পূর্ণসংখ্যা সেট)

(iv) Q (পরিমেয় সংখ্যা সেট)



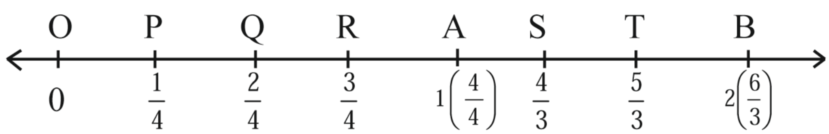
চিত্র (2.2)

2.9 সংখ্যা রেখায় পরিমেয় সংখ্যা

পূর্ণ সংখ্যাদের কি করে একটি সরলরেখা উপরে বিন্দু ভাবে চিহ্নিত করা যায়, তা আমরা জানি। বর্তমানে দেখব যে Q সেটের উপাদানগুলি কী করে সংখ্যা রেখা উপরে বিন্দুভাবে চিহ্নিত করা যেতে পারবে?

সংখ্যারেখার ধনাত্মক দিকে ধনাত্মক পরিমেয় সংখ্যাগুলো ও ঋণাত্মক দিকে ঋণাত্মক পরিমেয় সংখ্যাগুলি বিন্দু রূপে চিহ্নিত করা যেতে পারবে।

উদাহরণ-1 পরিমেয় সংখ্যা $\frac{3}{4}$ র সংখ্যারেখা সূচক বিন্দুটি নির্ণয় করব। $\frac{3}{4}$ অর্থ হল 4 সমান ভাগের 3 ভাগ। $\frac{3}{4}$ সংখ্যাটি 0 (শূন্য) থেকে বড় ও 1 থেকে ছোট এবং $\frac{3}{4}$ পরিমেয় সংখ্যাটি ধনাত্মক। তাই সংখ্যারেখার ধনাত্মক দিকে 0 ও 1 সূচক বিন্দুদ্বয় দ্বারা নিরূপিত রেখাখণ্ড $\overline{0A}$ উপরে $\frac{3}{4}$ সংখ্যাটি সূচক বিন্দুটি অবস্থিত।

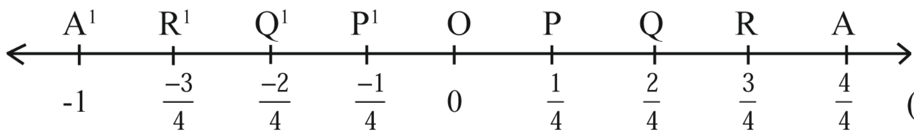


চিত্র (2.3)

$\overline{0A}$ রেখাখণ্ডকে সমান চারভাগে ভাগ করলে আমরা P Q ও R তিনটি বিন্দু পাব। $\overline{0P}$ প্রথম ভাগ, $\overline{pQ}$ দ্বিতীয় ভাগ, $\overline{QR}$ তৃতীয় ভাগ ও $\overline{RA}$ চতুর্থ ভাগ। R বিন্দুটি দ্বারা সূচিত পরিমেয় সংখ্যাটি $\frac{3}{4}$। এসো $\frac{5}{3}$ সংখ্যারেখা সূচক বিন্দুটি স্থির করব। যেটা $\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$ তাই $1<\frac{5}{3}<2$ অর্থাৎ $\frac{5}{3}$ র সূচক বিন্দুটি। 1 ও 2 সংখ্যাসূচক বিন্দুর মধ্যবর্তী। তাই $\overline{AB}$ রেখাখণ্ডকে সমান তিনভাগ করে থাকা বিভাজনবিন্দু S ও T (A থেকে B দিকে) হলে T বিন্দুটি $\frac{5}{3}$ র সূচক বিন্দু। (চিত্র 2.3 দেখ)

সূচনা ঃ $\frac{p}{q}$ ধনাত্মক পরিমেয় সংখ্যাটি সূচক বিন্দু নির্ণয় করার জন্য প্রথমে $\frac{p}{q}$ কোন কোন ক্রমিক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা দ্বয়ের মধ্যবর্তী তা নির্ণয় করো ও উক্ত ধনাত্মক সংখ্যাদ্বয়ের সূচক বিন্দুদ্বয়কে সংযোগ করে থাকা রেখাখণ্ডকে q সমান ভাগ করে p সংখ্যা ভাগ নিয়ে এর প্রান্ত বিন্দুটি চিহ্নিত করো।

উদাহরণ -2 ঃ $\frac{-3}{4}$ সংখ্যাটি ঋণাত্মক পরিমেয় সংখ্যা জন্য এর সূচক বিন্দুটি সংখ্যারেখার <u>রুটের</u> দিকে অবস্থিত।



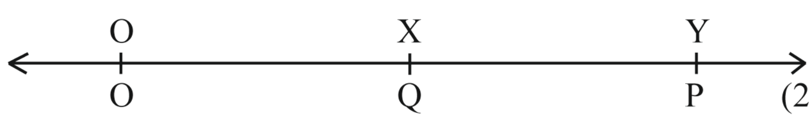
(চিত্র 2.4)

প্রথমে ধনাত্মক পরিমেয় সংখ্যা $\frac{3}{4}$ চিহ্নিত করো অর্থাৎ R বিন্দু নির্ণয় করো। সংখ্যারেখার ঋণাত্মক দিকে 0 বিন্দু থেকে 0R দৈর্ঘ্য নিলে R^1 বিন্দু পাব ও R^1 বিন্দুটি $\frac{-3}{4}$ সূচক বিন্দু।

সূচনা ঃ সুতরাং $\frac{p}{q}$ পরিমেয় সংখ্যাটি ঋণাত্মক হলে $-\frac{P}{Q}=X$ ধনাত্মক। প্রথমে সংখ্যারেখার ধনাত্মক দিকে X র সূচক বিন্দু K নাও। O বিন্দু বামদিকে OK দৈর্ঘ্য নিয়ে K^1 বিন্দু চিহ্নিত করেও এই বিন্দুটি ঋণাত্মক পরিমেয় সংখ্যা $-X=\frac{P}{Q}$ কে সুচাই থাকে।

মনে রাখ ঃ

যদি X ও Y দুটি পরিমেয় সংখ্যা ও Y>X হয় তবে Y র সূচক বিন্দু P, X র সূচক বিন্দু Q র ডান পাশে থাকবে।



(2.5)

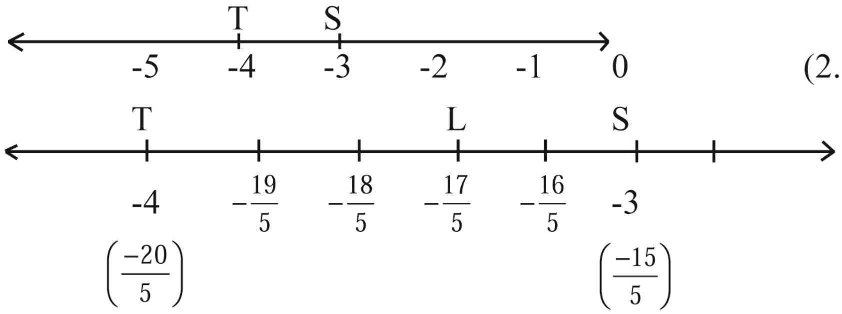
নীচের উদাহরণকে দেখো।

উদাহরণ-1ঃ সংখ্যারেখা $-\frac{17}{5}$ পরিমেয় সংখ্যাটিকে <u>সুচাও</u>।

সমাধান $-\frac{17}{5}=-3\frac{2}{5}$ তাই

$\therefore -\frac{17}{5}$ পরিমেয় সংখ্যাটি 3 ও 4 দ্বারা সূচিত বিন্দু S ও T দ্বয়ের মধ্যবর্তী।

(a) (b)



(2.6)

$\overline{ST}$ রেখাখণ্ডকে সমান পাঁচ ভাগ করলে S থেকে তৃতীয় ভাগের প্রান্তবিন্দু L দ্বারা $-\frac{17}{5}\left(=-3\frac{2}{5}\right)$ পরিমেয় সংখ্যাটি দেখা যায়।

বিকল্প সমাধানের জন্য সূচনাঃ

প্রথমে $\frac{17}{5}$ জন্য সংখ্যা রেখার সূচক বিন্দু (K) স্থির করার পর O বিন্দুর বামদিকে OK দৈর্ঘ্য নিয়ে K বিন্দু চিহ্নিত করা যেতে পারবে। **<u>??</u>** $\frac{17}{5}$ সূচক বিন্দু হবে।

উদাহরণ-2 $\frac{3}{5}$ ও $\frac{8}{13}$র মধ্যে কোনটি বড়?

সমাধান $\frac{3}{5}$ ও $\frac{8}{13}$ সংখ্যাদ্বয়ের মধ্যে কোনটি বড় এটি নির্ণয় করতে হলে প্রথমে সংখ্যাদ্বয়ের হরকে সমান করা আবশ্যক। 5 ও 13 ল, সা, গু=65 $\therefore$ 65÷5=13, 65÷13=5

সুতরাং $\frac{3}{5}=\frac{3\times13}{5\times13}=\frac{39}{65}$ এবং $\frac{8}{13}=\frac{8\times5}{13\times5}=\frac{40}{65}$

$\frac{39}{65}$ ও $\frac{40}{65}$ সংখ্যাদ্বয় যথাক্রমে $\frac{3}{5}$ ও $\frac{8}{13}$ সহিত সমান। সংখ্যাদ্বয়কে সূচিত হওয়া বিন্দুদ্বয় মধ্যবর্তী রেখাখণ্ডকে সমান 65 ভাগ $\frac{39}{65}$ সংখ্যাটিকে সূচিত করা বিন্দুর ডানদিকে $\frac{40}{65}$ সংখ্যাটিকে সূচিত করে থাকা বিন্দুটি থাকবে। তাই $\frac{40}{65}>\frac{39}{65}$ অর্থাৎ $\frac{8}{3}>\frac{3}{5}$।

বি.দ্র. $\frac{a}{b}>\frac{c}{a}$ হবে যদি এবং যদি কেবল $ad>bc$ হবে। উপরোক্ত তথ্যকে ভিত্তি করে পরিমেয় সংখ্যাদ্বয় মধ্যে তুলনা সম্ভব।

2.10 দুটি পরিমেয় সংখ্যার মধ্যবর্তী পরিমেয় সংখ্যা

আমরা জানি 1 ও 5 গণনসংখ্যা দুটির মধ্যে 2, 3, 4 গণনসংখ্যাগুলি আছে। 7 ও 9 মধ্যে কেবল 8 একটি গণনসংখ্যা আছে। সেরকম -5 ও 4 মধ্যে থাকা পূর্ণসংখ্যাগুলি হল -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 এবং -1 ও 1 মধ্যে থাকা পূর্ণসংখ্যাটি (0) শূন্য। মাত্র -9 ও -10 মধ্যে কোনো পূর্ণসংখ্যা নেই। উপরোক্ত আলোচনা থেকে আমরা জানি যে ক্রমিক হয় না থাকা যে কোনো দুটি গণনসংখ্যা মধ্যে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যক গণনসংখ্যা বিদ্যমান। এসো দেখব পরিমেয় সংখ্যা ক্ষেত্রে এই সত্য কি না? বর্তমানে দেখা গেছে $\frac{3}{10}$ ও $\frac{7}{10}$ পরিমেয় সংখ্যা মধ্যে কয়টি পরিমেয় সংখ্যা।

প্রথম পরিস্থিতি

যদি $\frac{3}{10}<\frac{4}{10}<\frac{5}{10}<\frac{6}{10}<\frac{7}{10}$ তাই আমরা বলতে পারব $\frac{4}{10},\frac{5}{10}$ ও $\frac{6}{10}$ $\frac{3}{10}$ ও $\frac{7}{10}$ মধ্যবর্তী পরিমেয় সংখ্যা।

দ্বিতীয় পরিস্থিতি

পুনশ্চ $\frac{3}{10}=\frac{30}{100}$ লেখা থাকলে ও $\frac{7}{10}=\frac{70}{100}$ লিখলে।

$\frac{31}{100},\frac{32}{100}\cdots\frac{69}{100}$ ইত্যাদি পরিমেয় সংখ্যাগুলি মধ্য $\frac{3}{10}$ ও $\frac{7}{10}$ র মধ্যবর্তী পরিমেয় সংখ্যা হবে।

তৃতীয় পরিস্থিতি

যদি $\frac{3}{10}=\frac{3000}{10000}$ ও $\frac{7}{10}=\frac{7000}{10000}$ আকারের লেখা যায় তবে $\frac{3001}{10000},\frac{3002}{10000}\cdots\frac{6998}{10000},\frac{6999}{10000}$ পরিমেয় সংখ্যাগুলির মধ্য $\frac{3}{10}$ ও $\frac{7}{10}$ পরিমেয় সংখ্যাগুলির মধ্যবর্তী হবে।

উপরোক্ত পরিস্থিতিগুলিকে অনুধ্যান করালে আমরা জানি যে $\frac{3}{10}$ ও $\frac{7}{10}$ মধ্যে অধিকের অধিক পরিমেয় সংখ্যা ভর্তি করা যেতে পারবে। তাই এখানে স্পষ্ট অনুমান যে দুটি **নির্দিষ্ট পরিমেয় সংখ্যা অসংখ্য পরিমেয় সংখ্যা বিদ্যমান।**

উদাহরণ -3: 2 ও 0 ভিতরে থাকা তিনটি পরিমেয় সংখ্যা লেখ।

সমাধান-2 : $\frac{-20}{10}$ ও $0=\frac{0}{10}$ লিখলে $\frac{-19}{10},\frac{-18}{10}\cdots\frac{-10}{10},\frac{15}{10}\cdots\frac{-1}{10}$ ইত্যাদি পরিমেয় সংখ্যা -2 ও 0 মধ্যে থাকবে, এখানে যে কোনো তিনটিকে নিয়ে উত্তরটি লেখা হবে।

উদাহরণ-4 : $\frac{-5}{6}$ ও $\frac{5}{8}$ মধ্যে থাকা যে কোনো দশটি পরিমেয় সংখ্যা নির্ণয় করো।

সমাধান: প্রথমে $\frac{-5}{6}$ ও $\frac{5}{8}$ সংখ্যাদ্বয়কে সমান হর বিশিষ্ট পরিমেয় সংখ্যায় পরিণত করো।

যথা: $\frac{-5}{6}=\frac{-5\times4}{6\times4}=\frac{-20}{24}$ এবং $\frac{5}{8}=\frac{5\times3}{8\times3}=\frac{15}{24}$ এখানে

$\frac{-20}{24}<\frac{15}{24}(\because -20<15)\therefore \frac{-19}{24},\ \frac{-18}{24},\frac{-17}{24}\cdots\frac{14}{24}$

সংখ্যাগুলি $\frac{-5}{6}$ ও $\frac{5}{8}$ এর মধ্যবর্তী পরিমেয় সংখ্যা। সে জন্য যে কোনো দশটি নিতে পারবে।

বিকল্প সমাধান

যে কোনো দুটি অসমান পরিমেয় সংখ্যা মধ্যে একটি পরিমেয় সংখ্যা নির্ণয় জন্য সেই সংখ্যাদ্বয় হারাহারি স্থির করে। উক্ত হারাহারি আবশ্যক হয় থাকা একটি পরিমেয় সংখ্যা হয়ে যাবে।

উদাহরণ স্বরূপ: 1 ও 2-এর হারাহারি $\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$ যা 1 ও 2-এর মধ্যবর্তী পরিমেয় সংখ্যা।

এই উদাহরণ থেকে স্পষ্ট যে, যে কোনো দুটি পরিমেয় সংখ্যা মধ্যে একটি গণন সংখ্যা থাকতে না পারে মাত্র একটি পরিমেয় সংখ্যা থাকা সুনিশ্চিত।

উদাহরণ: $\therefore$ 5: $\frac{1}{4}$ ও $\frac{1}{2}$ মধ্যে থাকা একটি পরিমেয় সংখ্যা নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $\frac{1}{4}$ ও $\frac{1}{2}$-এর সমাধান

নির্ণেয় পরিমেয় সংখ্যা$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1+2}{4}\right]=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

$\frac{3}{8}$ একটি পরিমেয় সংখ্যা যা $\frac{1}{4}$ ও $\frac{1}{2}$ মধ্যে অবস্থিত। 2.7 রেখা সংখ্যারেখাতে দেখানো গেছে।

টীকা ঃ যদি a ও b দুটি পরিমেয় সংখ্যা হয় তবে $\frac{a+b}{2}$, a ও b মধ্যবর্তী একটি পরিমেয় সংখ্যা a<b হলে $a<\frac{a+b}{2}<b$ হবে।

এই ভাগাভাগি প্রক্রিয়াকে প্রয়োগ করে আমরা দুটি পরিমেয় সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য পরিমেয় সংখ্যা পাব।

উদাহরণ 6 ঃ $\frac{1}{4}$ ও $\frac{1}{2}$ মধ্যে থাকা তিনটি পরিমেয় সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান, প্রদত্ত পরিমেয় সংখ্যাদ্বয় হারাহারি $=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

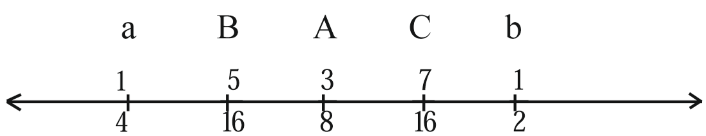
$\frac{3}{8}$, $\frac{1}{4}$ ও $\frac{1}{2}$ মধ্যে থাকা একটি পরিমেয় সংখ্যা। অর্থাৎ $\frac{1}{4}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$

বর্তমান $\frac{1}{4}$ ও $\frac{3}{8}$ র হারাহারি $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right]=\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{16}$ $\therefore\frac{1}{4}<\frac{5}{16}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$

পুনশ্চ $\frac{3}{8}$ ও $\frac{1}{2}$ হারাহারি $=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{16}$ $\therefore\frac{1}{4}<\frac{5}{16}<\frac{3}{8}<\frac{7}{16}<\frac{1}{2}$

তাই $\frac{5}{16},\frac{3}{8}$ ও $\frac{7}{16}$ তিনটি পরিমেয় সংখ্যা যা $\frac{1}{4}$ ও $\frac{1}{2}$ মধ্যবর্তী।

এটি সংখ্যা তিনটি সংখ্যারেখার B, A ও C নামে নামিত করা গিয়েছে।



চিত্র (2.8)

টীকা– হারাহারি সূত্র প্রয়োগ আমরা সংখ্যারেখার সূচিত যে কোনো পরিমেয় সংখ্যাদ্বয় মধ্যে অসংখ্য পরিমেয় সংখ্যা পাব।

অনুশীলনী- 2(b)

1. প্রদত্ত সংখ্যাগুলির সংখ্যারেখাকে সূচিত করো। (i) $\frac{7}{4}$ (ii) $\frac{-5}{6}$ (iii) $\frac{8}{3}$

2. $\frac{-2}{11}, \frac{-5}{11}, \frac{-9}{11}$ কে সংখ্যা রেখাতে দেখাও।

3. (i) 2 থেকে পাঁচটি ছোট পরিমেয় সংখ্যা লেখ।

   (ii) $\frac{3}{5}$ ও $\frac{3}{4}$ মধ্যে থাকা দশটি পরিমেয় সংখ্যা নির্ণয় করো।

4. (i) $\frac{-2}{5}$ ও $\frac{1}{2}$ মধ্যবর্তী দশটি পরিমেয় সংখ্যা নির্ণয় করো।

   (ii) -2 থেকে বড় পাঁচটি পরিমেয় সংখ্যা নির্ণয় করো।

5. নীচে দেওয়া সংখ্যাদের মধ্যে থাকা পাঁচটি করে পরিমেয় সংখ্যা নির্ণয় করো।

   (i) $\frac{2}{3}$ ও $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{-3}{2}$ ও $\frac{5}{3}$ (iii) $\frac{1}{4}$ ও $\frac{1}{2}$

6. নীচের সংখ্যা জোড়িদের থাকা বড় সংখ্যাটিকে স্থির করো।

   (i) $\frac{2}{3}$ ও $\frac{5}{7}$ (ii) $\frac{3}{4}$ ও $\frac{7}{9}$ (iii) $\frac{3}{7}$ ও $\frac{4}{11}$

2.11 সংখ্যা খেলা (Playing with Numbers) :

পূর্ব শ্রেণীতে স্বাভাবিক সংখ্যা পূর্ণসংখ্যা ও পরিমেয় সংখ্যাদের সম্বন্ধে আলোচনা করা গিয়েছে। উক্ত সংখ্যাদের সম্বন্ধীয় ধর্মগুলির মধ্যে সবিশেষ আলোচনা করা গিয়েছে। দশমিক সংখ্যা পদ্ধতিতে অন্তর্ভুক্ত সমস্ত সংখ্যার ব্যবধান অঙ্কসমূহ যথা- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 স্থানীয় মান অনুযায়ী সংখ্যা লিখন কীভাবে হয় তা মধ্য তোমরা আগের থেকে জান। এই অধ্যায় সংখ্যা লিখনসহ বিস্তারিত সংখ্যার রূপ সম্বন্ধীয় আলোচনা সাথে সংখ্যাদের নিয়ে বিভিন্ন প্রকারের খেলা সম্বন্ধ আলোচনা করব। পূর্ব শ্রেণীতে পড়ানো হয়ে থাকা সংখ্যার বিভাজ্যতা সম্পর্কেও কিছু অধিক আলোচনা এই অধ্যায়ের অন্য এক উদ্দেশ্য। এই অধ্যায় কতকগুলি সংরচনার অবতারণা করা যাবে। ছাত্রছাত্রীদের বোধ শক্তিকেও বাড়াতে প্রয়াস করা গিয়েছে।

2.12 সংখ্যার বিস্তারিত রূপ (General Form of Numbers) :

একটি সংখ্যার বিস্তারিত রূপ অথবা ব্যাপকরূপ বললে সংখ্যার অন্তর্ভুক্ত অঙ্কদের স্থানীয় মান অনুযায়ী সংখ্যার লিখনকে বোঝায়। উদাহরণ স্বরূপ: $52=5\times10+2\times1$, $135=1\times100+3\times10+5\times1$

সেরকম $496=4\times100+9\times10+6\times1$

মনে করো 'ab' একটি দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা। এর ব্যাপক করণটি $a\times10+b\times1=10\,a+b$ বর্তমান বলতে পারবে কী 'ba' ব্যাপক রূপটি কি? এখানে 'ab' কে $a\times b$ ভাবে নেওয়া যায়নি। সেরকম তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা abc-র ব্যাপক রূপটি 100+10b a+c
অনুরূপভাবে cba-র ব্যাপক রূপটি 100c+10b+a।

নিজে করো 1. নীচের সংখ্যাদের ব্যাপক রূপ লেখো।

(i) 25 (ii) 73 (iii) 569

2. নীচের কতকগুলি সংখ্যার ব্যাপকরূপকে দেখানো গেছে। সংখ্যাগুলি লেখো।

(i) $10\times5+6$ (ii) $100\times7+10\times1+8$ (iii) $10p+10q+r$

2.13 সংখ্যাকে নিয়ে খেলা (Game With Number) :

2.13.1 সংখ্যাকে নিয়ে খেলা

প্রথম খেলা : শরৎ সুনিতাকে একটি দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা ভাবতে বলল নীচে প্রকারের নির্দেশ দিতে লাগল।

1. যে কোনো একটি দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা ভাবো।	মনে করো সংখ্যাটি (49)
2. ভেবে থাকা সংখ্যাটির স্থান বিনিময় করো।	সংখ্যাটির স্থান বিনিময় করলে (94)
3. স্থান বিনিময় দ্বারা উক্ত সংখ্যাকে প্রথমে নিয়ে থাকা সংখ্যার সহিত মেশাও।	উৎপন্ন সংখ্যা সুনিতা ও পূর্ব সংখ্যার সমষ্টি (143)।
4. সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টিকে '11' দ্বারা ভাগ করে ভাগফল নির্ণয় করো।	সমষ্টিকে '11' দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল (13)।
5. দেখবে '11' দ্বারা ভাগ করার ফলে ভাগশেষ থাকবে না।	ভাগশেষ (0) শূন্য।

সুনিতা শরৎকে বলল ভাই তুমি কেমন করে জানলে যে এক্ষেত্রে ভাগশেষ কিছু থাকবে না? বর্তমান এসো এ খেলা সমাধান কৌশলটি কি বুঝব?

খেলায় ব্যবহৃত কৌশলের বিশ্লেষণ

মনে করো সংখ্যাটি ab, যার ব্যাপক রূপ 10 a+b সংখ্যার স্থান বিনিময় করার দ্বারা উৎপন্ন সংখ্যাটি ba হবে। যার ব্যাপক রূপ 10b+a হবে।

সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি = $10a+b+10b+a=10a+a=10a+a+10b+b=11a+11b=11(a+b)$

এখান থেকে স্পষ্ট জানা গেল যে সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি সবসময় '11' এর গুণিতক তাই সংখ্যা সমষ্টিকে সমান হবে। প্রথম খেলা থেকে স্পষ্ট হবে যে ভাগক্রিয়া ভাগফলটি 13 যা ভেবে থাকা সংখ্যা 49 অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি।

নিজে করো

প্রথম খেলাকে অনুসরণ করে নীচের সংখ্যাদের ক্ষেত্রে ভাগশেষ এবং ভাগফল কত থাকছে পরীক্ষা করে দেখো।

(i) 27 (ii) 39 (iii) 64 (iv) 78

দ্বিতীয় খেলা :

শরৎ আবার সুনিতাকে একটি দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা ভাবতে বলে নীচে প্রকারের নির্দেশ দিতে লাগল।

1.	যে কোনো একটি দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা ভাবো।	মনে করো সংখ্যাটি (29)
2.	ভেবে থাকা সংখ্যাটির স্থান বিনিময় করো।	সংখ্যাটির স্থান সুনিতা বিনিময় করল (92)
3.	স্থান বিনিময় দ্বারা উৎপন্ন সংখ্যাকে প্রথমে নিয়ে থাকা সংখ্যাদ্বয়ের অন্তরফল স্থির করো। (অন্তরফল ধনাত্মক হওয়া দরকার)।	সংখ্যার অন্তরফল নির্ণয় করো। (92-29=63)
4.	অন্তরফলকে 9 দ্বারা ভাগ করো।	অন্তরফলকে 9 দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল (7)
5.	দেখবে '9' দ্বারা ভাগ করার ফলে ভাগশেষ থাকবে না।	ভাগশেষ (0)

সুনিতা আবার শরৎকে বলল তুমি কী করে জানলে যে এ ক্ষেত্রে ভাগশেষ কিছু থাকবে না। বর্তমান এক্ষেত্রে খেলা সম্বন্ধীয় কৌশলটি বুঝব।

খেলাতে ব্যবহৃত কৌশলের বিশ্লেষণ :

মনে করো সংখ্যাটি ab যার ব্যাপক রূপ 10a+b। সংখ্যার স্থান বিনিময় করার দ্বারা উৎপন্ন সংখ্যাটি ba হবে। যার ব্যাপক রূপ 10b+a হবে।

সংখ্যাদ্বয়ের অন্তরফল $=(10b+a) - (10a+b)$ $(a<b)$

$=10b+a - 10a - b$

$=10b - b+a - 10a$

$=9b - 9a=9(b - a)$

যদি $a>b$ হয়ে থাকে অন্তরফল $9(a - b)$ হবে।

বিশ্লেষণ : $[(10a+b) - (10b+a)=(10a + b - 10b - a=10a - a+b - 10b=9a - 9b=9(a - b)]$

এখান থেকে স্পষ্ট জানা গেল যে সংখ্যাদ্বয়ের অন্তরফল সদাসর্বদা '9' র গুণিতক। তাই সংখ্যাদ্বয়ের অন্তরফলকে '9' দ্বারা ভাগকরলে ভাগশেষ থাকবে না।

লক্ষকর : সংখ্যাদ্বয়ের অন্তরফলকে '9' দ্বারা ভাগকরলে ভাগফল, ভেবেথাকা সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের অন্তরফল সহিত সমান হবে।

(i) $a<b$ হলে $b - a$ এবং (ii) $a>b$ হলে $a - b$ হবে।

দ্বিতীয় খেলা স্পষ্ট হবে যে ভাগ করার দ্বারা ভাগফলটি '7' যা ভাবে থাকা সংখ্যা 29-র অঙ্কদ্বয় অন্তরফল সহিত সময়।

নিজে করো : দ্বিতীয় খেলাকে অনুসরণ করে নিম্ন সংখ্যাদের ক্ষেত্রে ভাগশেষ এবং ভাগফল কত থাকছে পরীক্ষা করে দেখো। (i) 17 (ii) 21 (iii) 96 (iv) 37

2.13.2 তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যাকে নিয়ে খেলা

তৃতীয় খেলা বর্তমান সুনিতার পালা। সুনিতা শরৎকে একটি তিন অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা ভাবতে বলল এবং পরে নির্দেশ অনুযায়ী কার্য করতে বলল।

নির্দেশগুলি হল–		নির্দেশ অনুযায়ী শরৎ দ্বারা সম্পন্ন কার্য
(i) একটি তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা ভাবো।	(i)	(349)
(ii) সংখ্যাটিকে উলটো ক্রমে লেখো।	(ii)	(943)
(iii) বড় থেকে ছোট সংখ্যা বিয়োগ করো।	(iii)	(594) (943 - 349)=594
(iv) বিয়োগফলকে '99' দ্বারা ভাগ করে ভাগফল নির্ণয় করো।	(iv)	ভাগফল 594÷99=6 ভাগশেষ থাকছে না।

খেলার ব্যবহৃত কৌশলের বিশ্লেষণ

মনে করো সংখ্যাটি abc যার ব্যাপক রূপ $100a+10b+c(a>c)$ সংখ্যাটিকে উলটো ক্রমে লিখলে cba হবে। cba-র ব্যাপক রূপ হল $100c+10b+a$ হবে।

বড় সংখ্যা থেকে ছোট সংখ্যা বিয়োগ করলে পাব : $(100a + 10b+c) - (100c+10b+a)$

$$=100a +10b+c - 100c - 10b - a$$

$$=100a - a -100c+c=99a - 99c=99 (a - c)$$

যদি $c>a$ হয় তবে বিয়োগফল $99 (c - a)$ হবে।

এখানে স্পষ্ট জানলাম যে সংখ্যাদ্বয়ের বিয়োগফল '99' একটি গুণিতক, তাই সংখ্যাদ্বয়ের বিয়োগফলকে '99' দ্বারা ভাগ শেষ থাকবে না।

লক্ষ করো :

সংখ্যাদ্বয়ের বিয়োগফলকে '99' দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল শতক এবং একক স্থানীয় অঙ্কদ্বয়ের অন্তরফল সাথে সমান হবে।

উক্ত খেলা থেকে স্পষ্ট হবে যে ভাগ করার দ্বারা ভাগফল '6' যা ভেবে থাকা তিন অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা '349'র একক ও শতক স্থানীয় অঙ্কদ্বয়ের অন্তরফল সাথে সমান।

নিজে করো

তৃতীয় খেলাকে অনুসরণ করে নীচে সংখ্যাদের ক্ষেত্রে ভাগশেষ ও ভাগফল কত থাকছে পরীক্ষা করে দেখো।

(i) 132 (ii) 469 (iii) 543 (iv) 901

চতুর্থ খেলা :

বর্তমান শরতের পালা। শরৎ সুনিতাকে তিনটি অঙ্ক ভাবতে বলল এবং নির্দেশমতো কার্য করতে বলল।

নির্দেশসমূহ :

(i) তিনটি ভিন্ন অঙ্ক ভাবতে বলল।	(i) 2, 3 এবং 7
(ii) এ অঙ্ক ত্রয়কে নিয়ে তিনটি তিন অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করতে বলল। যেখানে অঙ্কগুলি গঠিত সংখ্যায় একবার মাত্র এক একটি স্থান নিবে। যথা অঙ্ক-এর যদি a, b, c হয়ে থাকে তবে abc, cab এবং bca	(ii) 237, 723, 372
(iii) সংখ্যা ত্রয়ের সমষ্টি স্থির করে যোগফল নির্ণয় করতে বলল।	(iii) 237+723+372=1332
(iv) সমষ্টিকে 37 দ্বারা ভাগ করতে বলল।	(iv) $1332 \div 37 = 36$
(v) দেখবে সংখ্যা ত্রয়ের সমষ্টিকে 37 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ থাকবে না।	(v) ভাগশেষ থাকছে না।

খেলায় ব্যবহৃত কৌশলের বিশ্লেষণ :

abc-র ব্যাপক রূপ 100a+10b+c

cab -র ব্যাপক রূপ 100c+10a+b এবং bca-র ব্যাপক রূপ 100b+10c+a।

সংখ্যাত্রয়ের সমষ্টি (100a+10b+c)+(100c+10b+b)+(100b+10c+a)

$$=(100a+10a+a)+(100b+10b+b)+(100c+10c+c)$$

$$=111a+111b+ 111c=111(a+b+c)=37\times3(a+b+c)$$

এখানে স্পষ্ট জানা গেল যে সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি সদাসর্বদা 37-র গুণিতক। তাই সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি 37 দ্বারা ভাগ ভাগশেষ থাকছে না।

লক্ষ করো :

সংখ্যা ত্রয়ের সমষ্টিকে '37' দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল ভেবে থাকা সংখ্যার অঙ্কত্রয়ের সমষ্টির 3 গুণ সহিত সমান হবে।

উক্ত খেলা স্পষ্ট হবে যে, ভাগ করা দ্বারা ভাগফলটি '36' যা অঙ্কত্রয়ের সমষ্টি 3 গুণ সহিত সমান।

প্রদত্ত সংরচনাকে দেখো এবং মনে রাখো।

$3\times37=111$	$12\times37=444$
$6\times37=222$	$15\times37=555$
$9\times37=333$	$18\times37=666$

নিজে করো

1. চতুর্থ খেলাকে অনুসরণ করে নিম্ন অঙ্কগুলির ক্ষেত্রে ভাগশেষ ও ভাগফল কত থাকছে পরীক্ষা করে দেখো। (i) 4, 1, 7 (ii) 6, 3, 2 (iii) 1, 2, 3 (iv) 9, 3, 7
2. নীচে সংরচনাগুলি দেখে অতি কমে পরবর্তী দুটি লাইন লেখো।

(a)
$7\times9=63$
$77\times99=7623$
$777\times999=776223$
$7777\times9999=77762223$

(b)
$2178\times4=8712$
$21978\times4=87912$
$219978\times4=879912$
$2199978\times4=8799912$

2.14 বিভাজ্যতা পরীক্ষা (Test of Divisibility) ::

পূর্ব শ্রেণীতে 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ইত্যাদি সংখ্যাদের জন্য বিভাজ্যতা কেমন পরীক্ষা করা যায়, তা তোমরা পড়েছ। অর্থাৎ কোনো সংখ্যা উক্ত সংখ্যাদের দ্বারা বিভাজ্য কি না তোমরা পরীক্ষা করে দেখে এসেছ। উপরোক্ত বিভাজ্যতা সম্বন্ধে অধিক আলোচনা এখানে করব।

2.14.1 সংখ্যা 10 দ্বারা বিভাজ্যতা (Divisibility by 10) :

কোনো সংখ্যা 10 গুণিতক হলে, সংখ্যাটি 10 দ্বারা বিভাজ্য হবে। এখানে কোনো সন্দেহ নেই। নীচের সংখ্যাগুলি লক্ষ করো। 10, 20, 30, 40, 50 আদি 10-র গুণিতক এবং এদের এক স্থানীয় অঙ্ক 0। তাই এখান থেকে স্পষ্ট জানা গেল যে কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক 0 হলে সংখ্যাটি 10-র গুণিতক হবে। সংখ্যাটি 10 দ্বারা বিভাজ্য হবে। বর্তমান উক্ত বিভাজ্যতা নিয়ম বুঝতে চেষ্টা করব।

cba মনে করো একটি সংখ্যা।

উক্ত সংখ্যার ব্যাপক রূপ ...+100c+10b+a হবে।

এখানে 'a' একক স্থানীয় অঙ্ক 'b' দশক স্থানীয় অঙ্ক এবং 'c' শতক স্থানীয় অঙ্ক।

10, 100 ইত্যাদি 10 দ্বারা বিভাজ্য হেতু 10b এবং 100c ও 10 দ্বারা বিভাজ্য। কিন্তু 'a' 10 দ্বারা বিভাজ্য হওয়া দরকার। এর জন্য a=0 হওয়া আবশ্যক। অর্থাৎ একক স্থানীয় অঙ্ক a, 0 হলে প্রদত্ত সংখ্যাটি '10' দ্বারা বিভাজিত হবে। তাই 10 দ্বারা বিভাজ্যতা নিয়মটি হল—কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক 0 হয়ে থাকলে প্রদত্ত সংখ্যাটি 10 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

নিজে করো : নিম্ন সংরচনাকে লক্ষ করে পরবর্তী দুটি লাইন লেখো।

(a)
$10=10^1$
$10\times10=100=10^2$
$10\times10\times10=1000=10^3$
$10\times10\times10\times10=10000=10^4$

(b)
$\frac{1}{10}=10^{-1}=0.1$
$\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=10^{-2}=0.01$
$\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=10^{-3}=0.001$
$\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=10^{-4}=0.0001$

2.14.2 সংখ্যা 5 দ্বারা বিভাজ্যতা :

5-এর গুণিতক সংখ্যাগুলি লক্ষ করো। সেগুলি হল 5, 19, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55...। সংখ্যাগুলি লক্ষ করলে দেখবে যে এগুলি একক স্থানীয় অঙ্ক 5 কিন্তু 015 এবং 0 ব্যতীত অন্য কোনো সংখ্যা নেই।

তাই বিভাজ্যতা নিয়মটি হল—

কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক 0 কিংবা 5 হয়ে থাকলে সংখ্যাটি 5 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

বর্তমান উক্ত বিভাজ্যতা নিয়মের অবতারণা কেন? এসো বুঝব।

পূর্বের মতন cab একটি সংখ্যা। যার ব্যাপক রূপটি 100c+10b+a। এখানে 10c,100c ইত্যাদি 5 দ্বারা বিভাজ্য কারণ 5-এর গুণিতক 10 ও 100। প্রদত্ত সংখ্যাটি 5 দ্বারা বিভাজ্য হতে হলে a মধ্য 5 দ্বারা বিভাজিত হওয়া দরকার। তাই a মান 0 কিংবা 5 হওয়া দরকার।

2.14.3 সংখ্যা '2' দ্বারা বিভাজ্যতা (Divisibility by 2 :

'2' -র গুণিতক (যুগ্ম সংখ্যা)গুলি লক্ষ করো।

কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক যদি 0, 2, 4, 6 কিংবা 8 হয়ে থাকে তবে সংখ্যাটি '2' দ্বারা বিভাজ্য। অন্য প্রকারে বলতে গেলে

যুগ্ম সংখ্যাটি 2 দ্বারা বিভাজ্য।

বর্তমান উক্ত বিভাজ্যতা নিয়ম অবতারণা করা যাবে।

পূর্ব উদাহরণ মতো cba একটি সংখ্যা তবে এর ব্যাপক রূপ +100c+10b+a। প্রথম দুটি পদ 100 এবং 10b প্রত্যেক 2 দ্বারা বিভাজ্য কারণ 100 এবং 2 দ্বারা বিভাজ্য। এখানে প্রদত্ত সংখ্যাটি 2 দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি 'a' '2' দ্বারা বিভাজ্য হয়।

এটি কেবল সম্ভব যদি a=0, 2, 4, 6 কিংবা 8 হবে।

2.14.4 সংখ্যা '9' এবং 3 দ্বারা বিভাজ্যতা (Divisibility by 9 and 3) :

10, 5, 2 দ্বারা বিভাজ্যতা পরীক্ষা। সংখ্যার কেবল একক স্থানীয় অঙ্ক উপরে নির্ভর করে থাকে। অর্থাৎ 10, 5, 2 বিভাজ্যতা পরীক্ষার জন্য সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ককে ছেড়ে অন্য অঙ্কগুলি আবশ্যকতা পড়ে থাকে না। কিন্তু 9 কিংবা 3 দ্বারা বিভাজ্যতা পরীক্ষার জন্য সংখ্যার থাকা প্রত্যেক অঙ্কর আবশ্যকতা পড়ে থাকে। 9 এবং 3 দ্বারা বিভাজ্যতা নিয়মকে জেনে ফেলো।

বিভাজ্য নিয়মটি হল।

(i) কোনো সংখ্যার অঙ্কদের সমষ্টি 9 দ্বারা বিভাজ্য হলে সংখ্যাটি 9 দ্বারা বিভাজ্য হবে। অন্যথা সংখ্যাটি 9 দ্বারা বিভাজ্য হবে না।

(ii) কোনো সংখ্যার অঙ্কদের সমষ্টি 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে সংখ্যাটি 3 দ্বারা বিভাজ্য হবে। অন্যথা 3 দ্বারা বিভাজ্য হবে না।

উক্ত বিভাজ্যতা সূত্রের অবতারণা কেন হয়েছে এসো তাকে বুঝতে চেষ্টা করব।

বিশ্লেষণ : মনে করো সংখ্যাটি cba।

c b a সংখ্যার ব্যাপক রূপ = 100c+10b+a
=(99c+c)+(9b+b)+a = 99c+9b+(a+b+c) = 9 (11c+b)+(a+b+c)

এখানে cba সংখ্যার ব্যাপক রূপের রূপান্তরে সৃষ্টি হয়ে থাকা 9 (11c+b) পদটি '9' দ্বারা বিভাজ্য। যদি (a+b+c) অর্থাৎ সংখ্যার অঙ্কত্রয়ের সমষ্টি 9 দ্বারা (কিংবা 3 দ্বারা) বিভাজ্য হবে। তবে cba সংখ্যাটি 9 (কিংবা 3 দ্বারা) বিভাজ্য হবে।

এসো একটি উদাহরণ মাধ্যমে উক্ত বিভাজ্যতাকে বুঝতে চেষ্টা করব।

উদাহরণ-7 : '3573' সংখ্যাটি '9' দ্বারা বিভাজ্য কি না পরীক্ষা করব।

সমাধান: 3573-র ব্যাপক রূপ $=3\times1000+5\times100+7\times10+3\times1$

$$=3\ (999+1) + 5\ (99+1) +7\ (9+1)+3\times1$$
$$=3\times999+5\times99+7\times9+ (3+5+7+3)$$
$$=9\ (3\times111+5\times11+7)+(3+5+7+3)$$

এখানে স্পষ্ট জানা যাচ্ছে যে সংখ্যার অঙ্কগুলির সমষ্টি (3+5+7+3=18), 9 কিংবা 3 দ্বারা বিভাজ্য অর্থাৎ 35739 কিংবা 3 দ্বারা বিভাজিত হবে।

উদাহরণ- 8 : 3576 সংখ্যাটি 9 কিংবা 3 দ্বারা বিভাজ্যতা পরীক্ষা করো।

সমাধান: $3576=(3\times1000)+5\times100+7\times10+6$

$$=3\ (999+1)+5\ (99+1)+7\ (9+1)+6$$
$$=3\times999+5\times99+7\times9+(3+5+7+6)$$

এখানে (3+5+7+6) অর্থাৎ '21' 9 দ্বারা বিভাজ্য নয় কিন্তু 3 দ্বারা বিভাজ্য। তাই সংখ্যা 3576 কেবল 3 দ্বারা বিভাজ্য।

টীকা: 9 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা মধ্য 3 দ্বারা বিভাজ্য। কারণ 3 এর 9 একটি গুণিতক। কিন্তু 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা 9 দ্বারা বিভাজ্য হতে পারে না।

নিজে করো

1. 9-র বিভাজ্যতা নিয়মকে আধার করে নীচে সংখ্যাগুলি '9' দ্বারা বিভাজ্যতাকে পরীক্ষা করো।

(i) 108 (ii) 616 (iii) 294 (iv) 432 (v) 927

2. 3 দ্বারা বিভাজিত নিয়মকে আধার করে নিম্ন সংখ্যাগুলি 3 দ্বারা বিভাজ্যতাকে পরীক্ষা করো। নিম্ন সংখ্যা মধ্যে কোনগুলি উভয় 3 এবং 9 দ্বারা বিভাজ্য।

(i) 117 (ii) 213 (iii) 1735 (iv) 52722 (v) 317424 (vi) 63171423

2.14.5 সংখ্যা 11 দ্বারা বিভাজ্যতা (Divisibility by 11) :

'11' দ্বারা বিভাজ্যতা নিয়মকে জেনে নেব। বিভাজ্যতা নিয়মটি হল—

কোনো সংখ্যার যুগ্ম স্থানীয় এবং অযুগ্ম স্থানীয় অঙ্কগুলির সমষ্টির অন্তর যদি 11 দ্বারা বিভাজ্য হয়।

উক্ত নিয়মের অবতারণা উদ্দেশ্যে সংক্ষেপে আলোচনা করব।

(i) একটি তিন অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা cba-র সমাধান রূপ

$$=100c+10b+a$$
$$= 99c+c+11b - b+a = (99c+11b)+(c - b+a)$$
$$=11(9c+b)+(a+c - b)$$

যদি cba সংখ্যাটি ‘11’ দ্বারা বিভাজ্য হবে তবে (a+c - b) সম্পর্কে কী বলা যাবে ভেবে দেখো।

(ii) মনে করো dcba একটি চার অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা।

dcba-র ব্যাপক রূপ $=1000d+100c+10b+a$

$=1001d - d+99c+c+11b - b+a$

$=1001d+99c+11b+\{(a+b) - (b+d)\}$

$=11(91d+9c+b)+\{(a+c) - (b+d)\}$

যদি প্রদত্ত সংখ্যাটি 11 দ্বারা বিভাজ্য হবে তবে $\{(a+c) - (b+d)\}$ সম্পর্কে কী বলা যাবে পরে ভেবে দেখো।

বর্তমান (i) ও (ii) বিশ্লেষণ পাবো। **কোনো সংখ্যার যুগ্ম স্থানীয় অঙ্কদের সমষ্টি এবং অযুগ্ম স্থানীয় অঙ্কদের সমষ্টি অন্তর 11 দ্বারা বিভাজ্য হলে সংখ্যাটি ‘11’ দ্বারা বিভাজ্য হবে।**

উদাহরণ - 9 : 1309 সংখ্যাটি 11 দ্বারা বিভাজ্য কি না পরীক্ষা করে দেখব।

সমাধান: 1309 সংখ্যার যুগ্ম স্থানীয় অঙ্কদের সমষ্টি

বাম থেকে দ্বিতীয় ও চতুর্থ স্থানে অঙ্কদের সমষ্টি 3+9=12।

অযুগ্ম স্থানীয় অঙ্কদের সমষ্টি বাম থেকে প্রথম ও তৃতীয় স্থান অঙ্কদের সমষ্টি 1+0=1

এখানে প্রাপ্ত সমষ্টি দ্বয়ের অন্তরফল 12 - 1=11 যা 11 দ্বারা

$\therefore$ 11 দ্বারা বিভাজ্য।

উদাহরণ-10 : 3521745238 সংখ্যাটি ‘11’ দ্বারা বিভাজ্য কি না পরীক্ষা করে দেখো।

সমাধান: 3521745238 সংখ্যার যুগ্ম স্থানীয় অঙ্কদের সমষ্টি (5+1+4+2+8) = 20

এবং অযুগ্ম স্থানীয় অঙ্কদের সমষ্টি = (3+2+7+5+3)=20

সমষ্টি দ্বয়ের অন্তরফল = 20 - 20 = 0

যা 11 দ্বারা বিভাজ্য তাই সংখ্যাটি 11 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

নিজে করো

1. 11 দ্বারা বিভাজ্য নিয়মকে আধার করে নিম্ন সংখ্যাগুলি 11 দ্বারা বিভাজ্যতাকে পরীক্ষা করো।

(i) 1331, (ii) 14641, (iii) 132055, (iv) 2354012, (v) 2573439

2. নিম্ন সংরচনাকে দেখে পরবর্তী লাইন লেখো।

$11=11$	$1+1=2^1$
$11\times 11=121$	$1+2+1=2^2$
$11\times 11\times 11=1331$	$1+3+3+1=2^3$

টীকা : (i) উৎপন্ন সংখ্যাগুলি উলটে লিখলে মধ্য সংখ্যাটি অপরিবর্তিত থাকবে।

(ii) গুণফলের অঙ্কদের সমষ্টি যথাক্রমে 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 ইত্যাদি হবে।

অনুশীলনী -2 (c)

1. নিম্ন সংরচনাগুলি দেখে পরবর্তী দুটি লাইন লেখো।

(a)
$1 \times 9 + 1 = 10$
$12 \times 9 + 2 = 110$
$123 \times 9 + 3 = 1110$

(b)
$1 \times 8 + 1 = 9$
$12 \times 8 + 2 = 98$
$123 \times 8 + 3 = 987$

(c)
$6 \times 11 = 66$
$89 \times 101 = 8989$
$706 \times 1001 = 706706$

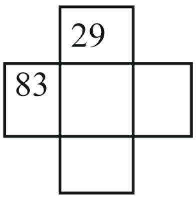
(d)
$1+2=3$
$4+5+6=7+8$
$9+10+11+12=13+14+15$

(e)
1
11
121
1331
14641

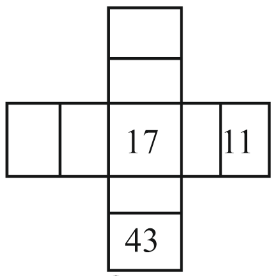
(f)
$2^2 - 1^2 = 2+1 = 3$
$3^2 - 2^2 = 3+2 = 5$
$4^2 - 3^2 = 4+3 = 7$
$5^2 - 4^2 = 5+4 = 9$
$6^2 - 5^2 = 6+5+11$

2. নিম্ন শূন্যস্থানগুলি দুই অঙ্কবিশিষ্ট মৌলিক সংখ্যা দ্বারা পূরণ করো যেমন যেখান থেকে মিশালে যোগফল (i) 123 হবে (চিত্র -1) ও

(ii) 161 হবে (চিত্র -2)



(চিত্র -1)



(চিত্র -2)

3. নিম্ন প্রশ্নদের প্রত্যেক অক্ষরের জন্য এক একটি (0 থেকে 9) অঙ্ক বাছ যেমন প্রদত্ত শর্তগুলি সত্যতা নিরূপণ করো। কোন অঙ্কের জন্য কোন অক্ষর ব্যবহার করলে লেখো।

(i) $xy = yx$

(ii) $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z} = 1$

(iii) $A \times C \times AC = CCC$

(iv) $ABCD \times 9 = DCBA$

(v) $AB + BA = P\ (A+B)$

(vi) $AB - BA = P\ (A - B)\ (A > B)$

(vii) $ABC + BCA + CAB = 111\ (A+B+C)$

(viii) $ABC - CBA = 99\ (A - C)$

বি.দ্র. উপরের প্রশ্নগুলির সমাধানের জন্য নির্দিষ্টভাবে কোনো সূত্র নেই। ছাত্রছাত্রীদের নিজের বোধশক্তি দ্বারা সমাধান করতে হবে।

4.(a) নীচের কোন সংখ্যাগুলি 2 দ্বারা বিভাজ্য।

24, 127, 210, 86, 95, 437, 251.

(b) নীচের কোন সংখ্যাগুলি 5 দ্বারা বিভাজ্য এবং কোনগুলি 2 ও 3 উভয় দ্বারা বিভাজ্য।

105, 214, 420, 235, 930, 715

(c) নীচের কোন সংখ্যাগুলি 3 দ্বারা বিভাজ্য এবং কোনগুলি 2 ও 3 উভয় দ্বারা বিভাজ্য।

78, 403, 504, 917, 235, 216, 774, 804

(d) নীচের কোন সংখ্যাগুলি 3 দ্বারা বিভাজ্য এবং 9 দ্বারা বিভাজ্য নয়।

702, 501, 213, 102, 675, 462

5. তারকাচিহ্নিত (*) শূন্যস্থানগুলি কোনো ক্ষুদ্রতম অঙ্ক দ্বারা পূরণ করুন। সংখ্যাটি

(i) 3 দ্বারা (ii) 9 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

(a) 7*5, (b) 3*2, (c) 17* (d) 14*, (e) 2*2

6. নীচের উক্তিগুলির মধ্যে ঠিক উত্তরটি বেছে লেখো।

(i) 9 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা 3 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

(ii) 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা 9 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

(iii) 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা 6 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

(iv) 10 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা 5 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

(v) 6 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা 2 ও 3 উভয় দ্বারা বিভাজ্য হবে।

7. নীচের উক্তিগুলির মধ্যে ঠিক উত্তরটি বেছে লেখো।

(i) 710, 10 দ্বারা বিভাজ্য কিন্তু 5 দ্বারা বিভাজ্য নয়।

(ii) 105, 3 ও 5 উভয় দ্বারা বিভাজ্য।

(iii) 897, 3 দ্বারা বিভাজ্য নয় কিন্তু 9 দ্বারা বিভাজ্য।

(iv) 14641 সংখ্যাটি 11 দ্বারা বিভাজ্য।

(v) 432 সংখ্যাটি 3, 6 ও 9 দ্বারা বিভাজ্য।

⌘⌘⌘⌘⌘

বীজগাণিতিক পরিপ্রকাশ ও অভেদ
(ALGEBRIC EXPRESSIONS & IDENTITIES)

অধ্যায় ৩

3.1 উপক্রমণিকা (Introduction) :

পূর্ব শ্রেণীতে তোমরা কতকগুলি বীজগাণিতিক পরিপ্রকাশ পড়েছ। অথচ এদের মধ্যে বিভিন্ন প্রক্রিয়া যথা, যোগ, বিয়োগ, গুণ, আদি কেমন সংঘটিত হয়ে থাকে তার ধারণা পেয়েছে। বীজগাণিতিক পরিপ্রকাশে কতকগুলি অক্ষর সংকেত **(literals)** ব্যবহৃত হয় সেগুলিকে চলরাশি **(Variables)** বলে। কেবল একটিমাত্র চলরাশি থেকে বীজগাণিতিক পরিপ্রকাশগুলির মধ্যে বিভিন্ন প্রক্রিয়া কেমন সংগঠিত হয়ে থাকে তা জানো। এই পরিপ্রকাশ পলিনোমিয়াস থেকে কেমন ভিন্ন সে বিষয়ে আলোচনা এ অধ্যায়ে মুখ্য উদ্দেশ্য। এর সহিত পলিনোমিয়াল ক্ষেত্র বিভিন্ন প্রক্রিয়া কেমন সংগঠিত হয় সে বিষয়ের মধ্যে আমরা আলোচনা করব।

3.2 পলিনোমিয়াল (Polynominal) :

আক্ষরিক সংকেত (যথা x, y, z...a, b, c... ইত্যাদি) দ্বারা যে কোনো পরিপ্রকাশ মাধ্যমে বীজগাণিতিক তত্ত্বকে পরিবেশন করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ " X ও Y দুটি গণন সংখ্যা হলে X+Y মধ্য এক গণন সংখ্যা " ।

এখানে X ও Y যে কোনো গণন সংখ্যা মানের জন্য উপরোক্ত উক্তিটি প্রযোজ্য।

এখানে " X ও Y দুটি গণন সংখ্যা X+Y একটি গণন সংখ্যা "। এটি একটি বীজগাণিতিক তত্ত্ব।

X+Y হচ্ছে বীজগাণিতিক পরিপ্রকাশ X ও Y হচ্ছে গণন সংখ্যা জন্য ব্যবহৃত আক্ষরিক সংকেত (literal) (তুমি সপ্তম শ্রেণীতে পড়ে থাকা) কতকগুলি বীজগাণিতিক পরিপ্রকাশ উদাহরণ হল—

(i) $3x$ (ii) $2x+3$ (iii) $5x^2 - 2x - 3$ (iv) x^4+3x^2-9x+5

এখানে লক্ষ করো (a) প্রদত্ত বীজগাণিতিক পরিপ্রকাশগুলিতে কেবল একটি চলরাশি X আছে।

(b) পরিপ্রকাশগুলি থাকা চলরাশি x-র ঘাত অঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। অর্থাৎ কোনো ক্ষেত্র ঘাতগুলি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা না।

(0, 1, 2, 3... ইত্যাদিকে অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বলা যায়। উক্ত সংখ্যা সমূহকে সংপ্রসারিত স্বাভাবিক সংখ্যা বলা যায়।

(c), (i), (ii), (iii) ও (iv) রেখা প্রদত্ত পরিপ্রকাশগুলি পদসংখ্যা যথাক্রমে 1, 2, 3 এবং 4। তাই সেগুলি যথাক্রমে একপদ, দুইপদ, তিনপদ ও চারপদ বিশিষ্ট বহুপদ রাশি পরিপ্রকাশ বলব।

বর্তমানে এসো দেখব নীচের পরিপ্রকাশগুলি উপরে দেওয়া যাওয়া পরিপ্রকাশ থেকে কেমন ভিন্ন।

(i) $6+2x^2+x^2$ (ii) $x+x^{-1}$ (iii) $2x^2+x^{\frac{-1}{3}}+4$

এখানে লক্ষ করো যে প্রত্যেক পরিপ্রকাশে কিছু ঋণাত্মক অথবা ভগ্নসংখ্যা ঘাতঙ্ক বিশিষ্ট পদ আছে। যথা (1) এ মধ্যম পদটি $2x^2$ (2) এ দ্বিতীয় পদটি x^{-1} এবং (3) এ মধ্যম পদটি $x^{\frac{-1}{3}}$ কিন্তু (i), (ii), (iii), (iv) পরিপ্রকাশে (বহুপদ রাশি) চলরাশি x -র ঘাতঙ্ক ঋণাত্মক অথবা ভগ্ন সংখ্যা না।

তবে আমরা (1) (2) ও (3) পরিপ্রকাশগুলি কে (i), (ii), (iii), (iv) পরিপ্রকাশগুলি থেকে কেমন ভিন্ন উপায়ে প্রকাশ করতে পারব?

এখানে মনে রাখব যে (i), (ii), (iii), (iv), এবং (1), (2), (3) এরা প্রত্যেকে একটি একটি বীজগাণিতিক পরিপ্রকাশ। কিন্তু পৃথক করে প্রকাশ করা জন্যে (i) (ii) (iii) ও (iv) পরিপ্রকাশগুলি আলাদাভাবে নামকরণ করব যাকে পলিনোমিয়াল বলব।

সংজ্ঞা—যে বীজগাণিতিক পরিপ্রকাশগুলি চলরাশির ঘাতঙ্ক অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা সেগুলিকে পলিনোমিয়াল (Polynominal) বলা যায়।

লক্ষ করো নীচে প্রদত্ত উদাহরণগুলি কেবল একটি মাত্র চলরাশি x আছে। এগুলি 'X' এক একটি পলিনোমিয়াল বলা যায়।

(i) $3x$, (ii) $2x+3$ (iii) $5x^2-2x-3$ (iv) x^4+3x^2-9x+5

বিদ্র: একটি চলরাশি বিশিষ্ট পলিনোমিয়াল এর আলোচনা কেবল এই অধ্যায়েতে হবে।

3.2.1 পলিনোমিয়ালের ঘাত

পলিনোমিয়ালে থাকা চলরাশি (x) -র উচ্চতম ঘাতঙ্কগুলিকে প্রদত্ত পলিনোমিয়ালের ঘাত বলা যায়।

প্রকাশ থাক পলিনোমিয়াল উচ্চতম ঘাতঙ্ক বিশিষ্ট পদের সহিত অনশূন্য হওয়া আবশ্যক।

লক্ষ করো (i) (ii) পলিনোমিয়াল ঘাত। থাকা সময় (iii) ও (iv) প্রদত্ত পলিনোমিয়াল ঘাত যথাক্রমে 2 ও 4।

নিজে করো

(i) $x+1$ একটি একঘাতী পলিনোমিয়াল একে $0.x^2+x+1$ আকারে লিখলে এর ঘাত কত হবে?

2. x^2+x+1 কে $0.x^3+x^2+x+1$ আকারে লিখলে এটি একটি তিনঘাতী পলিনোমিয়াল হবে কি?

নিম্ন উদাহরণটি লক্ষ কর

উদাহরণ-1 নিম্ন পলিনোমিয়ালদের ঘাত স্থির করো।

(i) $5x^2+13x-9$ (ii) y^2+17y (iii) $2p+3$ (iv) -5

সমাধান: (i) $5x^2+13x-9$-র ঘাত 2।

তাই একে **দ্বিঘাতী পলিনোমিয়াল (Second degree Polynominal)** বলা যায়।

(ii) y^3+17y-র ঘাত 3। তাই একে একটি ত্রিঘাতী **(Third degree Polynominal)** পলিনোমিয়াল বলে।

(iii) $2p+3$-র ঘাত 1। তাই একে একঘাতী **(First degree অথবা Linear Polynominal)**পলিনোমিয়াল বলে।

(iv) -5 এক পলিনোমিয়াল -5 একটি শূন্যঘাতী পলিনোমিয়াল।

টীকা (1) যে কোনো অনশূন্য পরিমেয় সংখ্যা একটি 0 ঘাত বিশিষ্ট পলিনোমিয়াল হতে পারবে। একে **ধ্রুব পলিনোমিয়াল (Constant Polynominal)** বলে।

(2) সংক্ষেপে দুটি ঘাতী পলিনোমিয়ালকে Quadratic Polynimial, তিনঘাতী পলিনোমিয়ালকে Cubic Polynimial,এবং চারঘাতী পলিনোমিয়ালকে Biquardratic অথবা Quatric Polynimial বলা যায়।

3.2.2 পলিনোমিয়ালের পদ

পলিনোমিয়াল প্রত্যেক পদকে মনোমিয়াল (Monomial) বলা যায়। পলিনোমিয়াল যদি একপদী হয়ে থাকে তবে একে মনোমিয়াল বলা যায়। সেরকম পলিনোমিয়াল, দুটি মনোমিয়ালকে নিয়ে গঠিত হয়ে থাকলে তাকে দ্বিপদী পলিনোমিয়াল (Binomial) বলে এবং তিন সংখ্যক মনোমিয়াল থেকে অধিক হলে তাকে কেবল পলিনোমিয়াল বলব।

3.2.3 মনোমিয়ালের সহগ

x^2-2x-3 একটি পলিনোমিয়াল। এর প্রত্যেক পদ এক একটি মনোমিয়াল। পদগুলির মধ্যে কয়েকটি উৎপাদক (Factor) গুণফল হতে পারে। কোনো পদের সংখ্যা উৎপাদকটিকে উক্ত পদের সহন বলা যায়। এখানে $x^2=1\times x2$ এবং $-2x=-2\times x$ তাই x^2 সাংখ্যিক সহন। এবং -2x-র সংখ্যক সহন -2 প্রদত্ত পলিনোমিয়াল তৃতীয়পদ -3।

$-3=-3\times x^0$ তাই $-3x^0$ সহগ বা -3 একটি ধ্রুবক বলতে পারব।

নিজে করো

1. $2x-5$ ও $3x^2-2x+7$ পলিনোমিয়াল থাকা পদগুলির সহগগুলি স্থির করো।

2. দুটি করে দ্বিপদী এবং ত্রিপদী পলিনোমিয়াল নিয়ে, তাদের পদসংখ্যা, ঘাত এবং প্রত্যেক পদের সাংখ্যিক সহনগুলি লেখো।

3.2.4 সদৃশ পদ (Like Monominals) :

যদি একটি চলরাশি দ্বারা গঠিত দুটি মনোমিয়াল বা একাধিক মনোমিয়াল সমান ঘাতবিশিষ্ট হয় তবে তাদেরকে সদৃশ মনোমিয়াল বা সদৃশ পদ বলা যায়। উদাহরণস্বরূপ 2x, 9x, -5x ইত্যাদি সদৃশ মনোমিয়াল।

সেরকম $-3x^2$, x^2, $7x^2$ ইত্যাদি মধ্য সদৃশ মনোমিয়াল আছে। মাত্র 2x, 3y, 5z ইত্যাদি সদৃশ পদ না।

টীকা-(1) আমাদের আলোচনা কেবল একটি চলরাশি বিশিষ্ট পলিনোমিয়াল ক্ষেত্র সীমিত হবে।

(2) পলিনোমিয়াল চলরাশি বললে পলিনোমিয়াল অজ্ঞাত রাশিকে বোঝায়।

3.3 পলিনোমিয়ালের যোগ

সদৃশ পলিনোমিয়াল যোগ। নীচের উদাহরণকে দেখো।

(i) $2x+3x=(2+3)x=5x$

(ii) $\frac{2x^2}{5}+3x^2=\left(\frac{2}{5}+3\right)x^2=\frac{17}{5}x^2$

যোগ সম্বন্ধে কয়েকটি জানা কথা।

(i) বণ্টন নিয়ম ব্যবহার করে সদৃশ পদদের যোগফল নির্ণয় করা যায়।

(ii) যে কোনো দুটি পলিনোমিয়াল যোগফল নির্ণয় করার জন্য সাদৃশ্য পদগুলি একসাথে করে যোগ করা যায়।

(iii) যোগ প্রক্রিয়ার সুবিধার জন্য প্রথমে পলিনোমিয়াল পদগুলির চলরাশির ঘাত অনুযায়ী লেখা যায়।

উদাহরণ- 2 : যোগফল নির্ণয় কর $(7x+8x^2+10)$ এবং $(3x^2+4x+30)$

সমাধান :

(i) লাইন প্রণালী: এই প্রণালীতে প্রত্যেক পলিনোমিয়াল পদগুলি বড় থেকে ছোট ক্রমে লিখে যোগ করা যায়।

নির্ণেয় যোগফল $=(7x+8x^2+10)+(3x^2+4x+30)$

$=(8x^2+7x+10)+(3x^2+4x+30)$

$=(8x^2+3x^2)+(7x+4x)+(10+30)$ সাদৃশ্যপদ একসংখ্যা

$=(8+3)x^2+(7+4)x+(10+30)$ বণ্টন নিয়ম

$=11x^2+11x+40$

(ii) স্তম্ভ প্রণালী: এই প্রণালীতে যোগ প্রক্রিয়াকে লাইনে না লিখলে স্তম্ভ আকারে লিখে যোগ করা যায়।

প্রথম: $8x^2+7x+10$

দ্বিতীয়: $3x^2+4x+30$

নির্ণেয় যোগফল$=(8+3)x^2+(7+4)x+(10+30)=11x^2+11x+40$

উদাহরণ-3 যোগফল নির্ণয় করো: $(2x^2-3+5x)$ $(6-2x-x^2)$ এবং $(5x+3x^2-4)$

সমাধান: লাইন প্রণালী

নির্ণেয় যোগফল $=(2x^2-3+5x)+(6-2x-x^2)+(5x+3x^2-4)$

$=(2x^2+5x-3)+(-x^2-2x+6)+(3x^2+5x-4)$

$=(2x^2-x^2+3x^2)+(5x-2x+5x)+(-3+6-4)$

$=(2-1+3)x^2+(5-2+5)x+(-3+6-4)=4x^2+8x-1$

স্তম্ভ প্রণালী প্রথম $2x^2+5x-3$

দ্বিতীয় $-x^2-2x+6$

তৃতীয় $3x^2+5x-4$

নির্ণেয় যোগফল $=(2-1+3)x^2+(5-2+5)x+(-3+6-4)=4x^2+8x-1$

উদাহরণ-4 যোগফল নির্ণয় করো।

$(3x^3-4x+7)$, $(4-3x^2+8x+4x^3)$ এবং $(7x^3-2x^2+9)$

সমাধান : লাইন প্রণালী

নির্ণেয় যোগফল $=(3x^3-4x+7)+(4-3x^2+8x+4x^3)+(7x^3-2x^2+9)$

$=(3x^3-4x+7)+(4x^3-3x^2+8x+4)+(7x^3-2x^2+9)$

$=(3x^3-4x^3+7x^3)+(-3x^2-2x^2)+(-4x+8x)+(7+4+9)$

$=(3+4+7)x^3+(-3-2)x^2+(-4+8)x+(7+4+9)$

$=14x^3-5x^2+4x+20$

স্তম্ভ প্রণালী $3x^3-\ 0.x^2-4x+7$ (x^2 কে 0 নেওয়া গেল)

$4x^3-3x^2+8x+4$

$7x^3-2x^2+0x+9$ (x কে সহনকে 0)

নির্ণেয় যোগফল $=(3+4+7)x^3+(-3-2)x^2+(-4+8)x+(7+4+9)$

$=14x^3-5x^2+4x+20$

অনুশীলনী- 3 (a)

1. শূন্যস্থান পূরণ করো

(i) $3x+2x=(3+.....)x = ...$ (ii) $5x+7x = (.....+7)x = ...$

(iii) $-6x+4x=\{(....)+(.....)\}x = ...$ (iv) $-2x-3x = \{(....)+(....)x\} = ...$

(v) $x-2x=\{(....)+(....)\}x = ...$

2. যোগফল নির্ণয় করো।

(i) $4x$ ও $3x$ (ii) $2x$ ও $-3x$ (iii) $3x^3$ ও $-2x^3$ (iv) $-5x^2$ ও $2x^2$

(v) $4x$ ও -4 (vi) $2x^2+3$ ও x^2-1 (vii) x^2+1 ও $x-1$ (viii) x^2+3+2x ও $x+1$

3. শূন্যস্থান পূরণ করো।

(i) $3x+2x=(—)$ (ii) $(—)+x=8x$

(iii) $2x+(—)=6x$ (iv) $3x+4x=4x+(—)$

(v) $2x+5x=(—)+2x=(—)$ (vi) $2x+5y+2=(—)+z=(2x+z)+(—)$

4. যোগফল নির্ণয় করো।

(i) $2x, 3x, 5x$ (ii) $5x^2, x^2, 3x^2$

(iii) $2x^3, 3x^3, 4x^3$ (iv) $3x^2+2x$ ও x^2+3x

(v) x^3+3 ও $4-x^2+x$ (vi) $2x^2+x-2$ ও $x+2$

(vii) $5-2x+x^2$ ও x^2+2x-5 (viii) $3x-2+x^2$ ও x^2+3x-2

(ix) $1+2x^2-3x$ ও $2x+3+4x^2$ (x) $2x^2-4x-3$ ও $4x+3-2x^2$

3.4 পলিনোমিয়ালদের বিয়োগ

আমরা জানি যে, a থেকে b বিয়োগ করা যায়, a-র সাথে b-র যোগাত্মক বিলোমী যোগ করা তাই লিখব $a-b=a+(-b)$

এই পদ্ধতি অবলম্বন করে আমরা দুটি পলিনোমিয়াল বিয়োগফল নির্ণয় করতে পারব।

উদাহরণ-5 : লাইন প্রণালী $(3x^2-6x+17)$ থেকে $(5x-3x^2+19)$ কে বিয়োগ করো।

সমাধান :

নির্ণেয় বিয়োগফল $= (3x^2-6x+17) - (5x-3x^2+19)$

$= (3x^2-6x+17)+(3x^2-5x+19)$

$= (3x^2+3x^2)+(-6x-5x)-1(17-19)$

$= (3+3)\ x^2+(-6-5)x+(17-19)$

$= 6x^2-11x-2$

স্তম্ভ প্রণালী :
$$\begin{array}{l} 3x^2 - 6x + 17 \\ 5x - 3x^2 + 19 \\ (+)\quad (-)\quad (-) \\ \hline \end{array}$$

নির্ণেয় বিয়োগফল $= (3+3)\ x^2+(-6-5)x+(17-19)=6x^2-11x-2$

উদাহরণ-6 : $(4x^3-2x^2+5)$ থেকে $(2x^3-3-5x)$-কে বিয়োগ করো।

সমাধান :

নির্ণেয় বিয়োগফল $= (4x^3-2x^2+5) - (2x^3-3-5x)$

$= (4x^3-2x^2+5) + (2x^3+3+5x)$

$= (4x^3-2x^2+5+ (2x^3+5x+3)$

$= (4x^3-2x^3)+(-2x^2)+5x+(5+3)$

$= (4-2)x^3+ (-2x^2)+5x+(5+3)$

$= 2x^3-2x^2+5x+8$

স্তম্ভ প্রণালী : $4x^3 - 2x^2 + 0.x + 5$

$2x^3 + 0.x^2 - 5x - 3$

(−) (−) (+) (+)

নির্ণেয় বিয়োগফল $= (4-2)x^3 + (-2x^2) + 5x + (5+3)$

$= 2x^3 - 2x^2 + 5x + 8$

অনুশীলনী- 3 (b)

1. শূন্যস্থান পূরণ করো।

(i) $5x-3x=5x+(—)=\{(—)+(—)\}x=(—)$

(ii) $3x-(-2x)=3x+(—)=\{(—)+(—)\}x=(—)$

(iii) $-2x-3x=-2x+(—)=\{(—)+(—)\}x=(—)$

(iv) $(2=3x)-(3-2x)=(2+3x)+(—)=(2-3)+(3x+—)=(—)+(—)$

(v) $(x-4)-(-3x+2)=(x-4)+(—)+(x+3x)+(—)= — + —$

2. বিয়োগ করো।

(i) $12x$ থেকে $9x$ (ii) $5x$ থেকে $3x$ (iii) $-2x$ থেকে $3x$

(iv) $-4x$ থেকে $-6x$ (v) $(x+2)$ থেকে $(3x+2)$ (vi) 3 থেকে x^2+x+1

(vii) $2x^2-2x-2$ থেকে x^2+2x+4

3. বিয়োগফল নির্ণয় করো।

(i) $2x^2+2x$ থেকে $2x^2$ (ii) $5x^2+3x$ থেকে x^2+3x

(iii) $2x^2+2x$ থেকে x^2+2x (iv) $3x^2+3x+2$ থেকে x^2+3x-2

(v) $2x^2-5x-1$ থেকে x^2+5x-1 (vi) $4+3x+2x^2+x^3$ থেকে x^3+x^2-3x

(vii) $2x^3-5-2x^2-10x$ থেকে $x^3+20x - x^2+3$

3.5 পলিনোমিয়াল গুণ

(a) এক মনোমিয়াল সাথে অন্য একটি মনোমিয়াল গুণ।

আমরা জানি যে,

$3\times x=3x$, $x\times x=x^2$, $x\times x^2=x^3$, $2x^2\times x=2x^3$ ইত্যাদি।

বর্তমান নিম্নস্থ গুণগুলি লক্ষ করো।

(i) $2x\times 3x=(2\times 3)\times(x\times x)=6x^2$

(ii) $5x\times 4x^2=(5\times 4)\times(x\times x^2)=20x^3$

(iii) $-7y\times 3y^3=(-7\times 3)\times(y\times y^3)=-21y^4$

লক্ষ করলে জানবে যে,

(i) দুটি মনোমিয়াল গুণফল একটি মনোমিয়াল।

(ii) দুটি মনোমিয়াল গুণফল সহন=প্রথম মনোমিয়াল সহন$\times$দ্বিতীয় মনোমিয়াল সহন।

(iii) তিন বা ততোধিক মনোমিয়াল গুণফল স্থির করতে হলে প্রথমে প্রথম দুটি গুণফল বের করা যায়। তারপর উক্ত গুণফলকে তৃতীয় মনোমিয়াল সাথে গুণ করা যায়।

(iv) গুণ প্রক্রিয়া ক্রমবিনিময়ী ও সহযোগী নিয়মকে মধ্য ব্যবহার করা যাবে।

(b) একটি মনোমিয়াল সাথে একটি বাইনোমিয়াল ও একটি পলিনোমিয়াল গুণ।

$2x$ ও $(3x+5)$-র গুণফল স্থির করো।

$2x\times(3x+5)=2x\times3x+2x\times5$

$=6x^2+10x$

সেরকম অন্য একটি উদাহরণ নাও।

$-3y$ ও $(6-7y)$ গুণফল স্থির করো।

$-3y\times(6-7)y=-3y\times\{6+(-7y)\}=(3y)\times6+(-3y)\times(-7y)$

$= -18y+21y^2$

বণ্টন নিয়ম প্রয়োগ করে তোমরা একটি মনোমিয়াল সাথে একটি পলিনোমিয়াল গুণ করবে।

উদাহরণস্বরূপ $2x\times(x^2+3x+5)$

$=2x\times x^2+2x\times3x+2x\times5=2x^3+6x^2+10x$

(c) একটি পলিনোমিয়াল সাথে অন্য একটি পলিনোমিয়াল গুণ করতে

দুটি পলিনোমিয়াল গুণফল নির্ণেয় করার সময় আমরা বণ্টন নিয়ম প্রয়োগ করে থাকি।

উদাহরণস্বরূপ $(2x+1)$ এবং $(x+3)$ র গুণফল অর্থাৎ

$(2x+1)\ (x+3)=\ 2x(x+3)+1(x+3)$ বণ্টন নিয়ম

$=2x^2+6x+x+3=2x^2+7x+3$

সেরকম $(2x^2+1)$ এবং $(x-5)$ র গুণফল

$=(2x^2+1)\ (x-5)=2x^2(x-5)+1(x-5)$

$=2x^2\times x+2x^2\times(-5)+1\times(x)+1\times(-5)=2x^3-10x+x-5$

গুণ করলে গুণফলে থাকা সদৃশপদের একত্র করে দেওয়া যায়। ঘাতঙ্ক দেখে সাজিয়ে লেখো।

টীকা: বণ্টন নিয়ম $a(b+c)=ab+ac$ বা $(b+c)a=ba+ca=ab+ac$

মনে রাখো :

(i) পলিনোমিয়ালকে 0 'শূন্য' দ্বারা গুনলে গুণফল শূন্য হয়।

(ii) পলিনোমিয়ালকে 1 দ্বারা গুনলে পলিনোমিয়ালটি নিজে গুণফল হয়ে থাকে।

(iii) গুণন প্রক্রিয়া আরম্ভ করার পূর্বে পলিনোমিয়ালগুলি ঘাতঙ্ক এককে সাজিয়ে লেখো।

(iv) বণ্টন নিয়ম প্রয়োগ করে গুণন করা যায়।

(v) গুণফলের সদৃশ পদদের সাজিয়ে একত্র লিখে সরল করা যায়।

(vi) পলিনোমিয়ালের গুণন প্রক্রিয়া ক্রমবিনিময়ী ও সহযোগী নিয়ম প্রযুক্ত হয়ে থাকে।

উদাহরণ 7 গুণফল নির্ণয় করো: (x+4) এবং (3x-5)

সমাধান: নির্ণেয় গুণফল $(x+4)(3x-5)=x(3x-5)+4(3x-5)$

$$=x.3x+x(-5)+4.3x+4.(-5)$$

$$=3x^2-5x+12x-20=3x^2+7x-20$$

লক্ষ করো দুটি একঘাতী পলিনোমিয়াল গুণফল একটি দ্বিঘাতী পলিনোমিয়াল সৃষ্টি হয়।

উদাহরণ 8: (x+2) (x-1) এবং (2x-5)-র গুণফল নির্ণয় করো।

সমাধান :

নির্ণয় গুণফল $= (x+2)(x-1)(2x-5)=\{(x+2)\times(x-1)\}\times(2x-5)$

$$= \{(x+2)x+(x+2)(-1)\}\times(2x-5)\ (x^2+2x-x-2)(2x-5)$$

$$= (x^2+x-2)(2x-5)=(x^2+x-2)\,2x+(x^2+x-2)(-5)$$

$$= 2x^3+2x^2-4x-5x^2-5x+10=2x^3+2x^2-5x^2-4x-5x+12$$

$$= 2x^3-3x^2-9x+10$$

উদাহরণ 9 গুণফল নির্ণয় করো $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

সমাধান : নির্ণেয় গুণফল $= (x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$$= x^2(x^2-x+1) + x.(x^2-x+1)+1(x^2-x+1)$$

$$= x^2.x^2+x^2(-x)+x^2.1+x.x^2+x.(-x)+x.1+x^2-x+1$$

$$= x^4-x^3+x^2+x^3-x^2+x+x^2-x+1$$

$$= x^4-x^3+x^3+x^2-x^2+x^2+x-x+1 = x^4+x^2+1$$

দুটি দ্বিঘাতী পলিনোমিয়াল গুণফল একটি চারঘাতী পলিনোমিয়াল হয়ে যায়।

উদাহরণ-10 : গুণফল নির্ণয় করো (2x+5) এবং (x^2+3x-7)

সমাধান:

নির্ণেয় গুণফল $= (2x+5)(x^2+3x-7)$

$$= 2x.(x^2+3x-7)+5(x^2+3x-7)$$

$$= 2x.x^2+2x.3x+2x.(-7)+5.x^2+5.3x+5(-7)$$

$$= 2x^3+6x^2-14x+5x^2+15x-35$$

$$= 2x^3+6x^2+5x^2-14x+15x-35=2x^3+11x^2+x-35$$

অনুশীলনী- 3(c)

1. শূন্যস্থান পূরণ করো।

(i) $3\times5x=(—)$ (ii) $3x^2+2x^2=(—)$

(iii) $2x\times0=(—)$ (iv) $3x^3\times1=(—)$

2. নীচের সারণীকে পূরণ করো।

প্রথম মনোমিয়াল → / দ্বিতীয় মনোমিয়াল ↓	$2x$	$-5x$	$3x^2$	$-4x$	$7x^2$	$9x^3$
$2x$					$14x^3$	
$-5x$			$-15x^3$			
$3x^2$						
$-4x$		$20x^2$				
$7x^2$						
$-9x^3$						

3. শূন্যস্থান পূরণ করো।

(i) $3\times(2x-7)=3\times2x+3\times(—)$

(ii) $(2)\times(3x+1)=(-2)\times3x+(-2)\times(—)$

(iii) $(2x-6)\times(-x)=2x\times(—)+(—)\ (-x)$

(iv) $(-3x^2)\ (2x+4)=(—)\times2x+(-3x^2)\times(—)$

4. গুণফল নির্ণয় করো।

(i) $(x-1)\times(x+1)$ (ii) $(x-1)\times(x^2+x+1)$ (iii) $(x+1)\times(x^2-x+1)$

(iv) $(2x+1)\times(x-2)$ (v) $(2x+3)\times(x^2-2x+5)$ (vi) $(-x-3)\times(x^2-5x-2)$

(vii) $(x^2+1)\times(x^2-1)$ (viii) $(x^2+1)\times(2x^2-x+1)$ (ix) $(x^2-1)\times(x^2+x+1)$

3.6 পলিনোমিয়াল ভাগক্রিয়া

গুণন প্রক্রিয়ার সহিত তোমরা অভ্যস্ত। তাই বলো $20x\div5$ ভাগক্রিয়ার ভাগফল আমরা কেমন পাব। তাই আমাকে প্রথমে স্থির করতে হবে যে $5\times$(কত) $20x$। তাই তোমরা সহজে জানতে পারবে যে $5\times(4x) = 20x$ $\therefore 20x\div5=\frac{20x}{5}=4x$

নিজে করো নীচের সারণীটি পূরণ করো।

$2x\times7=—$	$—\times7=14x$	$\frac{14x}{7}=—$
$3x\times8=—$	$—\times8=24x$	$\frac{24x}{8}=—$
$4x\times6=—$	$—\times6=24x$	$\frac{24x}{6}=—$
$x\times a=—$	$—\times a=ax$	$\frac{ax}{a}=—\quad a\neq0$

(a) শূন্যঘাতী পলিনোমিয়াল ধ্রুবরাশি ভাজক দ্বারা ভাগক্রিয়া কতটি উদাহরণ নীচে দেওয়া গেল।

(i) $10x \div 5 = \frac{10x}{5} = 2x$

(ii) $(21x+7) \div 7 = \frac{21x+7}{7} = \frac{21x}{7} + \frac{7}{7} = 3x+1$

মনে রাখো যদি $c \neq 0$ **তবে** $(ax+b) \div c = \frac{ax+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

আবশ্যকতা দৃষ্টিতে স্থির করব $x^2 \div x$ অর্থ কি?

$x^2 \div x = \frac{x^2}{x} = \frac{x \times x}{x} = x \quad x \neq 0$

মনে রাখো যদি $x \neq 0$ **হয় তবে** $\frac{x}{x} = 1$ **হবে।**

(b) বর্তমান একঘাতী পলিনোমিয়াল ভাজক দ্বারা ভাগক্রিয়ার কয়েকটি উদাহরণ দেখো।

(i) $20x^2 \div 5x = \frac{20x^2}{5x} = \frac{20x\ x \times x}{5x} = 4x$

(ii) $(20x^2+10x) \div 5x = \frac{20x^2+10x}{5x} = \frac{20x^2}{5x} + \frac{10x}{3x} = 4x+2$

উদাহরণ-11 : ভাগফল নির্ণয় করো। (i) $12x \div 4$ (ii) $15x^2 \div 5$ (iii) $24x^2 \div 8x$

সমাধান (i) $12x \div 4$ কত এটা পাওয়ার জন্য আমরা স্থির করব।

$4 \times$ (কত)$=12x$

আমরা জানি $4 \times 3 = 12 \quad \therefore\ 4 \times 3x = 12x$ তাই $12x \div 4 = 3x$

(ii) $24x^2 \div 5$ কত এটি পেতে আমরা স্থির করব।

$5 \times$(কত)$=15x^2$, আমরা জানি $5 \times 3 = 15$ তাই $5 \times 3x^2 = 15x$

$\therefore\ 15x^2 \div 5 = 3x^2$

(iii) $24x^2 \div 8x$ কত স্থির করব।

বর্তমান স্থির করব $8\times$ (কত) $24 \times x$ (কত)$=x^2$

আমরা জানি $8 \times (3) = 24$ ও $x\ x\ (x) = x^2 \therefore\ 8x \times 3x = 24x^2$

তাই $24x^2 \div 8x = 3x$

উদাহরণ 12 ভাগফল নির্ণয় করো।

(i) $3x^2+9x \div 3x$ (ii) $2x^2+6x \div 2x$ (iii) $24x^3-16x^2+8x \div 4x$

সমাধান (i) $\frac{3x^2+9x}{3x} = \frac{3x^2}{3x} + \frac{9x}{3x} = x+3$

(ii) $\frac{2x^2+6x}{2x} = \frac{2x^2}{2x} + \frac{6x}{2x} = x+3$

(iii) $\frac{24x^3-16x^2+8x}{4x} = \frac{24x^3}{4x} - \frac{16x^2}{4x} + \frac{8x}{4x} = 6x^2-4x+2$

অনুশীলনী-3 (d)

1. শূন্যস্থান পূরণ করো।

(i) $3\times(—)=12x$ (ii) $2x\times(—)=12x^2$

(iii) $4\times(—)= -16x^2$ (iv) $-3x\times(-1)=15x^2$

2. ভাগফল স্থির করো।

(i) $8x\div4$ (ii) $8x\div(-4)$

(iii) $(-8x)\div4$ (iv) $(-8x)\div(-4)$

3. (i) $21x^2\div3$ (ii) $-21x^2\div3x$

(iii) $21x^2\div(-7x)$ (iv) $21x^2\div3x^2$

(v) $21x^2\div(-3x^2)$

4. (i) $(15x^2+10)\div5$ (ii) $(16x^2+12)\div4$

(iii) $(24x^2-8x+12)\div4$ (iv) $(20x^2+15)\div5x$

(v) $(24x^2+20)\div4x$ (vi) $(48x^2-44x)\div(-4x)$

3.7 বিস্তৃত প্রণালীর ভাগক্রিয়া

মনে করো আমরা $12x^2+9x$ কে $3x$ দ্বারা ভাগ করব।

এখানে ভাজ্য$=12x^2+9x$, ভাজক$=3x$

ভাজক 3x-কে যে রাশি দিয়ে গুনলে ভাজ্যর প্রথম পদ $12x^2$ পাবো। তা ভাগফলের প্রথম পদ হবে। ভাজক 3x-কে যে রাশি দিয়ে গুনলে ভাজ্যর দ্বিতীয় পদ 9x পাব। সেটা হবে ভাগফলের দ্বিতীয় পদ।

আমরা নিম্নমতে প্রক্রিয়াটি দেখব।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x+3 \\
\hline
3x & 12x^2 + 9x \\
 & 12x^2 \\
 & (-) \\
\hline
 & \quad + 9x \\
 & \quad + 9x \\
 & \quad (-) \\
\hline
 & \qquad 0
\end{array}
$$

একাধিক পদ বিশিষ্ট পলিনোমিয়াল = ভাজক দ্বারা ভাগক্রিয়া একাধিক পদবিশিষ্ট পলিনোমিয়াল -ভাজক দ্বারা ভাগক্রিয়ার বিভিন্ন সোপান ও কয়েকটি উদাহরণ নিচে দেখো।

ভাগক্রিয়ার বিভিন্ন সোপান

(i) একাধিক পদ বিশিষ্ট পলিনোমিয়াল -ভাজক দ্বারা ভাগক্রিয়া সময়ে প্রথমে ভাজ্য ও ভাজক উভয়ের পদগুলি বড় থেকে ছোট ঘাত ক্রমে সাজানো আবশ্যক।

(ii) ভাজক একাধিক পদবিশিষ্ট হলে মধ্য ভাজ্যর প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের প্রথম পদ স্থির করা যাবে।

(iii) ভাজক ও ভাগফলের প্রথম পদের গুণফলকে ভাজ্য থেকে বিয়োগ করা যায়।

(iv) নির্ণীত বিয়োগফলকে পরবর্তী পর্যায়ে ভাজ্য রূপে নেওয়া যায়। পুনশ্চ এই ভাজ্যর প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ দ্বারা ভাগ করা নিয়ে ভাগফলের দ্বিতীয় পদ স্থির করা যায়।

এরকম ভাবে ভাগশেষ 0 হওয়া পর্যন্ত প্রক্রিয়া সম্পাদন করে ভাগফল নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ-13 : ভাগফল নির্ণয় করো $(x^3+x^2+x+6)\div(x+2)$

সমাধান :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x + 3 \\
\hline
x+2 & x^3 + x^2 + x + 6 \\
 & x^3 + 2x^2 \\
 & (-)\ (-) \\
\cline{2-2}
 & \quad -x^2 + x + 6 \\
 & \quad -x^2 - 2x \\
 & \quad (+)\ (+) \\
\cline{2-2}
 & \qquad 3x + 6 \\
 & \qquad 3x + 6 \\
 & \qquad (-)\ (-) \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল x^2-x+3

প্রদত্ত ভাগক্রিয়া সম্বন্ধীয় সূচনা।

প্রথম সোপান ঃ ভাজ্যর প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদে ভাগ করলে ভাগফল x^2 হবে।

$\therefore$ভাগফল প্রথম পদ x^2 ।

নির্ণেয় ভাগফল x^2 ও ভাজকের গুণফলকে ভাজ্য থেকে বিয়োগ করা হল।

দ্বিতীয় সোপান ঃ উপরিস্থিত বিয়োগফল এই পর্যায়কে ভাজ্য হল, এই ভাজ্যর প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ দ্বারা ভাগ করি, মিলে থাকা ভাগফল হল $(-x)$।

$\therefore$ভাগফল দ্বিতীয় পদ $= -x$

এই সোপানের নির্মিত ভাগফল ও ভাজকের গুণফলকে ভাজ্য থেকে বিয়োগ করা হল।

তৃতীয় সোপান ঃ উপরিস্থিত বিয়োগফল এই পর্যয়ে ভাজ্য হল।

এই ভাজ্যর প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল হল $=3$।

$\therefore$ ভাগফল তৃতীয় পদ $= +3$

এই পর্যায়ে মিলে থাকা ভাগফল ও ভাজকের গুণফল থেকে ভাজ্যকে বিয়োগ করা হল।

বিয়োগফল কক হওয়া ভাগক্রিয়া শেষ হল, এবং ভাগক্রিয়া তিন সোপানে মিলে থাকা ভাগফল সমষ্টিকে ভাগফল হল (x^2-x+3)

উদাহরণ 14 : ভাগফল নির্ণয় করো: $(-8x^3+12x^2-6x+1)\div(2x-1)$

সমাধান : $-4x^2+4x-1$

$$
\begin{array}{r|l}
2x-1 & -8x^3+12x^2-6x+1 \\
 & -8x^3+4x^2 \\
 & (+)\quad(-) \\
\hline
 & \qquad 8x^2-6x+1 \\
 & \qquad 8x^2-4x \\
 & \qquad (-)\quad(+) \\
\hline
 & \qquad\qquad -2x+1 \\
 & \qquad\qquad -2x+1 \\
 & \qquad\qquad (+)\quad(-) \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

নির্ণেয় ভাগফল $= -4x^2+4x-1$

উদাহরণ-15 : ভাগফল নির্ণয় করো $(x^3-5x+2)\div(x-2)$

সমাধান :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x-1 \\
x-2 & x^3 \quad -5x+2 \\
 & x^3-2x^2 \\
 & (-)\quad(+) \\
\hline
 & \qquad 2x^2-5x+2 \\
 & \qquad 2x^2-4x \\
 & \qquad (-)\quad(+) \\
\hline
 & \qquad\qquad -x+2 \\
 & \qquad\qquad -x+2 \\
 & \qquad\qquad (+)\quad(-) \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল x^2+2x-1

টীকা ঃ লক্ষ করো যে, ভাজ্যর পদগুলি ঘাতকে অধঃক্রমে সজ্জিত আছে। মধ্য x^2 থাকা কোনো পদ এখানে নেই। তাই ভাগক্রিয়ার ভাজ্য লেখার সময় x^3 ও $-5x$ পদদ্বয় লেখার সময়ে এই পদদ্বয় মধ্যে একটি পদের জন্যে শূন্যস্থান রাখা গেছে।

3.7.1 ভাগক্রিয়ার ইউক্লিডীয় পদ্ধতি

উপরিলিখিত উদাহরণ দুটি ভাগশেষ 0 হচ্ছে মাত্র 7 কে 2 ভাগ করলে ভাগশেষ 0 হয় না। সেরকম 9 কে 2 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ মধ্য 0 হয় না। কারণ 7 থেকে 3 বার 2 নেওয়ার পর 1 থাকবে। অঙ্ক $7=2\times3+1$

সাধারণভাবে বললে, ভাজ্য = **ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ**

একে **ইউক্লিডীয় পদ্ধতি (Euclidean Algorithm)** বলে। একটি পলিনোমিয়াল ভাজ্যকে অন্য এক পলিনোমিয়াল ভজক দ্বারা ভাগ করলে লক্ষ্য করলে জানা যাবে যে একটি সোপান পরবর্তী সোপানে ভাজ্যর ঘাত এমন কমে কমে যাচ্ছে। মাত্র ভাজকের ঘাত স্থির আছে। তাই এক সময় আমরা যেখানে ভাজ্যর ঘাত ভাজকের ঘাত থেকে কমে যাবে। এই সময়ে মিলে থাকা বলিরেখাকে ভাগশেষ বলা যাবে।

উদাহরণ 16 : ভাগফল ও ভাগশেষ নির্ণয় করো। $(x^2+11x+21)\div(x+2)$

সমাধান :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 9 \\
\hline
x + 2 & x^2 + 11x + 21 \\
 & x^2 + 2x \\
 & (-)\ (-) \\
\hline
 & \quad 9x + 21 \\
 & \quad 9x + 18 \\
 & \quad (-)\ \ (-) \\
\hline
 & \quad\ 3 \text{ ভাগশেষ}
\end{array}
$$

লক্ষ্য করো ভাগশেষ 3 র ঘাত 0 ভাজক $(x+2)$ থেকে (1) কম। এক্ষেত্রে $x^2+11x+21$ $(x+2)(x+9)+3$ অর্থাৎ ভাগক্রিয়ার ভাগফল $x+9$। ভাগশেষ=3

উদাহরণ-17 : ভাগফল ও ভাগশেষ নির্ণয় করো: $(x^2+8)\div(x-2)$

সমাধান :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 4 \\
\hline
x-2 & x^3 \qquad + 8 \\
 & x^3 - 2x^2 \\
 & (-)\ (+) \\
\hline
 & \ 2x^2 + 8 \\
 & \ 2x^2 - 4x \\
 & \ (-)\ (+) \\
\hline
 & \qquad 4x + 8 \\
 & \qquad 4x - 8 \\
 & \qquad (-)\ (+) \\
\hline
 & \qquad\ 16 \text{ ভাগশেষ}
\end{array}
$$

ভাগফল $= x^2 + 2x + 4$, ভাগশেষ $= 16$

উদাহরণ-18 : একটি ভাগক্রিয়া ভাজ্য নির্ণয় করো যদি

ভাজক $= x+5$। ভাগফল $x^2 - 1$ ও ভাগশেষ $- 3$।

সমাধান: **ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ**

$= (x+5)(x^2-1) + (-3) = x(x^2-1) + 5(x^2-1) - 3$

$= x^3 - x + 5x^2 - 5 - 3 = x^3 + 5x^2 - x - 8$

উদাহরণ 19 : যদি x^2-7x+a, $x-3$ দ্বারা বিভাজ্য হয়, তবে a-র মান নির্ণয় করো।

সমাধান :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 4 \\
\hline
x - 3 & x^2 - 7x + a \\
 & x^2 - 3x \\
 & (-) \quad (+) \\
\hline
 & \quad - 4x + a \\
 & \quad - 4x + 12 \\
 & \quad (+) \quad (-) \\
\hline
 & \qquad a-12
\end{array}
$$

এখানে ভাগশেষ a-12

কিন্তু দেওয়া আছে x^2-7x+a, $x-3$ দ্বারা বিভাজ্য তাই এখানে $a-12=0$

$\therefore$ $a=12$ হবে।

অনুশীলনী-3 (e)

1. শূন্যস্থান পূরণ করো :

(i) ভাজক = $2x+1$, ভাগশেষ = 0 ও ভাগফল = $3x$ হলে ভাজ্য = ... (0, $3x$, $2x+1$, $6x^2+3x$)

(ii) ভাজ্য = $3x^2$, ভাগশেষ = 0 ও ভাগফল=$3x$ হলে ভাজক = ... (0, $2x$, $3x$, x)

(iii) ভাজ্য = $6x^3+4x+1$, ভাগশেষ = 1 ও ভাজক = $2x$ হলে,

ভাগফল = ... (1, $2x^2+2$, $3x^2+1$, $3x^2+2$)

(iv) ভাজক = $2x^2$, ভাজ্য = $8x^4 + 6x^2 + 1$ এবং ভাগফল $4x^2 + 3$ হলে

ভাগশেষ = ... (0, 1, $4x^2+3$, $3x^2+4$)

(v) ভাজক=$4x$, ভাগফল=$3x+2$ ও ভাগশেষ = 2 হলে ভাজ্য = ...

(0, $12x^2$, $12x^2+8x$, $12x^2+8x+2$)

2. ভাগফল নির্ণয় করো।

(i) $(x^2-11x+28)\div(x-4)$

(ii) $(x^2-11x+28)\div(x-7)$

(iii) $(x^2-8x+15)\div(x+3)$

(iv) $(x^2-1)\div(x+1)$

(v) $(x^3+1)\div(x+1)$

(vi) $(x^3-1)\div(x-1)$

(vii) $(2x^3-x^2+x+1)\div(2x+1)$

(viii) $(x^3-4x^2+x+6)\div(x-1)$

(ix) $(x^3-4x^2+x+6)\div(x-3)$

(x) $(5x^2-4+6x^3)\div(-2+3x)$

3. **ভাগফল ও ভাগশেষ নির্ণয় করো।**

(i) $(x^2+15x+56)\div(x+1)$ (ii) $(x^2-12x+30)\div(x-1)$

(iii) $(-7 -6x+4x^2)\div(2x-1)$ (iv) $(6x+27x^3-9x^2+1)\div(3x-1)$

(v) $(8x^3-1)\div(2x+1)$ (vi) $(x^3-1)\div(-x-1)$

4. **a-র মান নির্ণয় করো।**

(i) যদি x^2-5x+a, $x+2$ দ্বারা বিভাজ্য। (ii) যদি $4x^2-6x+a$, $2x-1$ দ্বারা বিভাজ্য।

(iii) যদি $6x^2-4x+a$, $3x+1$ দ্বারা বিভাজ্য।

3.8 অভেদ (Identity) :

এসো আমরা নীচের গাণিতিক উক্তিকে পরীক্ষা করব।

$(a + 1) (a + 2) = a^2 + 3a + 2$ .... (1)

$a = 10$ জন্য

বামদিক $= (a+1) (a+2)=(10+1) (10+2) = 11\times12 = 132$

দক্ষিণ দিক $= a^2+3a+2 = 10^2+3\times10+2$

$= 100+30+2 = 132$

$\therefore$ $a = 10$ এর জন্য (1)। উক্তির বামদিক=ডানদিক।

সেরকম $a = -5$ নিলে

বামদিক $= (a-11) (a+2) = (-5+1) (-5+2) = (-4)\times(-3) = 12$

ডানদিক $= a^2+3a+2 =(-5)^2+3\times(-5)+2 = 25-15+2 = 2$

এখানে মধ্য $a = -5$ এর জন্য (1) উক্তি বামদিক=ডানদিক

আর কতকগুলি মূল্য নিয়ে দেখো। দেখবে a- র প্রত্যেক মূল্যের জন্য (1) উক্তির বামদিক=ডানদিক।

মনে রাখো : **যে, উক্তিটি এখানে থাকা বীজগাণিতিক সংকেতের যে কোনো মানের জন্য সত্যি হয় তাকে অভেদ বলা যায়।**

অতএব $(a+1) (a+2)=a^2+3a+2$ একটি অভেদ।

অন্যপক্ষে অন্য একটি উক্তিকে নেওয়া যাক। উক্তিটি হল $a^2+3a+2=132$-(2)

এটি $a=10$ জন্য সত্যি। (পরীক্ষা করে দেখ)

মাত্র $a=-5$ কিংবা $a=2$ ইত্যাদির জন্য সত্য না। তাই 2 উক্তিটি অভেদ না। **উক্তিটি বীজগাণিতিক সংকেত কয়েকটি নির্দিষ্ট মানের জন্য সত্য হয়ে থাকলে সেই উক্তিটিকে আমরা অভেদ না বলে সমীকরণ বলব।** পরবর্ত্তী অধ্যায়ে সমীকরণ বিষয়ে আলোচনা করা হবে।

3.9 কয়েকটি উপযোগী অভেদ :

(i) $\mathbf{(a+b)^2 = (a+b)\ (a+b)}$ **সংজ্ঞা**

$= a(a+b)+b(a+b)$ (বণ্টন নিয়ম)

$= a^2+ab+ba+b^2$ (বণ্টন নিয়ম)

$= a^2+ab+ba+b^2$ $(\because ab = ba)$ (গুননের ক্রমবিনিময় নিয়ম)

$= a^2+2ab+b^2$ $\therefore (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ ...(i)

(ii) $\mathbf{(a-b)^2 = (a-b)\ (a-b)}$ **সংজ্ঞা**

$= a(a-b)-b(a-b)$ (বণ্টন নিয়ম)

$= a^2-ab-ba+b^2$ (বণ্টন নিয়ম)

$= a^2-ab-ab+b^2$ $(\because ab = ba)$ (গুননের ক্রমবিনিময় নিয়ম)

$= a^2-2ab+b^2$ $\therefore (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ ...(ii)

(iii) $\mathbf{(a+b)\ (a-b) = a(a-b)+b(a-b)}$ **(বণ্টন নিয়ম)**

$= a^2-ab+ba-b^2$

$= a^2-ab+ab-b^2$ $(\because ab=ba)$ (গুননের ক্রমবিনিময় নিয়ম)

$= a^2- b^2$

$\therefore (a+b)\ (a-b)=a^2- b^2$ ...(iii)

(iv) $\mathbf{(x+a)\ (x+b) = x\ (x+b)+a\ (x+b)}$ **(বণ্টন নিয়ম)**

$= x^2+xb+ax+ab$ (পুনঃ বণ্টন নিয়ম)

$= x^2+bx+ax+ab$ (গুনেনের ক্রমবিনিময় নিয়ম)

$= x^2+ax+bx+ab$ (যোগের ক্রমবিনিময় নিয়ম)

$= x^2+(a+b)x+ab$

$\therefore (x+a)\ (x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ ...(iv)

টীকা : 1 অভেদ (iv) b= -b নিতে পাব

$(x+a)\ (x-5)= x^2+(a-b)x-ab$

2 অভেদ (iv)য়ে a= -a এবং b= -b নিলে পাব

$(x-a)\ (x-b)=x^2-(a+b)x+ab$

3 অভেদ (iv)-র a= -a নিলে পাব

$(x-a)\ (x+b)=x^2-(a-b)x-ab$

নিজে করো

1. অভেদ (i) যে b স্থানে -b নিয়ে দেখ অভেদ (ii) পাচ্ছ কি?
2. a=2, b=3, x=5 নিলে অভেদ (iv) a সত্যতা পরীক্ষা করো।
3. অভেদ (iv) যে a=b নিলে তুমি কি পাবে? এর অভেদ (i) এর সঙ্গে কিছু সম্পর্ক আছে কি?
4. অভেদ (iv) যে a= -c এবং b= -c নিলে কি মিলবে? এর অভেদ (ii) সাথে কী সম্বন্ধ আছে?
5. অভেদ (iv) যে b= -a নিলে তুমি কি পাবে। এর অভেদ (iii) সাথে কি সম্বন্ধ আছে?

উদাহরণ-1 :

অভেদ (1) ব্যবহার করে (i) $(2x+3y)^2$ (ii) $(103)^2$ নির্ণয়।

সমাধান- (i) $(2x+3y)^2$

$= (2x)^2+2(2x)\ (3y)\ +(3y)^2$ (অভেদ (i) ব্যবহার করে)

$=4\ x^2+12xy+9y^2$

(ii) $(103)^2$

$= (100+3)^2$

$= (102)^2+2\times100\times3+3^2$ (অভেদ (i) ব্যবহার করে)

$= 10000+600+9 = 10609$

উদাহরণ 2 : অভেদ (ii) ব্যবহার করে (i) $(4p-3q)2$ (ii) $(4.9)^2$ নির্ণয় করো।

সমাধান : (i) $(4p-3q)2$

$= (4p)^2-2(4p)(3q)+(3q)^2 = 16p^2-24pq+9q^2$

(ii) $(4.9)^2$

$= (5.0-0.1)^2=(5.0)^2-2(5.0)(0.1)+(0.1)^2$

$= 25.00-1.00+0.01 = 24.01$

উদাহরণ 3 : অভেদ (iii) ব্যবহার করে।

(i) $(3m+2n)\ (3m-2n)$ (ii) 983^2-17^2 (iii) 194×209

সরল মান স্থির করো।

সমাধান :

(i) $(3m+2n)\ (3m-2n) = (3m)^2-(2n)^2 = 9m^2-4n^2$

(ii) $983^2-17^2 = (983+17)\ (983-17)=1000\times966 = 966000$

$(a^2-b^2) = (a+b)\ (a-b)$ অভেদয়ে $a = 983\ b = 17$

(iii) $194\times206=(200-6)\ (200+6) = 200^2 - 6^2$

$= 40000 - 36 = 39964$

উদাহরণ 4 :

অভেদ (iv) প্রয়োগে নিম্নলিখিত পলিনোমিয়াল গুণক নির্ণয় করো।

(i) $(p+5)\ (p+3)$ (ii) $(a+2)\ (a-4)$ (iii) $(x-7)\ (x-6)$

সমাধান : (i) $(p+5)\ (p+3)$

$= p^2+(5+3)p+5\times3 = p^2+8p+15$

(ii) $(a+2)\ (a-4)$

$=a^2+\{2+(-4)\}a+2(-4)=a^2-2a-8$

(iii) $(x-7)\ (x-6)$

$=x^2+\{(-7)+(-6)x+(-7)\ (-6)=x^2-13x+42$

উদাহরণ 5:

অভেদ (iv) প্রয়োগে নিম্নলিখিত পলিনোমিয়াল গুণফল নির্ণয় করো।

(i) 501×502 (ii) 95×103

সমাধান :

(i) $501 \times 502 = (500+1) \times (500+2)$

$= 500^2+(1+2) \times 500+1 \times 2$

$= 250000+1500+2 = 251502$

(ii) $(95 \times 103) = (100-5) \times (100+3)$

$= 1002+(-5+3) \times 100+(-5) \times 3$

$= 10000-200-15 = 9785$

(b) দুটি ত্রিপদী পরিপ্রকাশ পলিনোমিয়াল গুণফল থেকে সৃষ্ট অন্য একটি গুরুত্বপূর্ণ অভেদ সম্পর্কে আলোচনা করব।

$(a + b + c)^2 = (a + b + c)\ (a + b + c)$

$= a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c)$

$= a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2$

$= a^2+b^2+c^2+ab+ba+ac+ca+bc+cb$

$= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\ (ab = ba,\ bc = cb,\ ca = ac)$

$= (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$....(i)

বিকল্প প্রণালী :

অভেদ (i)-র প্রয়োগ পাব

$(a + b + c)^2 = \{(a + b) + c\}^2 = (a + b)^2 + 2(a + b) + c^2$ অভেদ (i) প্রয়োগ

$= a^2+2ab+b^2+2ca+2bc+c^2$

$= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 = 2ab+2bc+2ca$...(v)

টীকা : 1 অভেদ (v) যে $c = -c$ নিলে

$(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$

2. অভেদ (v) যে $b = -b$ নিলে পাব।

$(a-b+c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

3. অভেদ (v) যে b= -b এবং c= -c নিলে পাব।

$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

উদাহরণ 6: নীচের পলিনোমিয়ালগুলির বর্গ স্থির করো।

(i) $a+2b+c$ (ii) $x+2y-3z$

সমাধান : (i) $(a+2b+c)^2 = a^2+(2b)^2+c^2+2.a.2b+2.2b.c+2c.a$

$= a^2+4b^2+c^2+4ab+4bc+2ca$

(ii) $(x+2y-3z)^2 = x^2+(2y)^2+(-3z)^2+2x.2y+2.2y\ (-3z)+2(-3z)x$

$= x^2+4y^2+9z^2+4xy-12yz-6zx$

উদাহরণ 7 : নীচের পলিনোমিয়ালগুলির পূর্ণবর্গ রাশিতে পরিণত করো।

(i) $a^2+8ab+16b^2$ (ii) $4x^2-4x+1$

(iii) $9x^2-12xy+4y^2$ (iv) $x^2+6xy+9y^2$

(v) $4x^2+9y^2+16z^2+12xy+24yz+16xz$

(vi) $m^2+4n^2+25z^2-4mn-20nz+10mz$

সমাধান:

(i) $a^2+8ab+16b^2 = (a)^2+2.a.4b+(4b)^2 = (a+4b)^2$... অভেদ (i)

(ii) $4a^2-4x+1 = (2x)^2-2.2x.1+(1)^2 = (2x-1)^2$... অভেদ (ii)

(iii) $9x^2-12xy+4y^2 = (3x)^2-2.3x.2y+(2y)^2 = (3x-2y)^2$... অভেদ (iii)

(iv) $x^2+6xy+9y^2 = (x)^2+2.x.3y+(3y)^2 = (x+3y)^2$... অভেদ (iv)

(v) $4x^2+9y^2+16z^2+12xy+24yz+16xz$

$= (2x)^2+(3y)^2+(4z)^2+2.2x.3y+2.3y.4z+2.4x.2x$... অভেদ (v)

$= (2x+3y+4z)^2$

(vi) $m^2+4n^2+25z^2 - 4mn-20nz+10mz$

$=(m)^2+(2n)^2+(5z)^2-2m.2n-2.2n.5z+2.5z.m$... অভেদ (v)

$=(m-2n+5z)^2$

বিকল্প প্রণালী :

$m^2+4n^2+25z^2-4mn-20nz+10mz$

$= (m)^2+(-2n)^2+(5x)^2+2m\ (-2n)+2(-2n)5x+2.5zm$ অভেদ (v)

$= (m-2n+5z)^2$ অভেদ (v)

অনুশীলনী-3(f)

1. শূন্যস্থান পূরণ করো।

(i) $(a+2)^2=a^2+$ (—)$a+2^2$ (2, 29, 4, 4a)

(ii) $(3+y)^2=9+3$ (—)$+y^2$ (y, 2y, 3y, 4y)

(iii) $(4-y)^2=16+2$ (—)$+y^2$ (-2, -2y, -4, -4y)

(iv) $(2x-3y)^2=4x^2-3$ (—)$+9y^2$ (2xy, 3xy, 4xy, 12xy)

(v) $(x+a)\ (x-b)=x^2+$ (—)$x-ab$ {(a+b, a-b, b-a, -(a+b)}

2. সূত্র প্রয়োগ করে নীচের রাশির বর্গ নির্ণয় করো।

(i) b+c (ii) (4+b) (iii) r-10

(iv) 3n+2 (v) 2m+n (vi) 7p-q

(vii) 2x+3y (viii) 2m-3n-p (ix) x-y+4z

(x) a+2b+c

3. আবশ্যক সূত্র প্রয়োগ করে নীচের সংখ্যাদের বর্গ নির্ণয় করো।

(i) 102 (ii) 304 (iii) 1003 (iv) 4001

4. আবশ্যক অভেদ প্রয়োগ করে মূল্য নিরূপণ করো।

(i) 99^2 (ii) 998^2 (iii) 297×303

(iv) 78×82 (v) 8.9^2 (vi) 1.05×9.5

(vii) 51^2-49^2 (viii) $(1.02)^2-(0.98)^2$ (ix) 153^2-147^2

5. $(x+a)\ (x+b)=x^2+\ (a+b)\ x+\ ab$ অভেদ প্রয়োগ করে গুণফল নির্ণয় করো।

(i) 103×104, (ii) 5.1×5.2 (iii) 103×98 (iv) 9.7×9.8

6. আবশ্যক অভেদ প্রয়োগ করে গুণফল নির্ণয় করো।

(i) $(x+3)(x+3)$ (ii) $(2y+5)(2y+5)$

(iii) $(2a-7)(2a-z)$ (iv) $(1.1m-0.4)(1.1m+0.4)$

(v) $(a^2+b^2)(-a^2+b^2)$ (vi) $(6x-7)(6x+7)$

(vii) $(p-5)(p+5)$ (viii) $(2x+3y)(3y-2x)$

(ix) $(x+1)(x-1)(x^2+1)$ (x) $(2y+3)(2y-3)(4y^2+9)$

7. $(x+a)(x+b)= x^2+(a+b)x+ab$ অভেদ প্রয়োগ করে গুণফল নির্ণয় করো।

(i) $(x+3)(x+7)$, (ii) $(4x+5)(4x+1)$,

(iii) $(4x-5)(4x-1)$ (iv) $(4x+5)(4x-1)$

(v) $(2a^2+9)(2a^2+5)$ (vi) $(xyz-4)(xyz-2)$

8. সরল করো।

(i) $(a^2-b^2)^2+(a^2+b^2)^2$ (ii) $(2x+5)^2-(2x-5)^2$

(iii) $(7m-8n)^2+(7m+8n)^2$ (iv) $(4m+5n)^2+(5m+4n)^2$

(v) $(2.5p-1.5q)^2-(1.5p-2.5q)^2$ (vi) $(ab+bc)^2-2ab^2c$

(vii) $(m^2-n^2m)^2+2m^2n^2$ (viii) $(a+b-c)^2+(a-b-c)^2$

(ix) $(2a-3b-c)^2+(2a-b+5c)^2$ (x) $(3x-4y+z)^2-(x-2y-z)^2$

9. নিম্নলিখিত পলিনোমিয়ালগুলি পূর্ণ বর্গে পরিণত করো।

(i) $4x^2+12xy+9y^2$ (ii) $64m^2-48mn+9n^2$

(iii) $4x^2-4x+1$ (iv) $x^2+4y^2+z^2+4xy+4yz+2zx$

(v) $4x^2+y^2+z^2-4xy+2yz-4zx$ (vi) $9x^2+4y^2+z^2-12xy-4yz+6zx$

10. দেখাও যে (i) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

(ii) দেখাও যে $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

(iii) দেখাও যে $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab$

(iv) দেখাও যে $(2a+b)^2=(2a-b)^2=8ab$

(v) দেখাও যে $(3x-2y)^2+12xy=9x^2+4y^2$

সূচনা : অভেদ (i) ও অভেদ (ii) প্রয়োগ উপরিউক্ত অভেদগুলি পেতে চেষ্টা করো।

⌘⌘⌘⌘⌘

উৎপাদকীকরণ (FACTORISATION)

অধ্যায় ৪

4.1 উপক্রমণিকা (Introduction) :

পূর্বে শ্রেণীতে গণন সংখ্যাদের উৎপাদক বা গুণনীয়ক নির্ণয় করা শিখেছ এবং এর ব্যবহারে সংখ্যাদের গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ.সা.গু) এবং লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল.সা.গু) নির্ণয় কেমন করা যায় সেও জানো। গণন সংখ্যা বা স্বাভাবিক সংখ্যাকে কয়েকটি মৌলিক সংখ্যার গুণনীয়কভাবে পরিণত করার প্রণালীকে উৎপাদকীকরণ বলা যায়। উদাহরণস্বরূপ, 30-কে অন্য গণন সংখ্যাদের গুণফল রূপে প্রকাশ করলে পাব

$$30=1\times30=2\times15=3\times10=5\times6=2\times3\times5$$

তাই 30 -র গুণনীয়ক বা উৎপাদকগুলি হল 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 এই উৎপাদকগুলির মধ্যে 2.3 এবং 5 হচ্ছে মৌলিক উৎপাদক। অতএব 30 -কে মৌলিক গুণনীয়ক বা উৎপাদকের প্রকাশ করলে পাব $30=2\times3\times5$

এখানে মনে রাখতে হবে যে **কোনো যৌগিক সংখ্যাকে অন্যান্য ভাবে কয়েকটি মৌলিক সংখ্যার গুণনীয়ক ভাবে প্রকাশ করা গিয়ে থাকে।** যেমন- $30=2\times3\times5$, $42=2\times3\times7$

বর্তমান উক্ত অধ্যায়ে দুই বা অধিক পদবিশিষ্ট রাশিদের বা পরিপ্রকাশদের উৎপাদক বিশ্লেষণ বা উৎপাদকীকরণ নিমিত্ত বিভিন্ন প্রণালী সম্বন্ধে আলোচনা করব।

4.2 উৎপাদক (Factors) এবং উৎপাদকীকরণ (Factorisation) :

দুই বা অধিক পদবিশিষ্ট রাশিদের উৎপাদকীকরণ আলোচনা পূর্বে আমরা প্রথমে একটি পদে থাকা বিভিন্ন উৎপাদক বা গুণনীয়ক সম্বন্ধে আলোচনা করব। লক্ষ করো $2a^2bc$ একটি পদবিশিষ্ট বীজগাণতিক রাশি। এখানে $2a^2bc = 2\times a\times a\times b\times c$

উক্ত রাশি $2a^2bc$ র $2.a.a.b$ এবং c এক একটি উৎপাদক বা গুণনীয়ক।

সেরকম $5xy=5\times x\times y$ তাই $5, x, y$ প্রত্যেক $5xy$ রাশির এক একটি গুণনীয়ক।

কোনো বীজগাণিতিক রাশি কয়েকটি মৌলিক সংখ্যা ও অন্য কয়েকটি বীজগাণিতিক রাশিদের গুণফল সহিত সমান হলে উক্ত সংখ্যা এবং উৎপন্ন রাশিদের প্রদত্ত রাশির এক একটি উৎপাদক বলা হয়।

অন্যপক্ষে উৎপাদকীকরণ একটি প্রক্রিয়া যেখানে আমরা প্রদত্ত বীজগাণিতিক রাশিকে কেবল মৌলিক সংখ্যা বা মৌলিক উৎপাদক যাকে অন্য উৎপাদকের গুণফলরূপে প্রকাশ করা যাবে না। এদের গুণফলরূপে প্রকাশ করতে পারব।

4.2.1 বণ্টন নিয়ম ব্যবহার করে উৎপাদক বিশ্লেষণ

পরিমেয় সংখ্যা সেটেয়ে বণ্টন নিয়মটি হল $x(a+b)=xa+xb$। অন্য প্রকারে লিখলে $xa+xb=x(a+b)$

এখানে $x(a+b)$ পরিপ্রকাশের x একটি উৎপাদক ও $a+b$ অন্য একটি উৎপাদক।

বণ্টন নিয়মটি দু থেকে অধিক পদবিশিষ্ট রাশির জন্য মধ্য প্রযোজ্য। যথা $xa+xb+xc=x(a+b+c)$

মনে রাখ : (i) পদদের কোনো সাধারণ গুণনীয়ক না থাকলে এ প্রণালী প্রযোজ্য হবে না।

(ii) দ্বিপদ, ত্রিপদ বা বহুপদবিশিষ্ট রাশি মধ্য গুণনীয়ক হতে পারে।

(iii) সাধারণ গুণনীয়ক একটি সংখ্যা বা বীজগাণিতিক সংকেত যা a, b, c, x, y, z ইত্যাদি হয়ে থাকে।

উদাহরণ-1 : $2x+4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

সমাধান : $2x+4 = 2(x+2)$ (বণ্টন নিয়ম)

উদাহরণ 2 : $12a^2b+15ab^2$ র উৎপাদক বিশ্লেষণ করো।

সমাধান : $12a^2b+15ab^2 =3ab\ (4a+5b)$

এখানে $3ab$ এবং $4a+5b$-র গুণফল $12a^2b+15ab^2$ সহিত সমান। অতএব $3, a, b$ এবং $(4a+5b)$ প্রত্যেকে $12a^2b+15ab^2$-র এক একটি গুণনীয়ক বা উৎপাদক।

উদাহরণ 3 : $a^2bc+ab^2c+abc^2$ -কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

সমাধান : $a^2bc+ab^2c+abc^2=(a\times b\times c)\ (a+b+c)=abc(a+b+c)$

এখানে a, b, c এবং $(a+b+c)$, $a^2bc+ab^2c+abc^2$ এক একটি উৎপাদক ।

উদাহরণ 4 :

$14x^4-18x^3+10x^2$ -কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

সমাধান : $14x^4-18x^3+10x^2=2x^2(7x^2-9x+5)$

উদাহরণ 5 : উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

(i) $2x(a-b)+3y(a-b)$ (ii) $2a(x-y)+5b(y-x)$

সমাধান : (i) $2x(a-b)+3y(a-b)$

$=(a-b)(2x+3y)$ লক্ষ করো এখানে পদদুটি সাধারণ গুণনীয়ক $(a-b)$

(ii) $2a(x-y)+5b(y-x)=2a(x-y)+5b\{-(x-y)\}$

$=2a(x-y)-5b(x-y)=(x-y)(2a-5b)$

লক্ষ করো $(y-x)=-x+y=-(x-y)$

অনুশীলনী-4 (a)

উৎপাদক বিশ্লেষণ করো।

(1) $12x+36$

(2) $8a+4b$

(3) $22y-33z$

(4) $15pq+35pqr$

(5) $10a^2b+5a$

(6) $15a^2bc-10ab^2c$

(7) $8a^3+4a^2+2a$

(8) $30a^3b^3c^3+25a^5b^3c^6-15a^6b^6c^6$

(9) $7(2x+5)+3(2x+5)$

(10) $5a(2x+3y)-2b(2x+3y)$

(11) $8(5x+9y)^2+12(5x+9y)$

(12) $9a(6a-5b)-12a^2(6a-5b)$

(13) $5(x-2y)^2+3(x-2y)$

(14) $6(a+2b)-4(a+2b)^2$

(15) $a(a-1)+b(a-1)$

(16) $(x-y)^2+(x-y)$

(17) $a(x-y)+2b(y-x)+c(x-y)$

(18) $a(b-c)+b(b-c)+c(b-c)$

(19) $x^3(a-2b)+x^2(a-2b)$

(20) $4(x+y)(3a-b)+6(x+y)(2b-3a)$

(21) $(2x-3y)(a+b)+(3x-2y)(a+b)$

(22) $a^2(x+y)+b^2(x+y)+x^2(x+y)$

4.2.2 পদগুলি দুই বা তার অধিক ভাগে বিভক্ত করে উৎপাদক নির্ণয় (Factorisation by grouping method) :

চার বা অধিক পদবিশিষ্ট পরিপ্রকাশের উৎপাদক বিশ্লেষণ উক্ত প্রণালী হতে পারবে। এখানে বীজগাণিতিক পরিপ্রকাশকে এমন দুই বা তার অধিক ভাগে বিভক্ত করা যাবে যেমন প্রত্যেক ভাগ থেকে একটি সাধারণ গুণনীয়ক পাব, দরকার পড়লে পদগুলিকে পুনঃসমীকরণ করতে পারবে। নীচের উদাহরণকে অনুধ্যান করো।

উদাহরণ 6 : উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

(i) $ax+by+bx+ay$ (ii) $3m-6n-am+2an$

সমাধান :

পরিপ্রকাশটিকে লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে এর সাধারণ উৎপাদক নেই। কিন্তু পদগুলি অন্য প্রকারে সাজিয়ে দিয়ে পরিপ্রকাশটির উৎপাদকীকরণ সহজ হবে।

(i) $ax+by+bx+ay = ax+bx+ay+by$

$= x\ (a+b)+y\ (a+b) = (a+b)\ (x+y)$

বিকল্প প্রণালী পদ চারটির মধ্যে a পদ থাকা এবং b পদ থাকা পদদের একত্রে লিখে মধ্য উৎপাদক নির্ণয় করা যেতে পারবে।

$ax+by+bx+ay = ax+ay+bx+by = a(x+y)+b(x+y) = (x+y)\ (a+b)$

(ii) $3m-6n-am+2an = 3(m-2n)-a(m-2n)(m-2n)\ (3-a)$

এখানে প্রথম ও তৃতীয় পদদ্বয়কে এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থ পদদ্বয় থেকে দুটি আলাদা আলাদা ভাগে পরিণত করে উৎপাদক নিরূপণ করতে চেষ্টা করো।

উদাহরণ-7 : উৎপাদক নির্ণয় করো

(i) $2xy+3+2y+3x$ (ii) $6xy-4y+6-9x$

সমাধান :

(i) $2xy+3+2y+3x = 2xy+2y+3x+3$

$= 2y(x+1)+3(x+1) = (x+1)\ (2y+3)$

(ii) $6xy-4y+6-\ 9x = 6xy-9x-4y+9$

$= 3x(2y-3)-2(2y-3)$

$= (2y-3)\ (3x-2) = (3x-2)(2y-3)$

অনুশীলনী- 4(b)

উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

1. $x^2+xy+8x+8y$
2. $pq+qr+q^2+qr$
3. $ab+db+ac+dc$
4. $pq+qr+pr+r^2$
5. $15xy-6x+5y-2$
6. $ax+bx-ay-by$
7. $15pq+15+9q+25p$
8. $2a+6b-3(a+3b)^2$
9. $a^2+2a+ab+2b$
10. $x^2-xz+xy-yz$
11. $a^2+bc-ba-ac$
12. $2p^2-pq-2pr+qr$
13. $x^2-3x+2x-6$
14. $2x^2-5x+4x-10$
15. $x^2-y^2+x-xy^2$
16. $lm^2-mn^2-lm+n^2$
17. $x^3-2x^2y+3xy^2-6y^3$
18. $6ab-b^2+12ac-2bc$
19. $x^2-11xy-x+11y$
20. $3ax-6ay-8by+4bx$

4.3 দ্বিঘাত বিশিষ্ট পলিনোমিয়াল উৎপাদকীকরণ প্রণালী :

দ্বিঘাত বিশিষ্ট পলিনোমিয়াল স্বরূপ হচ্ছে x^2+px+q -এর মধ্যম পদ px যেখানে x চলরাশি ও p সহন। এখানে p ও q প্রত্যেক ধ্রুবক।

তোমরা জান $(x+a)\ (x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

অন্য প্রকারে লিখলে $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)\ (x+b)$ পূর্ব অধ্যায়ে আলোচিত অভেদ।

তাই যদি পরিপ্রকাশটি x^2+px+q রূপে থাকে আমরা p কে a+b রূপে ভেঙে যেমন কি q=ab হবে। এখানে পরিপ্রকাশে উৎপাদকগুলি (x+a) এবং (x+b) হবে। উৎপাদক বিশ্লেষণ করার জন্য নীচে সোপানগুলি অবলম্বন করব।

(i) দ্বিঘাত পরিপ্রকাশ অজ্ঞাত রাশির ঘাতের অধর ক্রমে সাজিয়ে রাখতে হবে।

(ii) এমনি দুটি সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে, যার যোগফল মধ্যম পদের সহন সহিত সমান ও গুণফল তৃতীয় পদ সহিত সমান হবে।

(iii) বর্তমান মধ্যমপদটিকে আমাদের আবশ্যকতা অনুযায়ী দুটি পদে প্রকাশ করতে পারব।

(iv) বর্তমান চারিপদ বিশিষ্ট রাশিকে উৎপাদকের পূর্বে বর্ণিত প্রণালীতে বিশ্লেষণ করব।

উদাহরণ 8 : উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো

(i) $x^2+9x+20$ (ii) $y^2-7y+12$ (iii) x^2-x-30

সমাধান : (i) $x^2+9x+20$ কে x^2+px+q রূপে প্রকাশ করব।

এখানে p=9 ও q=20। এমন দুটি সংখ্যা বাছব যার যোগফল 9 ও গুণফল 20 হবে। চিন্তা করলে জানতে পারব যে সংখ্যা দুটি 4 ও 5 হবে। কারণ গুণফল ধনাত্মক এবং যোগ বা বিয়োগফল মধ্য ধনাত্মক।

$$x^2+9x+20=x^2+(4+5)x+4\times5 \quad ....(i)$$

$$=x^2+4x+5x+20=x(x+4)+5(x+4)=(x+4)\ (x+5)$$

সোপান (i) থেকে আমরা সোজাসুজি উৎপাদকদ্বয় (x+4) ও (x+5) কে লিখতে পারব।

(ii) $y^2-7y+12$

এখানে p = -7 ও q = 12 তাই আমরা এমন দুটি সংখ্যা নির্ণয় করব যার যোগফল -7 ও গুণফল 12 হবে। এখনে গুণফল ধনাত্মক তাই সংখ্যাদ্বয় ঋণাত্মক হবে। সুতরাং সংখ্যা দুটি হবে -4 ও -3

$$y^2-7y+12 = y^2+\{(-4)+(-3)y+(-4)(-3)...(ii)$$

$$= y^2-4y-3y+12 =y\ (y-4)-3(y-4) = (y-4)(y-3)$$

আমরা সোপান (ii) থেকে সোজাসুজি উৎপাদকদ্বয় (y-4) এবং (y-3) কে লিখতে পারব।

(iii) x^2-x-30

এখানে গুণফল (-30) এবং যোগফল (-1) তাই উদ্দিষ্ট সংখ্যাদ্বয়ে -6 এবং 5

$x^2-x-30=x^2+\{(-6)+5\}x+(-6)5$

$=x^2-6x+5x+(-6)5$

$=x(x-6)+5(x-6)=(x-6)(x+5)$

অনুশীলনী-4(c)

উৎপাদক বিশ্লেষণ করো।

1. (i) $a^2+8a+15$ (ii) x^2+5x+6 (iii) x^2+7x+6

(iv) $x^2+8x+12$ (v) $x^2+11x+24$ (vi) x^2+2x+1

2. (i) $p^2-10p+24$ (ii) $x^2-8x+12$ (iii) $x^2-7x+10$

(iv) $x^2-9x+14$ (v) $x^2+4x-21$ (vi) x^2-3x+2

3. (i) a^2-4a-5 (ii) $x^2-11x-42$ (iii) $x^2-4x-21$

(iv) x^2-x-90 (v) $x^2-2x-63$ (vi) x^2-x-2

4. (i) $(a+1)^2+16(a+1)+60$

সূচনা (a+1)-কে p রূপে নিয়ে প্রদত্ত পরিপ্রকাশকে লিখলে রাশিটি হবে $p^2+16p+60$ তারপর উৎপাদক বিশ্লেষণ করা যাবে।

(ii) $(a+3)^2-14(a+3)+45$ (iii) $(x-2)^2+2(x-2)-8$

5. $(a+7)(a-10)+16$

6. $(x-2y)^2-5(x-2y)+6$

4.4 বিভিন্ন অভেদ সাহচর্য্য উৎপাদক নির্ণয় (Factorisation using different Identities) :

পূর্ব অধ্যায় কয়েকটি অভেদের ধারণা তোমরা পেয়েছ। সেগুলিকে মনে ফেল। উৎপাদক বিশ্লেষণের আবশ্যক অভেদগুলি নিচে দেওয়া গেছে।

(i) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

(ii) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(iii) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(iv) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

(v) $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca=(a-b+c)^2$

(vi) $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca=(a+b-c)^2$

(vii) $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca=(a-b-c)^2$

বণ্টন নিয়ম ব্যবহার করে উপরোক্ত অভেদগুলি প্রমাণ করবে।

উদাহরণ 9 : $x^2+6xy+9y^2$র উৎপাদকীকরণ দেখাও।

সমাধান :

$x^2+6xy+9y^2 = (x)^2+2.x.3y+(3y)^2$

$= (x+3y)^2 =(x+3y) (x+3y)$ অভেদ-1

উদাহরণ 10 : $4a^2-4ab+b^2$ উৎপাদক নির্ণয় করো।

সমাধান :

$4a^2-4ab+b^2 = (2a)^2-2.(2a)b+(b)^2 = (2a-b)^2$

$= (2a-b) (2a-b)$ অভেদ-2

উদাহরণ 11 : $9x^2+4y^2+z^2+12xy+6xz+4yz$ উৎপাদক নির্ণয় করো।

সমাধান :

$9x^2+4y^2+z^2+12xy+6xz+4yz$

$= (3x)^2+(2y)^2+(z)^2+2(3x)(2y)+2(3x)z+2(2y)z$

$= (3+2y+z)^2$

$= (3x+2y+z)(3x+2y+z)....$ অভেদ-4

উদাহরণ 12 : $4x^2+9y^2+z^2-4xz-12xy+6xz$ উৎপাদক নির্ণয় করো।

সমাধান :

$4x^2+9y^2+z^2-4xz-12xy+6xz$

$= (2x)^2+(3y)^2+(z)^2-2\ (2x)z-2(2x)\ (3y)+2\ (3y)z$

$= (2x-3y-z)^2 = (2x-3y-z)\ (2x-3y-z)$

উদাহরণ 13 : $9x^2-16y^2$ -র উৎপাদক নির্ণয় করো।

সমাধান :

$9x^2-16y^2 = (3x)^2-(4y)^2$

$= (3x+4y)\ (3x-4y)$ অভেদ-3

উদাহরণ 14 : $a^2+2ab+b^2-4c^2$ উৎপাদক নির্ণয় করো।

সমাধান :

$a^2+2ab+b^2-4c^2 = (a+b)^2-(2c)^2$ অভেদ-1

$= (a+b+2c)\ (a+b-2c)$ অভেদ-3

উদাহরণ 15 : দুটি পূর্ণবর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করে উৎপাদক নিরূপণ করো।

(i) $x^2-2x-323$ (ii) $x^2+6x-4087$

সমাধান : (i) $x^2-2x-323$

$= (x)^2-2.x.1+(1)^2-(1)^2-323$ অভেদ-2

$= (x-1)^2-324=(x-1)^2-(18)^2$ অভেদ-3

$= (x-1+18)\ (x-1-18)$

$= (x+17)\ (x-19)$

(ii) $x^2+6x-4087$

$= x^2+2x.3+(3)^2-(3)^2-4087$

$= (x+3)^2-4096=(x+3)^2-(64)^2$ অভেদ-1

$= (x+3+64)\ (x+3-64)=(x+67)(x-61)$ অভেদ-3

উদাহরণ 16 : a^4+4b^4 উৎপাদক বিশ্লেষণ করো।

সমাধান : $a^4+4b^4=(a^2)^2+(2b^2)^2=(a)^2+(2b^2)^2+2.a^2.2b^2-2a^2.2b^2$

$=(a^2+2b^2)^2-4a^2b^2$ অভেদ-1

$=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2=(a^2+2b^2+2ab)\ (a^2+2b^2-2ab)$ অভেদ-3

$=(a^2+2ab+2b^2)\ (a^2-2ab+2b^2)$

অনুশীলনী-4(d)

সূত্র প্রয়োগ করে উৎপাদক নির্ণয় করো। (1 থেকে 7 নম্বর পর্যন্ত)।

1. (i) $4x^2+4x+1$ (ii) $9b^2+12bc+4c^2$ (iii) $16a^2+40ab+25b^2$
   (iv) $49x^2+112xy+64y^2$ (v) $a^4+6a^2b^2+9b^4$
2. (i) $9x^2-6x+1$ (ii) $16x^2-40xy+25y^2$ (iii) $49a^2-126ab+81b^2$
   (iv) $64a^2-16a+1$ (v) $100a^4-20a^2b+b^2$
3. (i) $16x^2+9y^2+25z^2+24xy+40xz+30yz$
   (ii) $9x^2+25y^2+z^2+70xy+10zy+14xy$
   (iii) $4a^2+9b^2+c^2+12ab+4ac-6bc$
   (iv) $x^4+y^2+z^2-2x^2y-2x^2z+2yz$
   (v) $100a^2+81b^2+49c^2-180ab-140ac+126bc$
4. (i) $16a^2-9b^2$ (ii) $25a^2-36b^2$ (iii) $81a^2-100b^2$
   (iv) $16a^2+49b^2$ (v) $144a^2-225b^2$ (vi) $256a^2-289b^2$
   (vii) $400a^2-225b^2$ (viii) $441a^2-900b^2$ (ix) $121a^2-289b^2$
   (x) $81a^2-361b^2$ (xi) $(a+b)^2-c^2$ (xii) $(a)^2-(b-c)^2$
5. (i) a^4+a^2+1 (ii) $4x^4+1$ (iii) $x^4+36x^2y^2+1296y^4$
   (iv) $x^4+9x^2y^2+81y^4$ (v) x^4+16x^2+256
6. (i) $a^2+6a+9-b^2$ (ii) $a^2-4a+4-c^2$
   (iii) $4a^2-4a+1-9b$ (iv) $a^2-6ab+9b^2-16c^2$
   (v) $16a^2-24ab+9b^2-25c^2$
7. দুটি পূর্ণবর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করে সমাধান করো।
   (i) $x^2-2x-195$ (ii) $x^2+4x-357$ (iii) $x^2+6x-112$
   (iv) $x^2+2x-899$ (v) $x^2-4x-621$ (vi) $x^2-10x-171$
   (vii) $x^2-6x-891$ (viii) $x^2+4x-192$

⌘⌘⌘⌘⌘

সূচক তত্ত্ব (THEORY OF INDICES)

অধ্যায় ৫

5.1 উপক্রমণিকা (Introduction) :

পূর্বে শ্রেণীতে আমরা পরিমেয় সংখ্যা অথবা পূর্ণ সংখ্যা আধার এবং গণন সংখ্যা ঘাতবিশিষ্ট ঘাতরাশি সম্পর্কে পড়েছি। এতদ্ব্যতীত উপরোক্ত ঘাতরাশি সম্বন্ধীয় নিয়মগুলি ভালোভাবে জানতে পেরেছি। এই অধ্যায়ে পূর্ণসংখ্যা ঘাতঙ্ক এবং পরিমেয় সংখ্যা ঘাতঙ্ক বিশিষ্ট ঘাতরাশি সম্বন্ধে আলোচনা করব এর সম্পর্কিত নিয়মগুলি মধ্য আলোচনা করব।

আমরা জানি $5\times5\times5 = 5^3$ যেখানে 5^3 একটি ঘাতরাশি এবং 5 ও 3 যথাক্রমে ঘাতরাশি আধার এবং ঘাত। সেরকম $(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2) = (-2)^4$। এখানে মধ্য $(-2)^4$ একটি ঘাতরাশি এবং -2 ও 4 যথাক্রমে ঘাতরাশির আধার ও ঘাত।

তাই মনে রাখা উচিত যে,

> $a\times a\times a.......\ m = a^m$ যেখানে a একটি পূর্ণসংখ্যা তখন পরিমেয় সংখ্যা এবং m একটি গণন সংখ্যা। a^m একটি ঘাতরাশি এবং a ও m যথাক্রমে ঘাতরাশির আধার ও ঘাতঙ্ক।

5.2 ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (গণন সংখ্যা) ঘাতঙ্ক বিশিষ্ট ঘাতরাশি

এই অধ্যায়ে পূর্ণসংখ্যা এবং পরিমেয় সংখ্যা ঘাতঙ্ক বিশিষ্ট ঘাতরাশি সম্বন্ধে আলোচনা করব। পূর্বে আমরা প্রথমে গণন সংখ্যা ঘাতঙ্ক বিশিষ্ট ঘাতরাশি সম্বন্ধে আলোচনা করব। প্রত্যেক ঘাতরাশি (গণন সংখ্যা ঘাতঙ্ক বিশিষ্ট) মান থাকে।

যেমন- $2^3 = 2\times2\times2 = 8(-4)^2 = (-4)\times(-4) = 16$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{243}$$

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^4 = \left(\frac{-2}{3}\right)\times\left(\frac{-2}{3}\right)\times\left(\frac{-2}{3}\right)\times\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{(-2)^4}{(3)^4} = \frac{16}{81}$$ ইত্যাদি

নিজে করো

1. নিম্নলিখিত সংখ্যাকে ঘাতরাশিতে পরিণত করো।

(a) 625 (b) -27 (c) 243 (d) 1000 (e) $\frac{4}{9}$

2. নিম্নঘাত রাশিগুলির মান স্থির করো।

(a) 6^3 (b) $(-8)^3$ (c) $(12)^2$ (d) $(-11)^3$ (e) $\left(\frac{-1}{5}\right)^3$

অনুশীলনী- 5 (a)

1. নীচের রাশিগুলিকে x^n ঘাতরাশি রূপে পরিণত করো।

(i) $2\times2\times2\times2$ (ii) $(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)$

(iii) $\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)$ (iv) $\left(-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{7}\right)$

(v) $\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}$ (vi) $y\times y\times y\times y\times y$

(vii) (-p) (-p) (-p) (viii) (a-b) (a-b) (a-b) (a-b)

(ix) (a+b) (a+b) (a+b) (x) $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)$

2. নীচের ঘাতরাশিদের আধার ও ঘাতঙ্ক দেখিয়ে মান নির্ণয় করো।

(i) $(1)^{15}$ (ii) $(-1)^{11}$ (iii) $(-1)^{18}$ (iv) $(9)^5$ (v) $(-2)^5$

(vi) $\left(\frac{1}{6}\right)^6$ (vii) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ (viii) $(5\times2)^4$ (ix) $(10)^7$ (x) $(-10)^5$

3. নীচের সারণীতে শূন্যস্থান পূরণ করো।

আধার	2	-3			7	4	$-\frac{1}{2}$	
ঘাতঙ্ক	6	6	5	4			7	5
মান		32	625	2401	1024		$\frac{-1}{243}$	

4. নিচের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও।

(i) 10-এর চতুর্থ ঘাত কত? (ii) 5 কোন ঘাত 625?

(iii) $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)$ কোন ঘাত? (iv) কোন আধার তৃতীয় ঘাত $\frac{-27}{8}$?

5. নিচের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও।

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)$ আধারের ষষ্ঠ ঘাত $\frac{4}{9}$ আধারের কোন ঘাত সহিত সমান?

(ii) 5 আধারের চতুর্থ ঘাত, কোন আধারের দ্বিতীয় ঘাত সহিত সমান?

(iii) 256 যে আধারের চতুর্থ ঘাত, তার তৃতীয় ঘাত কত?

5.3 ঘাত রাশিদের গুণন ও ভাগক্রিয়া

তোমরা পড়ে থাকা গণন সংখ্যা ঘাতঙ্ক বিশিষ্ট ঘাত রাশি সম্বন্ধীয় নিয়ম সমূহকে এসো জেনে নেব। বিশেষত 8 গুণ এবং ভাগ সম্পর্কীয় আলোচনা করব।

নিয়ম- 1: 'a' এক অনশূন্য পরিমেয় সংখ্যা এবং m ও n দুটি গণন সংখ্যা হলে

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

উদাহরণ- 1: $2^3 \times 2^4$ একটি ঘাতরাশিতে প্রকাশ করো।

সমাধান : $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$ নিয়ম (1)

উদাহরণ-2 : $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$ একটি ঘাত রাশির প্রকাশ করে।

সমাধান-: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$ নিয়ম (1)

নিয়ম-2: (1) 'a' একটি অনশূন্য পরিমেয় সংখ্যা এবং m ও n দুটি গণন সংখ্যা m>n হলে $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(ii) 'a' একটি অনশূন্য পরিমেয় সংখ্যা এবং m ও n দুটি গণন সংখ্যা n>m হলে $a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$

উদাহরণ-3 : $\left(\frac{4}{3}\right)^7 + \left(\frac{4}{3}\right)^4$ একঘাত রাশিতে প্রকাশ করো।

সমাধান : $\left(\frac{4}{3}\right)^7 \div \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \left(\frac{4}{3}\right)^{7-4} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$ নিয়ম 2(i)

উদাহরণ-4 : $\left(\frac{4}{3}\right)^2 \div \left(\frac{4}{3}\right)^5$ ঘাত রাশিতে প্রকাশ করো।

সমাধান : $\left(\frac{4}{3}\right)^2 \div \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^{5-2}} = \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^3}$ নিয়ম 2 (ii)

নিয়ম 3: 'a' একটি অনশূন্য পরিমেয় সংখ্যা এবং m ও n দুটি গণন সংখ্যা হলে

$(am)^n = a^{mn}$ হবে।

উদাহরণ 5 : $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\}^2$ -কে এক ঘাত রাশিতে প্রকাশ করো।

সমাধান ঃ $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\}^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3\times2} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$

নিয়ম-4 a ও b দুটি অনশূন্য পরিমেয় সংখ্যা এবং m একটি গণন সংখ্যা হলে

$(a\times b)^m = a^m \times b^m$ এবং $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ **হবে।**

উদাহরণ 6 : $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2$ -কে এক ঘাত রাশিতে প্রকাশ করো।

সমাধান ঃ $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{4} \times \frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$

উদাহরণ 7 : $\left(\frac{5}{7}\right)^3 \div \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \left(-\frac{5}{7} \div \frac{5}{7}\right)^2 = (1)^3 = 1$

মনে রাখো :

(i) m একটি যুগ্ম গণন সংখ্যা হলে $(-1)^m = 1$
(ii) m একটি অযুগ্ম গণন সংখ্যা হলে $(-1)^m = -1$

উদাহরণ 8 : $\frac{2^3 \times 3^4}{3 \times 2^5}$ কে সরল করো।

$$\frac{2^3 \times 3^4}{3 \times 2^5} = \left(\frac{2^3}{2^5}\right) \times \left(\frac{3^4}{3}\right) = \frac{1}{2^{5-3}} \times 3^{4-1} = \frac{1}{2^2} \times 3^3 = \frac{27}{4}$$

উদাহরণ 9 : $\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \times \frac{216}{125}}{\left(\frac{6}{5}\right)^2 \times \frac{4}{9}}$ কে সরল করো।

সমাধান : $\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \times \frac{216}{125}}{\left(\frac{6}{5}\right)^2 \times \frac{4}{9}} = \dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{6}{5}\right)^3}{\left(\frac{6}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-2}{3}\right)^2} = \left(\frac{-2}{3}\right)^{4-2} \times \left(\frac{6}{5}\right)^{3-2} = \left(\frac{-2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{6}{5}\right) = \frac{4}{9} \times \frac{6}{5} = \frac{8}{15}$

নিজে করো নীচে ঘাত রাশি বিশিষ্ট পরিপ্রকাশগুলি সরল করো।

(i) $\left(\frac{2}{9}\right)^5 \div \left(\frac{-2}{9}\right)^4$ (ii) $\left(\frac{1}{25}\right)^4 \div 5^4$ (iii) $\frac{3^8 \times a^5}{27 \times a^2} (a \neq 0)$

(iv) $(4^2 \times 4^3) \div 4^5$ (v) $\left(\frac{-2}{3}\right)^9 \div \left(\frac{2}{3}\right)^7$ (vi) $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}^2 \div \left(\frac{1}{4}\right)^3$

অনুশীলনী-5(b)

1. নীচে রাশিগুলি একটি আধার বিশিষ্ট ঘাতরাশি রূপে প্রকাশ করো।

(i) $3^6 \times 3^4$ (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$ (iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$ (iv) $(4)^6 \times (-4)^3$

(v) $\left(\frac{3}{2}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4$ (vi) $(-4)^6 \times (4)^3$ (vii) $(9)^3 \times (27)^4$ (viii) $(8)^3 \times (-4)^4$

(ix) $(7)^8 \times (-7)^5$ (x) $8^5 \div (4)^4$ (xi) $\{(5)^3\}^4$ (xii) $\{(-2)^3\}^4$

(xiii) $\frac{74}{34}$ (xiv) $3^9 \div 4^9$ (xv) $\left(\frac{a}{b}\right)^7 \div \left(\frac{b}{a}\right)^3$ (xvi) $\left(\frac{a}{b}\right)^4 \div \left(\frac{-b}{a}\right)^3$

2. মান নির্ণয় করো।

(i) $3^4 \times 3^3 \div 3^5$ (ii) $(3^{11} \times 4^5) \div (4^4 \times 3^6)$

(iii) $(4^3 \times 4^2 \times 4) \div (2^4 \times 2^3 \times 2^2)$ (iv) $2^{11} \div 8^3 \times 4^2$ (v) $\left(\frac{3}{2}\right)^6 \div \left(\frac{2}{3}\right)^2$

3. সরল করো।

(i) $(2^2 \times 2^3)$ (ii) $(ab)^5 \times a^3 \times b^2$ (iii) $\left(\frac{a}{b}\right)^7 \times a^6 \times b^5 \times \left(\frac{b}{a}\right)^6$

(iv) $3^9 \times 3^5 \div 9^7$ (v) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \div \left(\frac{2}{3}\right)^9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$

4. মৌলিক আধার বিশিষ্ট ঘাত রাশিতে প্রকাশ করো।

(i) $(64)^3$ (ii) $(9)^7$ (iii) $(125)^{m-1}$ (iv) $(-8)^{11}$

5. নিম্নলিখিত উক্তি মধ্যে ঠিক উক্তির জন্য (T) ও ভুল উক্তির জন্য (F) লেখ।

(i) $2^3 \times 3^5 = 6^8$ (ii) $3^5 \times 5^5 = 15^5$ (iii) $(4^3)^4 = (4)^7$

(iv) $(5^2)^4 = 5^6$ (v) $(3)^3 \times (3)^3 = 3^6$ (vi) $(a^3b^5) = (ab)^{15}$

(vii) $(2^3 \times 3^3) = 6^3$ (viii) $\left(\frac{3}{4}\right)^6 \div \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^4$ (ix) $(-3)^4 \times (3)^5 \times (-3)^2 = (-3)^{11}$

(x) $-3^4 \times 3^3 = -3^7$

6. কোন ক্ষেত্রতে বা একটি গণন সংখ্যা হবে?

(i) $2^n = 32$ (ii) $5^n = 100$ (iii) $4^n = 512$ (iv) $4^n = 1024$

(v) $3^n = 729$ (vi) $5^n = 1250$ (vii) $7^n = 3\ 43$ (viii) $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{64}$

(ix) $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{32}{15}$ (x) $(-2)^n = -512$

5.4 পূর্ণ সংখ্যা ঘাতঙ্কবিশিষ্ট রাশি।

আমরা জানি a^3, 3 সংখ্যক a-র গুণফল, সেরকম আমরা a^0 এবং a^{-2} -কে কেমন বুঝব? আমরা কি বলতে পারব—

a^0, 0 সংখ্যক a-র গুণফল। অথবা a^{-2}, -2 সংখ্যক a-র গুণফল। উপরিস্থ উক্তিদ্বয় অর্থহীন। তাই আমরা a^0 ও a^{-2} মতন ঘাতরাশির সংজ্ঞা নীচে মতে প্রকাশ করব।

সংজ্ঞা $a^0 = 1$, $a \neq q$, $a \neq 0$ এবং

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \in Q,\ a \neq 0,\ n \in N$$

মনে রাখো 0^0 সংজ্ঞাকৃত না

অনুসিদ্ধান্ত– 1 $a^n \times a^{-n} = 1\ (a \neq 0,\ a \in Q,\ n \in N)$

অনুসিদ্ধান্ত– 2 $1 \div a^{-n} = a^n\ \ a \neq 0,\ a \in Q,\ n \in N$

উদাহরণ-10 : মান নির্ণয় করো: (i) $(3)^{-3}$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$

সমাধান : (i) $(3)^{-3}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}=\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^4}=\frac{\frac{1}{81}}{256}=\frac{256}{81}$

উদাহরণ-11 : ঋণাত্মক ঘাতঙ্ক বিশিষ্ট ঘাতরাশির প্রকাশ করো।

(i) 2^3, (ii) 729 (iii) $\left(\frac{3}{2}\right)^5$ (iv) $\frac{1}{343}$ (v) $\frac{243}{32}$

সমাধান : (i) $2^3=\frac{1}{2^{-3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ (ii) $729=3^6=\frac{1}{3^{-6}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}$

(iii) $\left(\frac{3}{2}\right)^5=\left\{\frac{1}{\frac{3}{2}}\right\}^{-5}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$ (iv) $\frac{1}{343}=\frac{1}{7^3}=7^{-3}$

(v) $\frac{243}{32}=\frac{1}{\frac{32}{243}}=\left(\frac{32}{243}\right)^{-1}=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^5\right\}^{-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$

মনে রাখো:

a ও b অশূন্য পরিমেয় সংখ্যা এবং m ও n এক একটি পূর্ণসংখ্যা হলে
(i) $a^m\times a^n=a^{m+a}$ (ii) $a^m\div a^n=a^{m-n}$ (m<n)
(iii) $(a^m)^n=a^{mn}$ (iv) $(ab)^m=a^m\times b^m$ এবং $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$ হবে।

কয়েকটি বিশেষ ঘাত রাশি

মনে রাখো : (i) $(1)^{-10}=\frac{1}{10^{10}}=\frac{1}{1}=1$

(ii) $(-1)^{-8}=\frac{1}{(-1)^8}=\frac{1}{1}=1$ ঘাতঙ্ক একটি যুগ্ম সংখ্যা

(iii) $(-1)^{-11}=\frac{1}{(-1)^{11}}=\frac{1}{-1}=-1$ ঘাতঙ্ক একটি যুগ্ম সংখ্যা

লক্ষ করো : $a\neq 0,\ b\neq 0,\ n\in N$ হলে $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n}=\frac{1}{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{b^n}{a^n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$

তাই আমরা পেলাম $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$ $a, b\in Q,\ a\neq 0,\ b\neq 0,\ n\in N$

উদাহরণ-12 : পরিমেয় সংখ্যাতে প্রকাশ করো: (i) $(0.1)^{-3}$, (ii) $(0.01)^{-2}$

সমাধান : (i) $(0.1)^{-3}=\frac{1}{(0.1)^3}=\frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^3}=\frac{\frac{1}{1}}{10^3}=10^3=1000$

(ii) $(0.01)^{-2}=\frac{1}{(0.01)^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{100}\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{100}\right)^2}=(100^2)=10000$

অনুশীলনী- 5 (c)

1. নীচের রাশিদের মানকে পরিমেয় সংখ্যায় প্রকাশ করো

(i) 2^{-2} (ii) 2^{-4} (iii) 3^{-3} (iv) 3^{-5}

(v) 10^{-4} (vi) 5^{-3} (vii) 20^{-3} (viii) 50^{-3}

(ix) 100^{-1} (x) $(0.1)^{5}$ (xi) $(-1)^{-1}$ (xii) $(-1)^{-27}$

2. ঘাতঙ্ক বিহীন মান নির্ণয় করো।

(i) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ (ii) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$ (iii) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-4}$ (iv) $(0.2)^{3}$

(v) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$ (vi) $\left(\frac{3}{10}\right)^{-3}$ (vii) $(-1)^{-101}$ (viii) $(-1)^{1000}$

3. ঋণাত্মক ঘাতঙ্ক বিশিষ্ট রাশিতে প্রকাশ করো।

(i) 3^{6} (ii) 6^{3} (iii) -216 (iv) 625

(v) 343 (vi) $\frac{1}{512}$ (vii) $\frac{64}{729}$

5.5 পরিমেয় ঘাতঙ্ক বিশিষ্ট রাশি

n পূর্ণসংখ্যা হলে a^n সম্পর্কে আমরা পূর্বের আলোচনা করেছি। বর্তমান n একটি পরিমেয় সংখ্যা হলে a^n -র সংখ্যা প্রকরণ করব।

মনে করো $a \in Q$ ও $a > 0$। যদি n একটি গণন সংখ্যা হয়, তবে একটি নির্দিষ্ট পরিমেয় সংখ্যা x আছে। যেমন– $x^n = a$।

এখানে x-কে আমরা $\sqrt[n]{a}$ বা $a^{\frac{1}{n}}$ ভাবে লিখতে পারব ও একে a র n তম মূল বলি।
$x^n = a \rightarrow x = a^{\frac{1}{n}}$ বা $\sqrt[n]{a}$। $a > 0$ ফলে তুমি জানলে $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

কিন্তু এখানে $\sqrt[n]{a}$ একটি পরিমেয় সংখ্যা সবসময় নাও হতে পারে। এটি একটি বস্তুর সংখ্যা হতে পারে। যার সাথে আমরা পরবর্তী শ্রেণীতে পরিচিত হব। তাই পরবর্তী শ্রেণীতে আমরা বস্তুর সংখ্যা আধার এবং পরিমেয় ঘাতঙ্ক বিশিষ্ট ঘাতরাশিতে আলোচনা করব। কিন্তু এখানে কয়েকটি উদাহরণ আলোচনা করব, যে সব ক্ষেত্রে $\sqrt[n]{a}$ একটি পরিমেয় সংখ্যা হবে।

উদাহরণস্বরূপ $a^5 = 32$ হলে $a = \sqrt[5]{32}$ বা $(32)^{\frac{1}{5}}$ অর্থাৎ 32-য়ের পঞ্চম মূল a=2

এখানে পরিমেয় আধার ও পূর্ণসংখ্যা ঘাতঙ্ক বিশিষ্ট ঘাত রাশির জন্যে যে নিয়মগুলি প্রযোজ্য, পরিমেয় আধার এবং পরিমেয় ঘাতঙ্ক বিশিষ্ট ঘাতরাশির জন্য মধ্য সেই নিয়মগুলি প্রযোজ্য।

সেগুলি হল

$a^m \times a^n = a^{m+n}$	a, b>0
$a^m \div a^n = a^{m-n}$	a, $b \in Q$
$(am)^n = a^{mn}$	m, $n \in Q$
$(ab)^m = a^m \times b^m$ এবং $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	

উদাহরণ 13 : পরিমেয় সংখ্যা প্রকাশ করো।

(i) $(343)^{\frac{1}{3}}$ (ii) $(1024)^{\frac{1}{5}}$ (iii) $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{2}{5}}$

সমাধান : (i) $(343)^{\frac{1}{3}}=(7\times7\times7)^{\frac{1}{3}}=(7^3)^{\frac{1}{3}}=7^{3\times\frac{1}{3}}=7$

(ii) $(1024)^{\frac{1}{5}}=(4\times4\times4\times4\times4)^{\frac{1}{5}}=(4^5)^{\frac{1}{5}}=4^{5\times\frac{1}{5}}=4$

(iii) $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{2}{5}}=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^5\right\}^{\frac{2}{5}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{5\times\frac{2}{5}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

উদাহরণ 14 : সরল করো: $(0.4)^2\times(0.125)^{\frac{1}{3}}\div\left(2\frac{1}{2}\right)^{-3}$

সমাধান : $(0.4)^2\times(0.125)^{\frac{1}{3}}\div\left(2\frac{1}{2}\right)^{-3}=0.16\times\left\{(0.5)^3\right\}^{\frac{1}{3}}\div\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$

$=(0.16)\times(0.5)^{3\times\frac{1}{3}}\div\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{16}{100}\times\frac{5}{10}\div\frac{8}{125}=\frac{2}{25}\times\frac{125}{8}=\frac{5}{4}$

অনুশীলনী-5 (d)

1. নিম্ন সংখ্যাগুলি পরিমেয় সংখ্যায় প্রকাশ করো।

(i) $64^{\frac{2}{3}}$ (ii) $16^{1\frac{1}{4}}$ (iii) $125^{1\frac{2}{3}}$ (iv) $\left(\frac{81}{625}\right)^{\frac{1}{4}}$

(v) $\left(\frac{1}{216}\right)^{\frac{-2}{3}}$ (vi) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-1\frac{1}{3}}$

2. সরল করো।

(i) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{2}$ (ii) $8^3\times4^{\frac{1}{2}}\div16^2$ (iii) $27^{1\frac{1}{3}}\times\sqrt{\frac{1}{9}}\div81^{\frac{-1}{4}}$

(iv) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\times4^0\times\left(1\frac{1}{3}\right)^{-1}$ (v) $\left(\sqrt[2]{25}\right)^2\times(125)^{\frac{1}{3}}\times(625)^{\frac{1}{4}}$ (vi) $(343)^{\frac{1}{3}}\times(49)^{\frac{1}{2}}\div14$

3. সরল করো।

(i) $\left(a^l\right)^{m-n}\times\left(a^m\right)^{n-l}\times\left(a^n\right)^{l-m}$ $(a\neq0)\ (l,m,n\in Q)$

(ii) $\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{p+Q}\times\left(\frac{a^q}{a^r}\right)^{q+r}\times\left(\frac{a^r}{a^p}\right)^{r+p}$ $(a\neq0),(p,q,r\in Q)$

4. গুণফল স্থির করো।

(i) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$ $(a>0,\ b>0)$ (ii) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$ $(x>0,\ y>0)$

⌘⌘⌘⌘⌘

বর্গ-বর্গমূল এবং ঘন-ঘনমূল
(SQUARE-SQUARE ROOTS & CUBE-CUBE ROOTS)

অধ্যায়
৬

6.1 উপক্রমণিকা (Introduction) :

পূর্ব অধ্যায়ে পরিমেয় আধার এবং পূর্ণসংখ্যা ঘাতঙ্ক বিশিষ্ট ঘাতরাশি সম্পর্কে আলোচনা করা গিয়েছে। যদি আধার ‘a’ এবং ঘাত 2 হয় তবে ঘাতরাশিটি হবে a^2 । দুটি ‘a’-র গুণফলকে a^2 ভাবে প্রকাশ করা যায়। a^2 কে a-র বর্গ বা দ্বিতীয় ঘাত বলা যায়। অর্থাৎ $a\times a=a^2$

সেরকম $a\times a\times a=a^3$ অর্থাৎ তিনটি a-র গুণফলকে a-র ঘন বা a-র তৃতীয় ঘাত ভাবে প্রকাশ করা যায়।

অতএব কোনো সংখ্যাকে সেই সংখ্যার দ্বারা গুণ করলে, গুণফলকে উক্ত সংখ্যার বর্গ বলা যায়। এবং সংখ্যাটিকে উক্ত বর্গ সংখ্যার বর্গমূল বলা যায়। বর্গসংখ্যা এবং তাদের বর্গমূল সম্বন্ধে আলোচনা করব এই অধ্যায়ে একটি উদ্দেশ্য। এর ব্যতীত ঘনমূল নির্ণয় প্রণালীর আলোচনা মধ্য এই অধ্যায়ে অন্য একটি উদ্দেশ্য। বর্গনির্ণয় এবং ঘন নির্ণয় কিছু সংক্ষিপ্ত প্রণালী আলোচনা সহিত গাণিতিক সংরচনার মাধ্যমে এগুলির উপস্থাপনা উক্ত অধ্যায়ে করা গেছে।

6.2 সংখ্যার বর্গ এবং পূর্ণবর্গ সংখ্যা (Square of Number and perfect Square Number) : যদি m একটি পূর্ণসংখ্যা ও n একটি গণন সংখ্যা এবং $n=m^2$ হয় তবে ‘n’ একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা (perfect Square Number) হবে।

উদাহরণস্বরূপ $2\times2=2^2$, $2^2=4$ তাই 2-র বর্গ ‘4’। সেরকম (-2)-র বর্গ 4।

4-এর বর্গমূলকে ±2 ভাবে লেখা যায়।

0 ও ±1 থেকে ±10 পর্যন্ত পূর্ণসংখ্যার বর্গর সারণী।

সারণী-6.1

সংখ্যা	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	± 7	± 8	± 9	± 10
বর্গ	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

গণন সংখ্যাদের মধ্যে 1, 4, 9, 16, 25... আদি গণন সংখ্যাকে পূর্ণবর্গ সংখ্যা বলা যায়। প্রকাশ থাক প্রত্যেক গণনসংখ্যা বা স্বাভাবিক সংখ্যা বর্গ সংখ্যা না। বর্গ সংখ্যার প্রত্যেক মৌলিক গুণনীয়কগুলিকে জুড়ে জুড়ে সাজিয়ে লিখতে হবে।

উদাহরণস্বরূপ: $576 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

পরবর্তী অনুচ্ছেদে এর বিস্তৃত আলোচনা করা যাবে।

6.3 পূর্ণবর্গ সংখ্যা সম্বন্ধীয় কয়েকটি ধর্ম (Some Properties og Perfect Square numbers) :

(a) প্রত্যেক পূর্ণবর্গর সংখ্যা একক স্থানীয় অঙ্কটি 0, 1, 4, 5, 6 কিংবা 9 হবে। কিন্তু 2, 3, 7, 8 কোনো পূর্ণসংখ্যা একক স্থানীয় অঙ্ক হবে না।

কোনো সংখ্যার শেষে অযুগ্ম সংখ্যক শূন্য থাকলে সেই সংখ্যাটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে না।

(b) অযুগ্ম সংখ্যার বর্গ একটি অযুগ্ম সংখ্যা এবং যুগ্ম সংখ্যার বর্গ একটি যুগ্ম সংখ্যা হবে।

(c) নিম্ন সংরচনাকে লক্ষ করো।

$2^2=4=3\times1+1$	$2^2=4=4\times1$
$3^2=9=3\times3$	$3^2=9=4\times2+1$
$4^2=16=3\times5+1$	$4^2=16=4\times4$ ইত্যাদি।

1 থেকে বড় যে কোনো পূর্ণবর্গ সংখ্যাকে 3 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 0 কিংবা 1 থাকবে।

সেরকম **1 থেকে বড় যে কোনো পূর্ণবর্গ সংখ্যাকে 4 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 0 কিংবা 1 থাকবে।**

(d) **কোনো একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা n যদি কোনো একটি মৌলিক সংখ্যা p দ্বারা গুণ করা যায়। তবে গুণফল pn একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে না।** উদাহরণস্বরূপ 64 একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হলে এর 2 গুণ বা 3 গুণ এক একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে না।

(e) পিথাগোরীয় ত্রয়ী (Pythagorean triplets) :

এক সংখ্যাত্রয়ী m, n, p গণন সংখ্যা এবং m, n, p মধ্যে p বৃহত্তম সংখ্যা থেকে যদি $m^2+n^2=p^2$ হয়, তবে m, n, p-কে **পিথাগোরীয় ত্রয়ী (Pythagorean triplets)** বলে।

উদাহরণস্বরূপ 3, 4, 5 এবং 5, 12, 13 এক একটি পিথাগোরীয় ত্রয়ী হবে।

যে কোনো সংখ্যা $m(m>1)$ জন্য $(2m, m^2-1, m^2+1$ একটি পিথাগোরীয় ত্রয়ী হবে।

উদাহরণ : $m=5$ জন্য $2m=10$, $m^2-1=5^2-1=24$ এবং $m^2+1=5^2+1=26$

এখানে $10^2+24^2=26^2$ অর্থাৎ 10, 24, 26 সংখ্যাত্রয়কে পিথাগোরীয় ত্রয়ী বলে।

মনে রাখো :

(1) যদি $m(m>1)$ একটি অযুগ্ম সংখ্যা হয় তবে, $m, \frac{m^2-1}{2}$ ও $\frac{m^2+1}{2}$ একটি পিথাগোরীয় ত্রয়ী হবে।

(2) যদি $m\ (m>2)$ একটি যুগ্ম সংখ্যা হয় তবে, $m, \left(\frac{m}{2}\right)^2-1$ ও $\left(\frac{m}{2}\right)^2+1$ একটি পিথাগোরীয় ত্রয়ী হবে।

নিজে পরীক্ষা করে দেখো।

(f) নিম্ন সংরচনাকে লক্ষ করো।

$2^2-1^2=3=2+1$

$3^2-2^2=5=3+2$

$4^2-3^2=7=4+3$

এখান থেকে স্পষ্ট জানা যাচ্ছে যে **দুটি ক্রমিক পূর্ণবর্গ সংখ্যার অন্তর, সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টির সহিত সমান হবে। বিপরীত ক্রম কোনো একটি অযুগ্ম সংখ্যা দুটি ক্রমিক সংখ্যার বর্গর অন্তর রূপে প্রকাশিত হতে পারব।**

নীচের সংরচনাকে লক্ষ করো।

$$3=3.1=\left(\frac{3+1}{2}\right)^2+\left(\frac{3-1}{2}\right)^2=2^2-1^2$$

$$5=5.1=\left(\frac{5+1}{2}\right)^2-\left(\frac{5-1}{2}\right)^2=3^2-2^2$$

$$7=7.1=\left(\frac{7+1}{2}\right)^2-\left(\frac{7-1}{2}\right)^2=4^2-3^2$$ ইত্যাদি

(g) নীচের সংরচনাকে লক্ষ করো।

$1^2=1$	(প্রথম অযুগ্ম গণন সংখ্যা)
$2^2=1+3$	(প্রথম দুটি অযুগ্ম গণন সংখ্যার সমষ্টি)
$3^2=1+3+5$	(প্রথম তিনটি অযুগ্ম গণন সংখ্যার সমষ্টি)
$4^2=1+3+5+7$	(প্রথম চারটি অযুগ্ম গণন সংখ্যার সমষ্টি)

উক্ত সংরচনা থেকে স্পষ্ট যে কোনো সংখ্যার বর্গ প্রথম অযুগ্ম গণন সংখ্যা সমষ্টি সহিত সমান। উদাহরণস্বরূপ প্রথম আটটি অযুগ্ম গণন সংখ্যার সমষ্টি 8^2 সহিত সমান। অর্থাৎ

$1+3+5+7+9+11+13+15=8^2$ বা 64

অনুশীলনী-6 (a)

1. নিম্ন গণন সংখ্যাগুলির বর্গ নির্ণয় করো।

27, 37, 46, 118, 225

2. নিম্ন সংখ্যাগুলি এক একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা না, কারণ দর্শাও।

64000, 89722, 2220, 505050, 1057, 23453, 222222

3. নিম্নলিখিত সংখ্যাদের মধ্যে কোনগুলির বর্গ অযুগ্ম সংখ্যা এবং কোনগুলি বর্গ যুগ্ম সংখ্যা কারণ সহিত উত্তর দাও।

28, 113, 278, 314, 4315, 23872

4. 100 মধ্যে থাকা মৌলিক পিথাগোরীয় ত্রয়ী মান স্থির করো।
পিথাগোরীয় ত্রয়ীর মধ্যে যদি সংখ্যাগুলির মধ্যে কোনো সাধারণ গুণনীয়ক না থাকে তবে তারা মৌলিক সংখ্যাত্রয়ী হবে।

5. নিম্নলিখিত সংখ্যাদের দুটি বর্গর অন্তররূপে প্রকাশ করো।
19, 27, 31, 41, 53

6. কয়েকটি পিথাগোরীয় ত্রয়ীর একটি করে সংখ্যা নীচে দেওয়া গেছে। সূত্র প্রয়োগে পিথাগোরীয় ত্রয়ীগুলি লেখো।

7. নীচে প্রদত্ত সম্বন্ধগুলি বিভিন্ন সংরচনাগুলিকে দেখে শূন্যস্থান পূরণ করো।

(a) $1^2=1$
$11^2=121$
$111^2=12321$
$1111^2=1234321$
$11111^2=$ —
$111111^2=$ —

(b) $11^2=121$
$101^2=10201$
$1001^2=1002001$
$100001^2=$ —
$10000001^2=$ —

(c) $11^2=121$
$101^2=10201$
$10101^2=102030201$
$1010101^2=$ —
$101010101^2=$ —

(d) $1^2+2^2+2^2=3^2$
$2^2+3^2+6^2=7^2$
$3^2+4^2+12^2=13^2$
4^2+5^2+ — $=21^2$
5^2+ — $+30^2=$ —^{2}

(e) $11^2\times(11^2$ থাকা অঙ্কগুলি সমষ্টি)$=22^2$
(অর্থাৎ $11^2(1+2+3)=484=22^2$)
$111^2\times(111^2$ থাকা অঙ্কগুলির সমষ্টি $=333^2$)
$1111^2\times(1111^2$ থাকা অঙ্কগুলির সমষ্টি = —)
$11111^2\times(11111^2$ থাকা অঙ্কগুলির সমষ্টি = —)

(f) $7^2=49$
$67^2=4489$
$667^2=444889$
$6667^2=4444889$
$66667^2=$ —
$666667^2=$ —

8. শূন্যস্থান পূরণ করো।
$18^2-17^2=$ — $\quad$ $25^2-24^2=$ —
$112^2-111^2=$ — $\quad$ $171^2-170^2=$ —

9. নীচের উক্তিদের মধ্যে যে উক্তিগুলি ঠিক তার কাছে টিক (✓) চিহ্ন এবং যে সব উক্তিগুলি ভুল তার কাছে ক্রশ (×) চিহ্ন দাও।
(a) একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যাতে থাকা অঙ্কের সংখ্যা যুগ্ম।
(b) একটি মৌলিক সংখ্যার বর্গ একটি অযুগ্ম সংখ্যা।

(c) কোনো একটি যুগ্ম সংখ্যার বর্গ ঋণাত্মক সংখ্যা না।

(d) দুটি বর্গ সংখ্যার সমষ্টি একটি বর্গসংখ্যা।

(e) একটি অযুগ্ম সংখ্যার বর্গ একটি অযুগ্ম সংখ্যা।

(f) একটি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার বর্গ একটি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(g) একটি সংখ্যার বর্গের একক স্থানীয় অঙ্ক 1 হলে সংখ্যাটির একক স্থানীয় অঙ্ক সর্বদা 1 হবে।

6.4 সংক্ষিপ্ত বর্গ নিরূপণ প্রণালী (Short cut method to find square numbers) :

(a) একক স্থানে 5 থাকা সংখ্যার বর্গ নির্ণয়

লক্ষ্য করো: $15^2=225$, $25^2=625$, $35^2=1225$, $45^2=2025$

$55^2=3025$ ইত্যাদি। এখানে সংখ্যাটির একক স্থানে 5 থাকলে বর্গ সংখ্যার একক ও দশক স্থানের অঙ্ক যথাক্রমে 5 এবং 2 থাকছে। শতক স্থানে সংখ্যাটি দশক স্থানে অঙ্ক এবং তার পরবর্তী সংখ্যার গুণফল থাকছে।

লক্ষ করো: $15^2=(1\times2)\ 100+25.25^2=(2\times3)\ 100+25$ এবং

$35^2=(3\times4)\ 100+25...$

$125^2=(12\times13)100+25=15625$ ইত্যাদি।

এখানে ব্যবহৃত কৌশলটিকে অনুধ্যান করব।

প্রত্যেক সংখ্যার রূপ হচ্ছে $(10n+5)$ $n\in N$

$$\begin{aligned}\therefore(10n+5)^2 &=(10n)^2+2.10.n.5+(5)^2\\ &=100n+100n+25\\ &=\{n\times(n+1)\}100+25\end{aligned}$$

(b) $a^2-b^2=(a+b)\ (a-b)$ অভেদ প্রয়োগ সংখ্যার বর্গ নির্ণয়

$a^2-b^2=(a+b)\ (a-b)=a^2=(a+b)\ (a-b)+b^2....(1)$

এই সূত্র (1) প্রয়োগ এসো কয়েকটি সংখ্যার বর্গ নিরূপণ করব।

উদাহরণস্বরূপ $a=17$

এখানে দেখতে হবে 17-র নিকটবর্তী কোন সংখ্যাটি 10-র গুণিতক। 17-র নিকটবর্তী সংখ্যাটি 20।

$a=17$ থাকা সময়ে $b=3$ অর্থাৎ $(20-17)$ নেওয়া থাক।

$$\begin{aligned}17^2 &=(17+3)\ (17-3)+3^2 \quad a^2=(a+b)\ (a-b)+b^2\\ &=20\times14+9=289\end{aligned}$$

সেরকম এসো 36-র বর্গ নিরূপণ করো।

$a^2=(a+b)\ (a-b)+b^2$

যেহেতু 36-র নিকটবর্তী 10 গুণিতক সংখ্যা 40

$a=36$ হলে $b=4$ হবে।

$36^2=(36+4)\ (36-4)+4^2=40\times32+16=1280+16=1296$

(c) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ অভেদ প্রয়োগে সংখ্যার বর্গ নির্ণয়।

আমরা জানি $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)^x+ab$

$=(x+a)(x+b)=x(x+a+b)+ab$...(ii)

সূত্র (ii)-র প্রয়োগে এসো একটি সংখ্যার বর্গ স্থির করো।

$17^2 = (17\times17)$

$= (10+7)(10+7) = 10(10+7+7)+7\times7$

$= 10\times24+49 = 289$

এখানে লক্ষ করো $a = b = 7$ এবং আধার 10

সেরকম $36^2 = 36\times36$

$= (40-4)\times(40-4)$

$= 40\{40+(-4)+(-4)\}+\{(-4)\times(-4)\}$

এখানে $a = b =- 4$ আধার 40

$= 40\times32+16 = 1280+16 = 1296$

(d) $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ সূত্র প্রয়োগে সংখ্যার বর্গ নির্ণয়

প্রদত্ত অভেদ প্রয়োগে এসো একটি সংখ্যার বর্গ স্থির করো।

$13^2=(10+3)^2 = 100+60+3^2 = 16$ দশ+9 এক $(13+3)10+3^2 = 169$

সেরকম $14^2= (14+4)10+4^2 = 196$, $17^2 = (17+7)10+7^2 = 289$

এবং $18^2= (18+8)10+8^2=324$ ইত্যাদি।

সেরকম $108^2 = (100+8)^2=10000+1600+64$

$= (100+16)$ শত $+64$ এক

$= (100+2\times8)\ 100+8^2$

সেরকম $105^2 = (100+2\times5)100+5^2 = 11025$

এসো 9^2-র বর্গ স্থির করব যেখানে $(a^2-b^2) = a^2-2ab+b^2$ সূত্র

$92^2 = (100-8)^2=10000-1600+64 = (100-16)100+64$

$= (100-2\times8)100+8^2 = 8464$

$97^2 = (100-3)^2\ 10000-1600+9 = (100-6)100+9$

$= (100-2\times3)100+3^2 = 9409$

সেরকম $95^2=(100-5)^2=(100-2\times5)100+5^2=9025$

অন্যান্য কয়েকটি সংক্ষিপ্ত বর্গ নিরূপণ প্রণালী মধ্য আছে। সেগুলি তোমরা পরবর্তী শ্রেণীতে লিখবে।

6.5 পরিমেয় সংখ্যার বর্গ

আমরা জানি m, $n\in z$ ও $n\neq0$ হয় $\frac{m}{n}\in Q$ অর্থাৎ $\frac{m}{n}$ একটি পরিমেয় সংখ্যা। পরিমেয় সংখ্যার বর্গ নিরূপণ জন্য নীচে নিয়মকে দেখো।

$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m}{n}\times\frac{m}{n} = \frac{m\times n}{n\times n} = \frac{m^2}{n^2}$ তাই আমরা পাব $\boxed{\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}}$

উদাহরণ-1

পরিমেয় সংখ্যাগুলির বর্গ স্থির করো (i) $\frac{3}{5}$ (ii) 0.021 (iii) 0.02 (iv) 3.55

সমাধান(i) $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3^2}{5^2}=\frac{9}{25}$

(ii) $(0.021)^2=\left(\frac{21}{1000}\right)^2=\frac{(21)^2}{(1000)^2}=\frac{441}{1000000}=0.000441$

(iii) $(0.02)^2=\left(\frac{2}{100}\right)^2=\frac{4}{10000}=0.0004$

(iv) $(3.55)^2=\left(\frac{355}{100}\right)^2=\left(\frac{126025}{10000}\right)=12.6025$

[$355^2=(35\times36)100+25=126000+25=126025$]

উপরোক্ত উদাহরণ থেকে তোমরা জানলে মূল সংখ্যার দশমিক পরে একটি অঙ্ক থাকলে বর্গসংখ্যার দশমিক পরে তার দুই গুণ সংখ্যক অঙ্ক থাকবে। 3.55 যে দশমিক পরে দুটি অঙ্ক থাকায় এর বর্গ সংখ্যা দশমিক পরে চারটি অঙ্ক থাকবে। যেমন $(3.55)^2=12.6025$

উদাহরণ-2

নিম্ন পরিমেয় সংখ্যাগুলির মধ্যে কোনগুলি বর্গ সংখ্যা?

(i) $\frac{121}{625}$ (ii) 0.004 (iii) 2.56

সমাধান (i) $\frac{121}{625}=\frac{11\times11}{5\times5\times5\times5}=\frac{11^2}{(5\times5)^2}=\left(\frac{11}{25}\right)^2 \therefore \frac{121}{625}$ একটি পূর্ণসংখ্যা।

(ii) $0.004=\frac{4}{1000}=\frac{2^2}{1000}$

এখানে লক্ষ করো 1000 কোনো সংখ্যার বর্গ না। তাই 0.004 কোনো সংখ্যার বর্গ না।

(iii) $2.56=\frac{256}{100}=\left(\frac{16}{10}\right)^2 \quad \therefore 2.56$ একটি বর্গসংখ্যা

অনুশীলনী-6(b)

1. সংক্ষিপ্ত বর্গ নির্ণয় প্রণালী অবলম্বনে নিম্ন সংখ্যাগুলি বর্গ স্থির করো।
   45, 55, 85, 105, 155, 255
2. সংক্ষিপ্ত প্রণালী নিম্ন সংখ্যাগুলি বর্গ নির্ণয় করো।
   27, 37, 46, 78, 98
3. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ অভেদ প্রয়োগে 19, 102, 107-র বর্গ স্থির করো।
4. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ অভেদ প্রয়োগে 93, 95, 98 বর্গ স্থির করো।
5. $52^2=(5^2+2)100+2^2=2704,\ 57^2=(5^2+7)100+7^2=3249$
   উপরোক্ত দুটি বর্গ নিরূপণ প্রণালী অনুসরণ 51, 54, 56, 58, 59 বর্গমান স্থির করো।

6. $45^2=4\times(4+1)100+5^2$

$55^2=5\times(5+1)100+5^2$ এবং $65^2=6\times(6+1)100+5^2$

উপরোক্ত বর্গনিরূপণ প্রণালী অনুসরণে 35, 75, 95, 115, 205 সংখ্যাগুলির বর্গ নিরূপণ করো।

7. 0.12, 1.11, 0.003 পরিমেয় সংখ্যাগুলির বর্গ স্থির করো।

8. নিম্নলিখিত পরিমেয় সংখ্যাগুলি মধ্যে কোন সংখ্যাগুলি পূর্ণবর্গ সংখ্যা স্থির করো।

121, 1009, 65.61, 0.00256, 0.36, 12.321

6.6 পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূল

সংজ্ঞা: M একটি পরিমেয় সংখ্যা এবং $M^2=n$ হলে, n-র বর্গমূল M।

তোমরা জান $5^2 = 25$ এবং $(-5)^2 = 25$

তাই সংজ্ঞা অনুযায়ী আমরা বলব 25-র বর্গমূল +5 ও -5।

এখানে আমরা দেখলাম 25-র বর্গমূল ধনাত্মক ও অন্যটি ঋণাত্মক।

ধনাত্মক বর্গমূল সূচক চিহ্ন হচ্ছে $\sqrt{\ }$ ।

$\therefore$ $\sqrt{25}$, 25-র ধনাত্মক বর্গমূল=5, $-\sqrt{25}$, 25-র ঋণাত্মক বর্গমূল =-5

তাই 25-র বর্গমূল =± 25=±5

প্রথম দশটি পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূল সারণীতে দেওয়া গিয়েছে।

সারণী-6.2

পূর্ণসংখ্যা	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
প্রদত্ত সংখ্যার বর্গমূল	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9	±10

6.7 পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করো

প্রথম প্রণালী: উৎপাদক নির্ণয় মাধ্যমে বর্গমূল নির্ণয়।

উদাহরণ-3 : 36-র বর্গমূল নির্ণয় করো।

সমাধান : $36=2\times2\times3\times3$, $\sqrt{36}=\sqrt{2\times2\times3\times3}=\sqrt{2^2\times3^2}=2\times3=6$

$(-6)^2=36$ হেতু 36-র ঋণাত্মক বর্গমূল $=-\sqrt{36}=-6$

$\therefore$ 36-র বর্গমূল = $\pm\sqrt{36}=\pm6$

উদাহরণ-4 $=\pm\sqrt{144}$-র মান নির্ণয় করো।

সমাধান : $144=2\times2\times2\times2\times3\times3$

$$\sqrt{144}=\sqrt{2^2\times2^2\times3^2}=2\times2\times3=12$$

$$\therefore \pm\sqrt{144}=\pm12$$

দ্বিতীয় প্রণালী :

ভাগক্রিয়ার মাধ্যমে বর্গমূল নির্ণয় করো।

উদাহরণ 5 : 126025-র বর্গ নির্ণয় করো।

	355
3)	$\overline{12}\ \overline{60}\ \overline{25}$ $3^2=9$
+3	(-9)
65)	3 60
+5	$(-3).25$
705)	$-35\ 25$ $65\times5=325$
	$(-)\,35\ 25$ $705\times5+3525$
	0

(i) বর্গসংখ্যাটি ছয় অঙ্ক বিশিষ্ট। তাই ডান পার্শ্বে থুড়ে জুড়ে অঙ্ক নিলে এটি তিনজোড়া হবে। প্রত্যেক জোড়া উপরে (-) চিহ্ন দাও।

(ii) বাম পার্শ্বে প্রথম জোড় সংখ্যা 12, 12 থেকে ছোট বৃহত্তম পূর্ণবর্গ সংখ্যা 9

$\therefore$ বর্গমূল জন্য ভাগফল স্থানে 3 লেখ।

(iii) ভাগশেষ 3 লেখ। ডান পার্শ্বে দুই অঙ্ক সংখ্যা 60 লেখ। বর্তমান ভাজ্য 360 হবে।

(iv) প্রথম ভাজক 3 সহিত 3 যোগ করে দ্বিতীয় ভাজকের প্রথম অঙ্ক 6 লেখ।

(v) একক স্থানে 5 ও বর্গমূল স্থানে 5 লিখে $65\times5=325$ 360-এর ঠিক নিচে লেখ।

$\therefore$ $66\times6=396$ বর্গমূল স্থানে 6 নিলে সংখ্যাটি 360 থেকে অধিক হবে।

(vi) বর্তমান ভাগশেষ 35-র ডান পার্শ্ব শেষ দুটি অঙ্ক 25 লেখ এবং ভাজক 65 সহিত 5 যোগ করে নতুন ভাজকের প্রথম দুই অঙ্ক 70 লেখ।

(vii) বর্তমান বর্গমূল স্থানে 5 এবং ভাজকের একক স্থানে 5 লিখে $705\times5=3525$ লেখ। ভাজ্য স্থানে 3525 থাকায় 3525-3525=0 ভাগশেষ থাকবে। $\therefore$126025-র বর্গমূল= ±355

ভাগক্রিয়া দ্বারা বর্গমূল নির্ণয় সম্বন্ধে কয়েকটি জানার কথা।

a) প্রদত্ত সংখ্যার অঙ্কগুলি জুড়ে জুড়ে করলে যদি কোনো বেচে যাওয়া অঙ্ক থাকে তবে সংখ্যার কম দিকে 0 বসিয়ে বেচে যাওয়া অঙ্ক সহিত একটি জোড় করা যাবে।

(i) প্রদত্ত সংখ্যার যতটি অঙ্ক জোড়ি থাকবে, ভাগক্রিয়া ততটি পর্যায়ে সম্পাদিত হবে।

(ii) প্রদত্ত সংখ্যার প্রত্যেক জোড়ি অঙ্ক লেগে বর্ণমূলে একটি অঙ্ক পাওয়া যাবে।

(b) পূর্বোক্ত আলোচনা থেকে স্পষ্ট যে, প্রদত্ত সংখ্যাটি দেখে এর বর্গমূলের কয়েকটি অঙ্ক থাকবে তা জানতে পারবে।

উদাহরণ 6: 2566404-র বর্গমূল নির্ণয় করো।

	1 6 0 2			
1	$\overline{02}$	$\overline{56}$	$\overline{64}$	$\overline{04}$
	(-) 1			
+1				
26		1	56	
+6		(-)1	56	
320		0	64	
+0		(-)	00	
3202			64	04
		(-)	64	04
				0

(i) সংখ্যাটি সাত অঙ্ক বিশিষ্ট বামপার্শ্বে একটি শূন্য বসে এতে চারি জোড়া সংখ্যাটি পরিবর্তন করো।

(ii) প্রতি দুই অঙ্ককে ডান পার্শ্বে রেখাঙ্কিত করো।

(iii) 2 থেকে ছোটো পূর্ণবর্গ সংখ্যা 2-1=1 বর্গমূল স্থানে 1 লেখো।

(iv) দ্বিতীয় ভাজ্য 156 1 য়ে 1 যোগ করে দ্বিতীয় ভাজকের প্রথম অঙ্ক 2 লেখো।

v) দ্বিতীয় পর্যায়ে $26\times6=156$ ভাজ্য 1156 নীচে লেখো।

(vi) বর্গমূল ভাগফল স্থানে 6 লেখো।

(vii) 156-156=0 ভাগশেষ 0 পরে 64 লেখো।

26+6=32-কে তৃতীয় ভাজক স্থানে লেখো। আর একটি অঙ্ক একক স্থানে লিখলে এটি তিন অঙ্ক বিশিষ্ট হবে। কিন্তু ভাজ্য দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা হেতু এখানে বর্গমূল স্থানে 0 লেখা যাবে।

(viii) 64-র নিম্নে $320\times0=0$ লিখে বিয়োগ করলে ভাগশেষ 64 হবে। 64-র ডানদিকে শেষ দুই অঙ্ক 0 লেখো।

(ix) চতুর্থ ভাজ্য 6404 এবং ভাজক 320+0=320 লেখো। বর্তমান 320-র ডানদিকে 2 লিখলে চতুর্থ ভাজকটি 3202 হবে। বর্গমূল স্থানে 2 লেখো।

(x) $3202\times2=6404$ ভাজ্য 6404-6404=0 ভাগশেষ 0 থাকবে এবং বর্গমূল স্থানে 1602 থাকবে। $\therefore$2566404 -র বর্গমূল $=\pm\sqrt{2566404}=\pm1602$

উদাহরণ-7 : 4774225-র বর্গমূল নির্ণয় করো।

পূর্ববর্তী উদাহরণের অনুসরণে বর্গমূল নির্ণয় করা গিয়েছে। ভালোভাবে অনুধ্যান করো।

	2 1 8 5
2	$\overline{04}\ \overline{77}\ \overline{42}\ \overline{25}$
+2	-(04)
41	$\overline{77}$
+1	-41
428	3 6 4 2
+8	(-)3 4 2 4
4365	2 1 8 2 5
	(-) 2 1 8 2 5
	0

$\therefore$ 4774225-এর বর্গমূল $=\pm\sqrt{4774225}=\pm2185$

উদাহরণ-8 : 64432729-য়ের বর্গমূল নির্ণয় করো।

		8 0 2 7	
(i) প্রথম ভাজক	8	$\overline{64}\ \overline{43}\ \overline{27}\ \overline{29}$	বর্গমূল (ভাগফল) স্থান অঙ্ক 8
	+8	(-)64	
(ii) দ্বিতীয় ভাজক 160	160	043	বর্গমূলের পরবর্তী অঙ্ক 0
	+0	00	
(iii) তৃতীয় ভাজক 1602	1602	4327	বর্গমূলের পরবর্তী অঙ্ক 2
(iv) চতুর্থ ভাজক 16047	+2	3204	বর্গমূলের পরবর্তী তথা শেষ অঙ্ক 7
	16047	112329	
		112329	
		0	

64432729 বর্গমূল $=\pm\sqrt{64432729}=\pm8027$

6.8 দশমিক বর্গসংখ্যার বর্গমূল নির্ণয়

যে দশমিক সংখ্যাগুলি বর্গসংখ্যা সেগুলির বর্গমূল নির্ণয় প্রণালী নিম্নে আলোচনা করা গিয়েছে। এই প্রণালী অবলম্বনে নিম্ন সূত্রটির সাহায্য নিয়ে যাওয়া থাকে।

$$\boxed{a,\ b \in N \text{ হলে } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

(A) ভগ্নাংশ (লব ও হর উভয়ে পূর্ণবর্গ সংখ্যা)-র বর্গমূল নির্ণয় করো।

উদাহরণ-9 : $7\frac{9}{16}$-র বর্গমূল স্থির করো।

সমাধান : $7\frac{9}{16}$-র বর্গমূল $\frac{121}{16}$-র বর্গমূল $\pm\sqrt{\frac{121}{16}} = \pm\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{16}} \because \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$= \pm\frac{11}{4} = \pm 2\frac{3}{4}$ $\quad \therefore 7\frac{9}{16}$ বর্গমূল $= \pm 2\frac{3}{4}$

উদাহরণ 10 : $10\frac{6}{25}$-র বর্গমূল নির্ণয় করো।

সমাধান : $10\frac{6}{25}$-র বর্গমূল $\frac{256}{25}$-র বর্গমূল $= \pm\sqrt{\frac{256}{25}} = \pm\frac{\sqrt{256}}{\sqrt{25}}$

$= \pm\left(\frac{16}{5}\right) = \pm 3\frac{1}{5}$ $\quad \therefore 10\frac{6}{25}$-র বর্গমূল $\pm 3\frac{1}{5}$

(B) দশমিক ভগ্নাংশ (বর্গ সংখ্যা)-র বর্গমূল।

উদাহরণ 11 : 0.053361-র বর্গমূল নির্ণয় করো।

সমাধান: $0.053361 = \frac{53361}{1000000} = \frac{53361}{10^6}$

0.053361-র বর্গমূল $= \pm\frac{231}{10^3} = \pm 0.231 = \pm 231)$

```
2)      05 33 61    231
         04
43)      133
         129
461)      461
          461
            0
```

উদাহরণ-12 : 23.04-র বর্গমূল স্থির করো।

সমাধান : 23.04-র বর্গমূল $\frac{2304}{100}$-র বর্গমূল

$= \pm\sqrt{\frac{2304}{100}} = \pm\frac{\sqrt{2304}}{\sqrt{100}} = \pm\frac{48}{10} = \pm 4.8$

23.04-র বর্গমূল ± 4.8

বিকল্প প্রণালী

```
4     23.04   4.8
      16
88    704
      704
      0
```

23.04-র বর্গমূল $= \pm 4.8$ হবে।

6.9 আসন্ন বর্গমূল নিরূপণ

1 , 4, 9 আদি গণন সংখ্যা যে পূর্ণবর্গ এটা তোমরা জান। ফলে সেই সংখ্যাদের বর্গমূল মধ্য গণন সংখ্যা $1\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{4}{25}$ আদি বর্গসংখ্যার বর্গমূল মধ্য পরিমেয় সংখ্যা এটা তোমরা জান। পূর্ণবর্গ সংখ্যা ভিন্ন অন্য ধনাত্মক সংখ্যার বর্গমূল না। ইহা সুস্পষ্ট যথা-2-র কোনো বর্গমূল না। অর্থাৎ এরকম কোনো সংখ্যা নেই যার বর্গ 2 হবে। তবুও 2 এর জন্য 2000 নিয়ে ভাগক্রিয়া পদ্ধতিতে এর বর্গমূল নির্ণয় করতে চেষ্টা করব।

	1.414
1	$\overline{2}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$
	(-1)
24	1 00
	-96
281	400
	-281
2824	11900
	-11296

এরকম ভাগক্রিয়া করে চললে দেখব যে প্রক্রিয়ার শেষ নেই। অর্থাৎ পরিমেয় সংখ্যা 2-র কোনো বর্গমূল নেই। বর্গমূল নির্ণয়ে ভাগক্রিয়াকে বিশ্লেষণ করা যাক।

পূর্ণসংখ্যার ভাগ প্রক্রিয়ার ফল $=1$ এবং $1^2=1=$ যা 2 থেকে 1 ছোট।

দশমিক একস্থান পর্যন্ত ফল $=1.4$ এবং $(1.4)^2=1.96$ যেটা 2 থেকে 0.04 ছোট।

দশমিক দুইস্থান পর্যন্ত ফল $=1.41$ এবং $(1.41)^2=1.9881$ যার 2 থেকে 0.0119 ছোট।

লক্ষ করো যে আমরা ভাগক্রিয়ার অধিকের পর্যাপ্ত সম্পাদন করলে যে পরিমেয় ফল মান পাচ্ছি তার বর্গ ক্রমশ 2-র নিকটবর্তী হচ্ছে। যেহেতু ভাগক্রিয়ার কোনো পর্যায়ের ভাগশেষ হবে না তাই 2-র কোনো পরিমেয় বর্গমূল নেই। কিন্তু আমরা বলি-

দশমিক এক স্থান পর্যন্ত 2-র আসন্ন বর্গমূল $= \pm 1.4$ ।

দশমিক দুইস্থান পর্যন্ত 2-র আসন্ন বর্গমূল $= \pm 1.4.1$

দশমিক তিন স্থান পর্যন্ত 2-র আসন্ন বর্গমূল $= \pm 1.414...$

সেরকম 3 বা 3.0000 নিয়ে ভাগক্রিয়া পদ্ধতিতে এর বর্গমূল নির্ণয় করতে চেষ্টা করব।

	1.732
1	$\overline{3}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$
	(-)1
27	200
	(-) 189
343	1100
	-1029
3462	7100
	-6924
	176

এখানে মধ্য দেখব যে দশমিক এক স্থান পর্যন্ত 3-র আসন্ন বর্গমূল $= \pm 1.7$ । দশমিক দুইস্থান পর্যন্ত 3-র আসন্ন বর্গমূল $= \pm 1.73$ । দশমিক তিন স্থান পর্যন্ত 3-র আসন্ন বর্গমূল $= \pm 1.732$

উদাহরণ-13 :

2.8-র আসন্ন বর্গমূল দশমিক তিনস্থান পর্যন্ত নির্ণয় করো।

1	$\overline{2}\ \overline{80}\ \overline{00}\ \overline{00}$	1.673
	(-) 1	
26	180	
	(-) 156	
327	2400	
	(-) 2289	
3343	11100	
	(-) 10029	
	1071	

দশমিক তিনস্থান পর্যন্ত
2.8-র আসন্ন বর্গমূল $= \pm 1.673$

উদাহরণ-14 : $10\frac{2}{3}$-র আসন্ন বর্গমূল দশমিক তিনস্থান পর্যন্ত নির্ণয় করো।

সমাধান: প্রথম প্রণালী $10\frac{2}{3}$-র দশমিক 6 স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান-10.666667

(টীকা-দশমিক তিনস্থান পর্যন্ত আসন্ন বর্গমূল আবশ্যক থাকার প্রদত্ত সংখ্যার দশমিক 6 স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নেওয়া গেছে)

	3.256
3	$\overline{10},\ \overline{66},\ \overline{66},\ \overline{67}$
	-(9)
62	1 66
	-1 24
646	4266
	- 3876
6525	39067
	- 32625
	6442

নির্ণেয় আসন্ন বর্গমূল $= \pm 3.265$

দ্বিতীয় প্রণালী : $10\frac{2}{3}$ -র আসন্ন বর্গমূল

	9.797
9	$\overline{96},\ \overline{00},\ \overline{00},\ \overline{00}$
	(-) 81
187	1500
	- 1309
1949	19100
	- 17541
19587	155900
	- 137109
	18791

$= \pm\sqrt{10\frac{2}{3}}$ -র আসন্ন মান $= \sqrt{\frac{32}{3}}$ এর আসন্ন মান

$= \pm\sqrt{\frac{96}{9}}$ -র আসন্নমান $= \pm\sqrt{\frac{96}{3}}$ এর আসন্ন মান

$\therefore 10\frac{2}{3}$-র আসন্ন মান $= \pm\frac{9.797}{3} = \pm 3.266$

টীকা: দশমিক তিনস্থান পর্যন্ত আসন্ন বর্গমূল নির্ণয় করার আবশ্যকতা থাকলে দশমিক চারস্থান পর্যন্ত আসন্ন বর্গমূল নির্ণয় করে সেখান থেকে দশমিক তিনস্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নিলে উন্নত আসন্নমান পাওয়া যায়।

যেমন দশমিক চারস্থান পর্যন্ত 10.66666667-র আসন্ন বর্গমূল $= \pm 3.2659$

$10\frac{2}{3}$-র দশমিক তিনস্থান পর্যন্ত আসন্ন বর্গমূল $= \pm 3.266$

উদাহরণ 15 : 15-র বর্গমূল দশমিক 3 স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করো।

সমাধান :

$$\begin{array}{l|l}
1) & \bar{1}.\overline{50}\ \overline{00}\ \overline{00} \\
 & (-)1 \\
\hline
22) & 0.50 \\
 & (-)\ 44 \\
\hline
242) & 600 \\
 & (-)\ 484 \\
\hline
2444) & 11600 \\
 & (-)\ 9776 \\
\hline
 & 1824
\end{array}$$

1.5-য়ের আসন্ন বর্গমূল $= \pm 1.224$

উদাহরণ 16 : $\sqrt{3} = 1.732$-র হলে $\frac{12}{5\sqrt{3}}$-র আসন্ন মান নির্ণয় করো।

সমাধান : $\frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{15} = \frac{12(1.732)}{15} = \frac{4(1.732)}{5} = \frac{6.928}{5}$

$=1.3856$

উদাহরণ-17 : $\sqrt{2} = 1.414$ হলে $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$-র মান নির্ণয় করো।

সমাধান : $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2})^2-(1)^2} = \frac{2+1-2\sqrt{2}}{2-1} = \frac{3-2\sqrt{2}}{1}$

$=3-2\ (1.414)=3-2.828=0.172$ (পরিমেয় হর বিশিষ্ট রাশিতে পরিণত করা যায়।)

উদাহরণ-18: $\sqrt{6} = 2.449$ হলে $8\sqrt{\frac{3}{2}}$-র মান নির্ণয় করো।

সমাধান : $8\sqrt{\frac{3}{2}} = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{8 \times \sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{6}}{2}$ (পরিমেয় হর বিশিষ্ট রাশিতে পরিণত করা হল।)

$= 4\sqrt{6} = 4(2.449) = 9.796$

অনুশীলনী-6 (c)

1. বন্ধনী মধ্যে ঠিক উত্তরটি বেছে শূন্যস্থান পূরণ করো।

(a) 0.36-র বর্গমূলটি — (6.0, 0.6, 06, .006)

(b) 1.21-র বর্গমূলটি — (0.11, 1.01, 1.1, 1.001)

(c) $1\frac{7}{9}$-র বর্গমূলটি — $(1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{7}{3})$

(d) 0.0009-র বর্গমূলটি — (0.3, 0.03, 0.003, 0.0003)

(e) $6\frac{1}{4}$-র বর্গমূলটি — $(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$

2. বর্গমূল নির্ণয় করো।

289, 361, 784, 6.25, 12.96, 19.36 ও 10.24

3. ভাগক্রিয়ার সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় করো।

93025, 99856, 108241, 74529, 2256004, 1879641 ও 53361

4. প্রদত্ত দশমিক বর্গসংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করো।

53.1441, 36.3609, 4.401604, 0.9801 ও 5,4756

5. প্রদত্ত সংখ্যার বর্গমূল আসন্ন দশমিক ও স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করো।

(i) 5, (ii) 7, (iii) 10, (iv) 2.5, (v) 3.6

6. দশমিক ও স্থান পর্যন্ত আসন্ন বর্গমূল নির্ণয় করো।

$1\frac{1}{4}, 2\frac{7}{9}, 4\frac{1}{16}, 3\frac{7}{25}$ ও $4\frac{9}{16}$

7. (i) $\sqrt{2} = 1.414$ হলে $\frac{5}{\sqrt{2}}$-র মান নির্ণয় করো।

(ii) $\sqrt{3} = 1.732$ হলে $\frac{8}{3\sqrt{3}}$-র মান নির্ণয় করো।

(iii) $\sqrt{3} = 1.732$ হলে $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ -র মান নির্ণয় করো।

(iv) $\sqrt{6} = 2.449$ হলে $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$-র মান নির্ণয় করো।

(v) $\sqrt{6} = 2.449$ হলে $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$-র মান নির্ণয় করো।

6.10 বর্গমূল সম্বন্ধীয় বিবিধ প্রশ্ন

উদাহরণ-19 : 2352 কে কোন সংখ্যাদ্বারা ভাগ করলে ভাগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে?

সমাধান :

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2352 \\ \hline 2 & 1176 \\ \hline 2 & 588 \\ \hline 2 & 294 \\ \hline 7 & 147 \\ \hline 7 & 21 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$2352 = 2\times2\times2\times2\times7\times7\times3$

$=2^2\times2^2\times7^2\times3$

2352-কে 3 দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে।

উদাহরণ-20 : কোন সংখ্যার $\frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{4}$ গুণফল 108 হবে?

সমাধান: সংখ্যাটি x ধরা যাক। x-য়ের $\frac{1}{3}=\frac{x}{3}$ এবং x-য়ের $\frac{1}{4}=\frac{x}{4}$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{x}{3}\times\frac{x}{4}=\frac{x^2}{12}=108$

$\therefore x^2=108\times12$

$x=\pm\sqrt{108\times12}=\pm\sqrt{6\times6\times3\times3\times2\times2}$

$=\pm(6\times3\times2)=\pm36\rightarrow x=36$ $\therefore$ সংখ্যাটি 36

উদাহরণ-21 : 34967 থেকে কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করলে বিয়োগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে?

সমাধান: প্রথমে 34967-র বর্গমূল স্থির করো।

$$\begin{array}{r|l|l} 1 & \overline{3}\ \overline{49}\ \overline{49} & 186 \\ & (-)1 & \\ \hline 28 & 2\,4\,9 & \\ & (-)\ 2\,2\,4 & \\ \hline 366 & 2\,5\,6\,7 & \\ & (-)2\,1\,9\,6 & \\ \hline & 3\,7\,1 & \end{array}$$

উক্ত ভাগক্রিয়াকে জানা গেল যে, 34967 থেকে 186^2 থেকে 371 অধিক। তাই প্রদত্ত সংখ্যা থেকে 371 বিয়োগ করলে বিয়োগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে।

উদাহরণ-22 : 4931-র কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে।

সমাধান :

$$\begin{array}{r|l|l} 7 & \overline{49}\ \overline{31} & 70 \\ & 49 & \\ \hline 140 & 31 & \\ & 0 & \\ \hline & 31 & \end{array}$$

আমরা লক্ষ করলাম যে 70-র বর্গ 4931 থেকে ক্ষুদ্রতর মাত্র 71-র বর্গ, 4931 থেকে বৃহত্তর।

$\therefore$ 4931 য়ে একটি ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করলে যোগফল যে পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে, তা হল 71^2-4931=5041-4931=110। তাই 4931 সাথে 110 যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম সংখ্যা 110।

অনুশীলনী -6(d)

1. 1000-য়ের নিকটতম কোন দুটি সংখ্যা পূর্ণবর্গ সংখ্যা?
2. একটি স্কুলে যতজন ছাত্র ছিল প্রত্যেকে ততটি করে 50 পয়সা দেওয়ায় মোট 12.50 টাকা চাঁদা অসুল হল। স্কুলের ছাত্রসংখ্যা কত?
3. একটি উচ্চ ইংরেজি স্কুলের ছাত্রদের বর্গাকার নকশা দাঁড় করা যাওয়ায় 10 থেকে কম ছাত্র বেঁচে গেল। স্কুলের ছাত্রসংখ্যা 1230 জন হলে প্রত্যেক লাইনে কতজন ছাত্র দাঁড়িয়েছিল।
4. 6912 -কে কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা ভাগ বা গুণ করলে ফল একটি করে পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে?
5. কোন সংখ্যার $\frac{2}{3}$ ও $\frac{7}{8}$-র গুণফল 1344 আছে?
6. একটি আয়তক্ষেত্তর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ্র 3 গুণ। এর ক্ষেত্রফল 972 বর্গমিটার হলে পরিসীমা নির্ণয় কর।
7. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দেড় গুণ। এর ক্ষেত্রফল 1350 বর্গমিটার হলে এর পরিসীমা নির্ণয় করো।
8. একজন লোক তার 400 ও 44 বর্গমিটার দুটি বর্গাকার জমি বদলে একটি বর্গাকার জমি কিনল। এখানে তার ঘেরা দেওয়া খরচা মিটার প্রতি 5 টাকা হিসাবে কত খরচা হবে?
9. একটি ছাত্রাবাসে যতজন ছাত্র ছিল প্রত্যেকে ছাত্রসংখ্যার 5 গুণ করে টাকা মেস খরচা দেওয়াতে মোট 72000 টাকা অসুল হল। ছাত্রসংখ্যা নির্ণয় করো।
10. 18265 থেকে কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করলে বিয়োগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে।
11. 4515600-র কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে।
12. একটি বর্গাকার মাঠের ক্ষেত্রফল 133.6336 বর্গমিটার হলে মাঠের পরিসীমা কত?

6.11 সংখ্যার ঘন এবং পূর্ণঘন সংখ্যা (Cube of a number and a perfect cube number) :

আমরা জানি যে, $2^3=2\times2\times2=8$ আমরা বলি '2 এর ঘন =8';

$3^3=3\times3\times3=27$ আমরা বলি '3 এর ঘন=27' ;

$4^3=4\times4\times4=64$ আমরা বলি '4 -এর ঘন=64' .... ইত্যাদি।

নীচের প্রদত্ত সারণী প্রথম দশটি গণন সংখ্যা ঘন দেওয়া গেছে।

সারণী 6.3

সংখ্যা	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ঘন	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

1, 8, 27, 64 ... প্রত্যেক গণন সংখ্যাকে এক একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা বলা যায়। অর্থাৎ n একটি গণন সংখ্যা হলে $n\times n\times n=n^3$ মধ্য একটি গণন সংখ্যা ও একে (n^3) একটি ঘন সংখ্যা বলা যায়।

1, 3, 5, 7... অযুগ্ম সংখ্যা ঘন, প্রত্যেকে এক একটি অযুগ্ম সংখ্যা এবং 2, 4, 6, 8... যুগ্ম সংখ্যার ঘন প্রত্যেকে এক একটি যুগ্ম সংখ্যা। (পরীক্ষা করে দেখ)

নিজে করো।

নীচের সংরচনাকে দেখে বলো।

$$1=1=1^3$$

$$3+5=8=2^3$$

$$7+9+11=27=3^3$$

$$13+15+17+19=64=4^3$$

$21+23+25+27+29=125=5^3$ ইত্যাদি।

10^3 পাওয়ার জন্য কয়েকটি অযুগ্ম সংখ্যার সমষ্টি নিতে হবে। কোনো একটি সংখ্যা ঘন সংখ্যা কী না, তা আমরা সংখ্যাটির উৎপাদকীকরণ থেকে জানতে পারব। নিম্ন উদাহরণকে লক্ষ্য কর

উদাহরণ 23 : 128-এর ঘন সংখ্যাটি কী?

সমাধান : $128 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 \qquad (1)$

$= (2\times2\times2)\times(2\times2\times2)\times2$

$= (2)^3\times(2)^3\times2=(2\times2)^3\times2=(4)^3\times2$

128 উৎপাদকীকরণ n^3 রূপে প্রকাশিত হবে না। তাই এটি একটি ঘন সংখ্যা নয়।

টীকা- (1) চিহ্নিত সোপান আমরা দেখলাম যে প্রদত্ত সংখ্যার উৎপাদকীকরণ 7টি হর গুণনীয়ক রূপে থাকল। 6টি 2 থেকে 4^3 পাব ও একটি 2-য়ে থাকায় উৎপাদকীকরণ n^3 রূপে প্রকাশিত হবে না। তাই দেখলাম যে সোপান (1)য়ে নির্দিষ্ট মৌলিক উৎপাদক সংখ্যা। 3-র গুণিতক হলে সংখ্যাটি ঘন সংখ্যা হবে। প্রশ্ন সমাধান করার সময় আমরা সমাধানের সোপানকে নিম্ন মতে দেখালে যথেষ্ট হবে।

$128=\overline{2\times2\times2}\times\overline{2\times2\times2}\times2 \qquad \therefore 128$ ঘন সংখ্যা নয়।

6.11.1 ঘনসংখ্যা সম্বন্ধীয় সূত্র:

আমাদের পড়ে থাকা একটি ঘাতঙ্ক নিয়ম হল-

$(a\times b)^n=a^n\times b^n$ যেখানে $a, b\in Q$ ও $n\subset N$

এর একটি অনুসিদ্ধান্ত হল সূত্র $=a^3\times b^3=(a\times b)^3$ যদি $a, b\in N$.....(1)

উদাহরণ 24 : 27000 একটি ঘন সংখ্যা কী না পরীক্ষা করো। যদি সংখ্যাটি ঘন সংখ্যা হয় তবে এটি কোন সংখ্যার ঘন স্থির করো।

সমাধান : $27000 =\overline{2\times2\times2}\times\overline{3\times3\times3}\times\overline{5\times5\times5}=2^3\times3^3\times5^3$

$= (2\times3\times5)^3= (30)^3$

$\therefore$ 27000 একটি ঘন সংখ্যা এবং এটি 30-এর ঘন।

উদাহরণ 25 : 392-কে কোন সর্বনিম্ন সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে গুণফল একটি ঘন সংখ্যা হবে?

সমাধান : $392=2\times2\times2\times7\times7=2^3\times7^2$

$\therefore$ 392-র উৎপাদকীকরণ -গুণনীয়ক হর সংখ্যা = 3 ও গুণনীয়ক 7 সংখ্যা=2।

$\therefore$ 392-কে অন্যূন 7 দ্বারা গুণ করলে গুণফল একটি ঘন সংখ্যা হবে।

উদাহরণ 26 : একটি সমঘনাকার বাক্সের প্রত্যেক পার্শ্বের দৈর্ঘ্য 4 মিটার হলে এর আয়তন কত?

সমাধান: সমঘনাকার বাক্সর আয়তন = (বাহুর দৈর্ঘ্য)^3

$=(4)^3$ ঘনমিটার= $(4\times4\times4)$ ঘনমিটার 64 ঘনমিটার

মেট্রিক মাপ তালিকা :

ঘনফল মাপের মেট্রিক একক তালিকা নীচে দেখ।

10 মি. মি =1 সেমি তাই 1000 ঘ. মিমি =1 ঘ. সেমি।

10 সেমি =1 ডেসিমি তাই 1000 ঘ. সেমি =1 ঘ. ডেসিমি।

10 ডেসিমি =1 মি তাই 1000 ঘ. ডেসিমি =1 ঘ. মি।

মনে রাখো :

(ক) একটি পাত্রের আয়তন যত ঘন ডেসিমিটার সেখানে ধরে থাকা জলের পরিমাণ তত মিটার। অর্থাৎ 1 ঘন ডেসিমি =1000 ঘন সেমি =1 লিটার।

(খ) একটি পাত্রের আয়তন যত ঘন মিটার সেখানে ধরে থাকা জলের পরিমাণ তত কিলোলিটার বা 1000 লিটার।

উদাহরণ-27 : একটি সমঘনাকার জলট্যাঙ্কির ভিতর দিকে দৈর্ঘ্য 2 মিটার হলে এখানে কত লিটার জল ধরে।

সমাধান : জলট্যাঙ্কির আয়তন = (প্রত্যেক ধারের দৈর্ঘ্য)^3

$=2^3$ ঘন মিটার =8 ঘন মিটার।

$\therefore$ জলের পরিমাণ =8 কিলোলিটার =8000 লিটার।

1729 একটি সংখ্যা যা দুটি উপায়ে দুটি ঘন সংখ্যার সমষ্টিরূপে প্রকাশিত হতে পারবে। যথা $1729=12^3+1^3=10^3+9^3$ একে Hardy Ramanujan সংখ্যা বলা যায়। সেরকম $4104=2^3+16^3=9^3+15^3$ এবং $13832=18^3+20^3=2^3+24^3$, এরকম আমরা অসংখ্য সংখ্যা পাব। এখান থেকে 1729 ক্ষুদ্রতম।

অনুশীলনী 6 (e)

1. 11 থেকে 20 পর্যন্ত সমস্ত গণন সংখ্যার ঘন নির্ণয় করো।

2. **শূন্যস্থান পূরণ করো।**

   (i) $(3)^3\times(4)^3=(...)^3$ (ii) $(5)^3\times(11)^3=(...)^3$

   (iii) $(12)^3\times(5)^3=(...)^3$ (iv) $6^3=2^3\times(...)^3$

   (v) $15^3=(...)^3\times(5)^3$

3. **নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির মধ্যে কোনগুলি ঘনসংখ্যা।**

   54, 216, 243, 218, 1331, 106480.

4. 675-য়ে অন্যূন কত গুণ করলে গুণফল একটি ঘনসংখ্যা হবে?

5. 8640-কে অতি কমে কোন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল একটি ঘনসংখ্যা হবে।

6. একটি সমঘন একটি পাশে দৈর্ঘ্য 15 সেমি হলে এর আয়তন কত?

7. একটি সমঘনাকার জল ট্যাঙ্কির গভীরতা 2 মিটার। এখান থেকে দৈনিক 1000 সিটার জল বের করে নিলে কত দিনে জল শেষ হবে?

8. 12 মিটার গভীর একটি সমঘনাকার গর্ত করতে ঘনমিটারকে 25 টাকা হিসাবে কত খরচ হবে।

9. 3-র গুণিতক যে কোনো পাঁচটি গণন সংখ্যার ঘন নির্ণয় করো এবং দেখাও যে 3-র গুণিতক যে কোনো গণন সংখ্যার ঘন 27-র একটি গুণিতক।

10. দেখাও যে যুগ্ম সংখ্যার ঘন একটি যুগ্ম সংখ্যা এবং অযুগ্ম সংখ্যার ঘন এক অযুগ্ম সংখ্যা।

6.12. ঘনমূল (Cube root) :

আমরা জানি যে, 1, 8, 27, 64 প্রত্যেকে এক একটি ঘন সংখ্যা। অর্থাৎ $1=1^3$, $8=2^3$, $27^3=$ এবং $64=4^3$ ইত্যাদি।

আমরা 1, 8, 27... আদি গণন সংখ্যাকে যথাক্রমে 1, 2, 3, আদি গণন সংখ্যার ঘন বলে থাকি।

অপরপক্ষে আমরা 1, 2, 3, 4,...আদি গণন সংখ্যাকে যথাক্রমে 1, 8, 27, 64-র ঘনমূল বলে থাকি।

সংজ্ঞা (গণন সংখ্যা)

m ও n গণন সংখ্যা এবং $n=m^3$ হলে m-কে n-র ঘনমূল বলা যায়। নীচে সারণীতে প্রথম দশটি ধনাত্মক ঘন সংখ্যার ঘনমূল দেওয়া গেছে।

সারণী 6.4

ঘনসংখ্যা (n)	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
n-র ঘনমূল	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

ঘনমূল জন্য ব্যবহৃত হয়ে থাকা চিহ্নটি হল $\sqrt{\ldots\ldots}$

যথা $\sqrt[3]{8}=2, \sqrt[3]{27}=3$ ইত্যাদি।

6.12.1 ঘনমূল নির্ণয় প্রণালী

নিম্নলিখিত গণন সংখ্যা (ঘনসংখ্যা)গুলির ঘনমূল কীভাবে নির্ণয় করা গিয়েছে, লক্ষ করো।

(a) $216=2\times2\times2\times3\times3\times3=2^3\times3^3=(2\times3)^3$

$\therefore \sqrt[3]{216}=2\times3=6$

(b) $1728=2\times2\times2\times2\times2\times2\times3\times3\times3$

$=2^3\times2^3\times3^3=(2\times2\times3)^3=(12)^3$

$\therefore \sqrt[3]{1728}=2\times2\times3=12$

(c) $1157625=3\times3\times3\times5\times5\times5\times7\times7\times7=3^3\times5^3\times7^3$

$\therefore \sqrt[3]{1157625}=3\times5\times7=105$

উদাহরণ-28 : (i) 2744 ও (ii) 10,000-র ঘনমূল নির্ণয় করো।

সমাধান : (i) $2744=2\times2\times2\times7\times7\times7=2^3\times7^3=(2\times7)^3$

$\therefore \sqrt[3]{2744}=2\times7=14$

(ii) $10,00,000=10^3\times10^3$

$\therefore \sqrt[3]{10,00,000}=10\times10=100$

উদাহরণ-29 : 26244-কে কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল একটি ঘনসংখ্যা হবে। উক্ত ভাগফলের ঘনমূল নির্ণয় করো।

সমাধান : $26244=2\times2\times\overline{3\times3\times3}\times\overline{3\times3\times3}\times3\times3$

$=3^3\times3^3\times3^2\times2^2=2^2\times3^2=4\times9=36$

$\therefore$প্রদত্ত সংখ্যাটিকে 36 দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল $3^3\times3^3$ হবে ও এটি একটি ঘন সংখ্যা আছে। এর ঘন মূল হবে $3\times3=9$

একটি পূর্ণ ঘন সংখ্যার ঘনমূল নির্ণয়ের একটি সংক্ষিপ্ত প্রণালী

857375-র ঘনমূল স্থির করব।

সোপান-1: $\overline{857}\ \overline{375}$ সংখ্যার ডানদিকে তিনটি করে সংখ্যা নিয়ে এক একটি সংখ্যা পুঞ্জি গঠন করো।

সোপান-2 : প্রথম গ্রুপ $(\overline{375})$ থেকে আমরা ঘনমূলের একক স্থানীয় অঙ্ক আছে। গ্রুপের একক স্থানীয় অঙ্ক 5 হেতু ঘনমূলের একক স্থানীয় অঙ্ক 5 হবে।

সোপান-3 : বর্তমান দ্বিতীয় গ্রুপ '857'-কে নেব।

আমরা জানি $9^3=729$ এবং $10^3=1000$ এবং $729<857<1000$

সোপান-4 : বর্তমান 729-র ঘনমূল 9 হেতু নির্ণীত হতে থাকা ঘনমূলের দশক স্থানীয় অঙ্ক 9 হবে। অর্থাৎ 857375-র ঘনমূল 95 হবে। $\therefore \sqrt[3]{857375}=95$

নিজে করো উপরোক্ত সংক্ষিপ্ত প্রণালী অবলম্বনে নিম্ন সংখ্যাগুলির ঘনমূল নির্ণয় করো।

(i) 17576 (ii) 12167 (iii) 32768 (iv) 4913

অনুশীলনী-6 (f)

1. ঘনমূল নির্ণয় করো: (i) 343 (ii) 1000 (iii) 74088 (iv) 157464 (v) 8,000,000
2. 2744-কে কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যাতে গুণ করলে গুণফল একটি পূর্ণঘন সংখ্যা হবে? উক্ত ঘন সংখ্যার ঘনমূল নির্ণয় করো।
3. 5488-কে কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল একটি পূর্ণঘন সংখ্যা হবে?
4. একটি সমঘনের আয়তন 512 ঘনমিটার হলে এর ভূমির ক্ষেত্রফল কত হবে?
5. 53240 -কে কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যায় ভাগ করলে ভাগফল একটি পূর্ণঘন সংখ্যা হবে এবং কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে গুণফল একটি পূর্ণঘন সংখ্যা হবে?

6.12.2 ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার ঘন ও ঘনমূল

-1, -2, -3... প্রত্যেক ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। এগুলির ঘন হল $(-1)^3=(-1)\times(-1)\times(-1)=-1$, $(-2)^3=(-2)\times(-2)\times(-2)=-8$ এবং $(-3)^3=(-3)\times(-3)\times(-3)=-27$

সেরকম $(-4)^3=-64$, $(-5)^3=-125$, $(-6)^3=-216$ ইত্যাদি। এখানে লক্ষ কর যে একটি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার ঘন একটি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

-1, -8, -27... ইত্যাদি সংখ্যাগুলি এক একটি ঘনসংখ্যা এবং এগুলির ঘনমূল যথাক্রমে -1, -2, -3... ইত্যাদি।

সংজ্ঞা: m ও n পূর্ণসংখ্যা ও $n=m^3$ হলে m-কে n-র ঘনমূল বলা যায়।

টীকা $(2)^2=4$ ও $(-2)^2=4$ তাই আমরা বলেছি 4-র দুটি বর্গমূল আছে। সেই অনুশীলনীতে আমরা বলেছি প্রত্যেক বর্গসংখ্যার দুটি বর্গমূল আছে।

বর্তমানে দেখা যাক $=(2)^3=8$

তাই 8-এর একটি মাত্র ঘনমূল আছে ও তা হল 2 সেরকম আমরা দেখব যে প্রত্যেক ঘনসংখ্যার একটি মাত্র বাস্তব ঘনমূল আছে।

বি.দ্র: পরে জানবে যে প্রত্যেক ঘনসংখ্যার মোট তিনটি ঘনমূল থাকে ও সেখান থেকে দুটি ভিন্ন প্রকার সংখ্যা যা তোমরা জেনে থাকবে সংখ্যাসমূহের অন্তর্ভুক্ত নয়।

উদাহরণ-30 : (-15)-র ঘন নির্ণয় করো।

সমাধান : $(-15)^3=(-15)\times(-15)\times(-15)=-3375$

উদাহরণ- 31 : (-1331)-র ঘনমূল স্থির করো।

সমাধান: উৎপাদকীকরণ দেখালে $1331=11\times11\times11$

$\therefore\ (-1331)=(-11)\times(-11)\times(-11)=(-11)^3$

$=\sqrt[3]{1331}=-11$

6.12.3 ঘনমূল সম্বন্ধীয় কয়েকটি সূত্র

উদাহরণ-32 : $\sqrt[3]{27\times64}$ এবং $\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{64}$ মধ্যে কী সম্পর্ক আছে?

সমাধান: $27\times64=3\times3\times3\times4\times4\times4$

$=(3\times4)\ (3\times4)\ (3\times4)=12^3$

$=\sqrt[3]{27\times64}=\sqrt[3]{(12)^3}=12$

পুনশ্চ $\Rightarrow$ এবং $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4\times4\times4}=4$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্পর্ক $\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{64}=3\times4=12$

উদাহরণ-33 :

দেখাও যে (a) $\sqrt[3]{(-125)\times216}=\sqrt[3]{(-215)}\times\sqrt[3]{216}$

(b) $\sqrt[3]{27\times(-2744)}=\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{-2744}$

(c) $\sqrt[3]{(-125)\times(-1000)}=\sqrt[3]{-125}\times\sqrt[3]{-1000}$

সমাধান:

(a) $-125\times216= -(125\times216)= -(5\times5\times5\times6\times6\times6)$
$= -(5\times6)\times(5\times6)\times(5\times6)= -(30)\times(30)\times(30)$
$= -(30)^3=(-30)^3$ ঋণাত্মক সংখ্যার ঘন মধ্যে ঋণাত্মক

$\therefore \sqrt[3]{(-125\times216)} = \sqrt[3]{(-30)^3} = -30$

পুনশ্চ $\sqrt[3]{(-125)}\times\sqrt[3]{(216)}$

$= \sqrt[3]{(-5)\times(-5)\times(-5)}\times\sqrt[3]{6\times6\times6} = (-5)\times6 = -30$

$\therefore \sqrt[3]{(-125\times216} = \sqrt[3]{(-125)}\times\sqrt[3]{216}$ (প্রমানিত)

(b) $27\times-2744= -(27\times2744) = -(3\times3\times3\times14\times14\times14)$
$= -(3\times14)\times(3\times14)\times(3\times14)= -(42)\times(42)\times(42)$
$= -(42)^3=(-42)^3$

$\therefore \sqrt[3]{27\times(-2744)} = \sqrt[3]{(-42)^3} = -42$

পুনশ্চ $\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{-2744}$

$= \sqrt[3]{3\times3\times3}\times\sqrt[3]{(-14)\times(-14)\times(-14)} = 3(-14) = -42$

$\therefore \sqrt[3]{27\times(-2744)} = \sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{-2744}$ (প্রমানিত)

(c) $(-125)\times(-1000)=125\times1000$
$=5\times5\times5\times10\times10\times10=(5\times10)\times(5\times10)\times(5\times10)$
$50\times50\times50=(50)^3$ $\therefore \sqrt[3]{(-125)\times(-1000)} = \sqrt[3]{(50)^3} = 50$

পুনশ্চ $\sqrt[3]{(-125)} = \sqrt[3]{(-5)\times(-5)\times(-5)} = -5$ এবং

$\sqrt[3]{(-1000} = \sqrt[3]{(-10)\times(-10)\times(-10)} = -10$

$\sqrt[3]{(-125)}\times\sqrt[3]{(-1000)} = (-5)\times(-10) = 50$

$\therefore \sqrt[3]{(-125)\times(-1000)} = \sqrt[3]{(-125)}\times\sqrt[3]{-1000}$ (প্রমানিত)

উপরিস্থ উদাহরণ যাদের থেকে দেখলাম যে

সূত্র: যদি a ও b উভয়ে ঘনসংখ্যা হয়, তবে $\sqrt[3]{a\times b} = \sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}$

উদাহরণ-34 : মান নির্ণয় করো (i) $\sqrt[3]{16\times32}$ (ii) $\sqrt[3]{(-12)}\times18$

সমাধান: (i) $\sqrt[3]{16\times32} = \sqrt[3]{2^4\times2^3} = \sqrt[3]{29} = 2^3 = 8$

(ii) $\sqrt[3]{(-12)}\times18 = \sqrt[3]{-(2\times2\times3)\times2\times3\times3} = \sqrt[3]{-(2\times3)^3}$
$=(-2\times3)= -6$

সূত্র : যদি a, b, c পূর্ণসংখ্যা এবং $ab=c^3$ হয় তবে $\sqrt[3]{ab} = c$

অনুশীলনী 6 (g)

1. **নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির ঘনমূল নির্ণয় করো।**

-1, -125, -5832, -17576, -2744000

ঘনমূল নির্ণয় করো (2 নং প্রশ্ন থেকে 11 নং প্রশ্ন পর্যন্ত)

2. 8×64 3. (-216)×(1728) 4. 343×(-512)

5. (-125)×(-3375) 6. 729×15625 7. -456533

8. 216000 9. 28×98 10. (-27)×27 11. (-24)×(-72)

12. **নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির মধ্যে কোনগুলি ঘনসংখ্যা? যেগুলি ঘনসংখ্যা আছে সেগুলির ঘনমূল স্থির করো।**

-64, -1056, -1728, -2197, -3888

13. **সরল করো।**

(i) $\sqrt[3]{-216\times125}$ (ii) $\sqrt[3]{-512\times729}$ (iii) $\sqrt[3]{-1728\times15625}$ (iv) $\sqrt[3]{-1000\times512}$

6.13 পরিমেয় সংখ্যার ঘননির্ণয়

আমরা জানি যে p ও q পূর্ণ সংখ্যা এবং $Q\neq0$ হলে $\frac{p}{q}$ একটি পরিমেয় সংখ্যা হবে। যথা: $\frac{1}{3},\frac{2}{5}\frac{-5}{11}$ ইত্যাদি।

উদাহরণ- 35 : মান নির্ণয় করো $(i)\left(\frac{2}{5}\right)^3$ $(ii)\left(\frac{-5}{11}\right)^3$ $(iii)\ (004)^3$

সমাধান: $(i)\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{2^3}{5^3}=\frac{8}{125}$

$$(ii)\left(\frac{-5}{11}\right)^3=\left(\frac{-5}{11}\right)\times\left(\frac{-5}{11}\right)\times\left(\frac{-5}{11}\right)=\frac{-5\times(-5)\times(-5)}{11\times11\times11}=\frac{(-5)^3}{11^3}=\frac{-125}{1331}$$ (উত্তর)

(iii) $(0.04)^3=0.04\times0.04\times0.04$

$$=\frac{4}{100}\times\frac{4}{100}\times\frac{4}{100}=\frac{64}{1000000}=0.000064$$

লক্ষ করো যে মূল সংখ্যার দুটি দশমিক স্থান থাকার সময় তার ঘনতে 6টি দশমিক স্থান আছে।

পরিমেয় সংখ্যার গুণের সংবৃত্তির নিয়ম থেকে স্পষ্ট যে পরিমেয় সংখ্যার ঘনও একটি পরিমেয় সংখ্যা।

পুনশ্চ $p, q\in z$ এবং $q\neq0$ ক্ষেত্রে $\left(\frac{p}{q}\right)^3=\frac{p}{q}\frac{p}{q}\frac{p}{q}$ ঘাত রাশির $\frac{p\times p\times p}{q\times q\times q}=\frac{p^3}{q^3}$ (পরিমেয় সংখ্যার গুণ সংখ্যা)

তাই আমরা পেলাম সূত্র : $\boxed{p, q\in z \text{ এবং } q\neq0 \text{ হলে } \left(\frac{p}{q}\right)^3=\frac{p^3}{q^3}}$

6.14 পরিমেয় সংখ্যার ঘনমূল নির্ণয়:

আমরা জানি যে, $\frac{27}{64}=\frac{3^3}{4^3}=\left(\frac{3}{4}\right)^3$ তাই $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{3}{4}$

এখানে $\frac{3}{4}$-কে $\frac{27}{64}$-র ঘনমূল বলা যায়।

সেরকম $\frac{-125}{1331}=\left(\frac{-5}{11}\right)^3=\sqrt[3]{\frac{-125}{1331}}=\frac{-5}{11}$

লক্ষ করো (i) একটি পরিমেয় সংখ্যা ঘনমূল নির্ণয় করার সময় লবের ঘনমূলকে লব রূপে ও হরের ঘনমূলকে হর রূপে নিয়ে প্রদত্ত পরিমেয় সংখ্যার ঘনমূল নির্ণয় করো।

(ii) পরিমেয় সংখ্যাটি ঋণাত্মক হলে ঘনমূলটি ঋণাত্মক হবে।

(iii) উদাহরণ থেকে স্পষ্ট যে, যে পরিমেয় সংখ্যার লব ও হর প্রত্যেক ঘন সংখ্যা সেই পরিমেয় সংখ্যার ঘনমূল নির্ণয় করা যেতে পারবে।

তাই নিম্নলিখিত সূত্রটিকে মনে রাখো।

সূত্র: p, q $\in$ z এবং $q\neq 0$ ক্ষেত্রে $p = m^3$ $q = n^3$ তবে $\sqrt[3]{\frac{p}{q}}=\frac{m}{n}$

অনুশীলনী-6 (h)

1. ঘন নির্ণয় করো।

$(i)\frac{7}{9}$, $(ii)\frac{-8}{11}$, $(iii)\ \frac{12}{7}$, $(iv)\frac{-13}{8}$, $(v)\ 2\frac{3}{5}$, $(vi)\ 3\frac{1}{4}$, $(vii)\ -1\frac{2}{3}$

(viii) 0.2 (ix) 1.3, (x) 0.03

2. ঘনমূল নির্ণয় করো।

$(i)\frac{8}{125}$, $(ii)\frac{-64}{1331}$, $(iii)\ \frac{-27}{4096}$, $(iv)\frac{2197}{9261}$,

(v) 0.001, (vi) 0.008, (vii) 1.728, (viii) 0.000125

3. নিম্নোক্ত কোন রাশি কোনো একটি পরিমেয় সংখ্যার ঘন আছে?

$(i)\frac{27}{64}$, $(ii)\frac{125}{128}$, $(iii)\ \frac{-216}{729}$, $(iv)\frac{-250}{686}$,

(v) 0.8, (vi) 0.125, (vii) 0.1331

⌘⌘⌘⌘⌘

সমীকরণ ও এর সমাধান
(EQUATION AND IT'S SOLUTION)

অধ্যায়
৭

7.1 উপক্রমণিকা (Introduction) :

'বীজগাণিতিক পরিপ্রকাশ ও অভেদ' অধ্যায়ে তোমরা 'অভেদ' কী এবং এটি কেমন একটি সমীকরণ থেকে ভিন্ন তা তোমরা জান। পূর্বশ্রেণীতে তুমি অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট সমীকরণের সৃষ্টি এবং এর সমাধান সম্বন্ধেও কিছু জান। বর্তমান উক্ত অধ্যায়ে একটি অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট একঘাতী সমীকরণ পূর্বে আলোচনা সহিত দ্বিঘাত সমীকরণের আলোচনা করা হবে। পূর্ব অধ্যায়ে পড়ে থাকা দ্বিঘাত পলিনোমিয়াল উৎপাদকীকরণ অধাররে দ্বিঘাত সমীকরণে সমাধান সম্বন্ধেও এই অধ্যায়ে আলোচনা করা হবে।

7.2 সমীকরণ ও অভেদ (Equation and Identity) :

একটি অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট দুটি বীজগাণিতিক পরিপ্রকাশ $5x - 2$ ও $2x + 1$-কে নিয়ে একটি উক্তি $5x - 2 = 2x + 1$ (এখানে এক অজ্ঞাত রাশি) সৃষ্টি করা যাক। বর্তমান x এর স্থানে একটি পূর্ণসংখ্যা নিয়ে উপরোক্ত উক্তিটির সত্যতা পরীক্ষা করব।

$x = 1$ নিয়ে উক্তিটির সত্যতা পরীক্ষা করব।

বামদিক $= 5x - 1 = 5\times1 - 2 = 5-2 =3$

ডানদিক $= 2x + 1 = 2\times1 + 1 = 2+3 =3$

$\therefore 5x - 2 = 2x + 1$ উক্তিটি $x = 1$ জন্য সত্য ।

$x = 2$ হলে বামদিক $= 5x-2 = 5\times2-2 = 10-2 = 8$

ও ডানদিক $= 2x + 1 = 2\times2 + 1= 4 + 1= 5$

তাই $x = 2$ হলে $5x - 2 = 2x + 1$ উক্তিটি অসত্য ।

সেরকম x=0, -1, 3 হলে প্রদত্ত উক্তিও অসত্য হবে। এটি পরীক্ষা করে দেখ।

উপরোক্ত সত্যতা পরীক্ষা থেকে এটি স্পষ্ট যে অজ্ঞাত রাশি x স্থানে '1' নিলে উক্তিটি সত্য হয়েছে। কিন্তু অন্য সবগুলির মান জন্য সত্য নয়।

এখানে 5x-2=2x+1 উক্তিটিকে একটি সমীকরণ বলা যায়। এখানে x একটি অজ্ঞাত রাশি।

টীকা: সমীকরণগুলি একটি অজ্ঞাত রাশি কিংবা একাধিক অজ্ঞাত রাশি থাকতে পারে। অজ্ঞাত রাশিগুলি সাধারণত x, y, z সংকেত দ্বারা চিহ্নিত করা গিয়ে থাকে। মনে করো, একটি উক্তিতে একটি অজ্ঞাত রাশি x বিদ্যমান। যদি উক্তিটি অজ্ঞাত রাশি x যে কোনো মানের জন্য সত্য তবে তাকে একটি অভেদ বলে।

উদাহরণস্বরূপ 3x+2x=5x, (4x+2)-2x=2(x+1) ইত্যাদি এক একটি অভেদ।

7.3 সমীকরণের ঘাত (Power of an equation) :

সমীকরণে পদগুলি থাকা অজ্ঞাত রাশির সর্বোচ্চ ঘাতকে সমীকরণের ঘাত বলা যায়।

উদাহরণ : 5x=10, 2x+1=-3 হচ্ছে একটি অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট একঘাতী সমীকরণ, সেরকম $x^2=36$, $2x^2+3x-5=0$ সমীকরণগুলি দ্বিঘাতী সমীকরণ আছে।

7.4 সমীকরণের বীজ (Roots of an equation) :

সমীকরণ থাকা অজ্ঞাত রাশির যে নির্দিষ্ট মানগুলি জন্য সমীকরণটি সত্য, সেগুলিকে উক্ত সমীকরণের বীজ বলা যায়।

2x=6 সমীকরণে বীজ '3' কারণ x-র মান 3-র জন্য উক্তিটি সত্য।

সমীকরণের বীজনির্ণয় প্রক্রিয়াকে সমীকরণ সমাধান বলে।

মনে রাখো- সমীকরণের ঘাত সংখ্যা তার বীজ সংখ্যা সহিত সমান অর্থাৎ একটি n ঘাতী সমীকরণ বীজ সংখ্যা n।

সুতরাং একটি একঘাতী সমীকরণ বীজ সংখ্যা '1'। সেরকম একটি দ্বিঘাতী সমীকরণ বীজ সংখ্যা '2' ইত্যাদি।

7.5 একটি অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট একঘাতী সমীকরণ সমাধান (Solution of a Linear equation in one variable) :

নীচে কয়েকটি এক অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট একঘাতী সমীকরণের উদাহরণ দেওয়া হল।

(a) x+3=4 (b) 2(x-1)=10 (c) $\frac{x-5}{2}-1=\frac{2x-1}{7}$

একঘাতী সমীকরণের সাধারণ রূপ হচ্ছে ax+b=0 যেখানে $(a\neq 0)$ a রাশিটি x র সহন ও b হচ্ছে একটি ধ্রুব রাশি।

সমীকরণ সমাধান নিমিত্ত প্রযোজ্য স্বত:সিদ্ধ।

(a) সমান সমান রাশি সহিত যোগ করলে যোগফলদ্বয় মধ্য সমান হবে।

(b) সমান সমান রাশি থেকে সমান রাশি বা এক রাশি বিয়োগ করলে বিয়োগফলদ্বয় সমান হবে।

(c) সমান সমান রাশি থেকে সমান সমান রাশি বা এক রাশি দ্বারা গুণ করলে গুণফল দ্বয় মধ্য সমান হবে।

(d) সমান সমান রাশিকে সমান সমান রাশি বা একরাশি দ্বারা (শূন্য ছাড়া) ভাগ করলে ভাগফল ও সমান হবে।

উদাহরণ-1 :

(1) সমাধান করো: (i) 2x-3=7 (ii) 2y+9=4

সমাধান : (i) 2x-3=7

2x-3+3=7+3 (উভয় পার্শ্বে 3 যোগ করা হয়)

$=2x=10=\frac{2x}{2}=\frac{10}{2}$ (উভয় পার্শ্বকে 2 দ্বারা ভাগ করা হল)

x=5 ∴প্রদত্ত সমীকরণের বীজ হচ্ছে 5।

(ii) 2y+9=4

সমাধান : 2y + 9 = 4

2y + 9 - 9 = 4 - 9 (উভয় পার্শ্বে 9 বিয়োগ করা হল)

$2y = -5 = \frac{2y}{2}=\frac{-5}{2}$ (উভয় পার্শ্বে 2 দ্বারা ভাগ হল)

$y = \frac{-5}{2}$ ∴প্রদত্ত সমীকরণের বীজ হচ্ছে $\frac{-5}{2}$।

লক্ষ করো- উদাহরণ 1(i)-র বামদিকে -3 -কে অপসারণ করার পরে দক্ষিণ দিকে +3 থাকার দেখা গেল। উদাহরণ 1(ii)-র বামদিকে 9-র অপসারণ দ্বারা দক্ষিণ দিকে (-9) থাকার দেখা গেল।

এছাড়া স্পষ্ট যে, কোনো পদের পার্শ্ব পরিবর্তন (বামদিক থেকে ডানদিক বামদিক) যখন প্রক্রিয়া পরিবর্তন হয়, অর্থাৎ যোগ থেকে বিয়োগ এবং বিয়োগ থেকে যোগ ভাগ থেকে গুণ ও গুণ থেকে ভাগ হয়।

উদাহরণ-2 : সমাধান করো: (i) $\frac{x}{3}=4$ (ii) 3x=15 (iii) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-1=4$

সমাধান (i) $\frac{x}{3}=4 \rightarrow \frac{x}{3}\times 3=4\times 3$ (উভয় পার্শ্বে 3 দ্বারা গুণ করলে)

x = 12

লক্ষ করো- বামদিকে 3 ভাজক অপসারণ পরে ডানদিক উক্ত ভাজকের গুণন হল।

(ii) $3x=15\rightarrow\frac{3x}{3}=\frac{15}{3}$ (উভয় পার্শ্বে 3 দ্বারা ভাগ করলে)

x=5

লক্ষ করো-বামদিকে x-র সহন 3 অপসারণ পরে ডানদিকে 3 ভাজক ভাবে থাকল।

(iii) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-1=4$

$=\frac{3x+2x}{4}-1=4\rightarrow\frac{5x}{6}-1=4$

$=\left(\frac{5x}{6}-1\right)+1=4+1$ (উভয় পার্শ্বে 1 যোগ করা হল)

$=\frac{5x}{6}=5=\frac{5x}{6}\times6=5\times6$ (উভয় পার্শ্বকে 6 দ্বারা গুণ করা হল)

$=5x=30\rightarrow\frac{5x}{5}=\frac{30}{5}$ (উভয় পার্শ্বকে 5 দ্বারা ভাগ করা হল) $\Rightarrow x = 6$

উপরোক্ত দুটি উদাহরণ থেকে এটা স্পষ্ট যে, কোনো পদের পার্শ্বে পরিবর্তন হলে সম্পৃক্ত পদের প্রক্রিয়ার পরিবর্তন হয়।

নিজে করো সমাধান করো :

(i) 2x-3=4 (ii) $3x+\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$ (iii) $2x+\frac{3}{4}=x-\frac{1}{4}$

(iv) 0.3(6+y)=0.4 (v) $\frac{3x}{5}+1=\frac{2}{5}$

7.5.1 একটি অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট একঘাতী সমীকরণ সমাধান নিমিত্ত সূচনা

(i) অজ্ঞাত রাশি সম্মিলিত সমস্ত পদ বামদিকে ও অজ্ঞাত রাশি থাকা পদগুলি দক্ষিণদিকে পর্যবেক্ষণ করা যায়।

(ii) বামদিকে একাধিক অজ্ঞাত রাশি সম্মিলিত পদগুলি একত্র করা গিয়ে একটি পদে প্রকাশ করা যায় ও সেরকম অবশিষ্ট পদগুলি দক্ষিণ দিকে একত্র করা যায়।

(iii) তৎপূর্বে বামদিকে সৃষ্টি হয়ে থাকা পদ (ax অথবা $\frac{a}{x}$) থেকে x (অজ্ঞাত রাশি)-র মান স্থির করতে পারব। নীচের উদাহরণটিকে লক্ষ করো।

উদাহরণ-3: সমাধান করো: 2x-3=x+2

সমাধান : 2x-3=x+2 $\rightarrow 2x-3+3=x+2+3$ (উভয় দিকে 3 যোগ করে)

2x=x+5=2x-x=5 (উভয় পার্শ্বে x বিয়োগ করে)

x=5

উদাহরণ-4 : সমাধান করো : $\frac{5x}{2}-\frac{7}{2}=\frac{3x}{2}-4$

সমাধান : $\frac{5x}{2}-\frac{7}{2}=\frac{3x}{2}-4\Rightarrow\frac{5x}{2}=\frac{3x}{2}-4+\frac{7}{2}$ (উভয় পার্শ্বে $\frac{7}{2}$ যোগ করলে)

$\Rightarrow\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}-4+\frac{7}{2}$

$\Rightarrow\frac{5x-3x}{2}=\frac{-8+7}{2}\Rightarrow\frac{2x}{2}=\frac{-1}{2}\Rightarrow x=\frac{-1}{2}$

উদাহরণ-5 : সমাধান করো : $\frac{6x+1}{3}+1=\frac{x-3}{6}$

সমাধান : $\frac{6x+1}{3}+1=\frac{x-3}{6}\Rightarrow\frac{6x+1+3}{3}=\frac{x-3}{6}\Rightarrow\frac{6x+4}{3}=\frac{x-3}{6}$

$\Rightarrow\left(\frac{6x+4}{3}\right)\times 6=\frac{x-3}{6}\times 6$ (উভয় পার্শ্বে 6 দ্বারা গুণ 3 ও 6-র ল.সা.গু 6)

$\Rightarrow 12x+8=x-3 \Rightarrow 12x-x+8= -3$ (উভয় পার্শ্বে x বিয়োগ করে)

$\Rightarrow$ $11x= -3-8$ (উভয় পার্শ্বে 8 বিয়োগ করে)

$\Rightarrow 11x=-11 \Rightarrow x=\frac{-11}{11}$ (উভয় পার্শ্বকে 11দ্বারা ভাগ করলে)

$\Rightarrow x=-1$

উদাহরণ-6 : সমাধান করো। $\frac{3x+5}{7x-3}=\frac{4}{5}$

সমাধান : $= \frac{3x+5}{7x-3}=\frac{4}{5}$

$\Rightarrow 5\ (3x+5)=4\ (7x-3)$

$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ $=AD=BC$ ($B\neq 0$, $D\neq 0$ একে বজ্রগুণ প্রক্রিয়া বলে।

$\Rightarrow$ $15x+25=28x-12$

$\Rightarrow 15x-28x+25= -12$ (28x-র পার্শ্ব পরিবর্তন করলে)

$\Rightarrow$ $-13x= -12 -25$ (25 এর পার্শ্ব পরিবর্ত্তন করলে)

$\Rightarrow x=\frac{-37}{-13}$ (উভয় পার্শ্বকে -13 দ্বারা ভাগ করলে।)

$\Rightarrow x=\frac{37}{13}\Rightarrow x=2\frac{11}{13}$

উদাহরণ-7 : সমাধান করো। $z\ (z+6)=z(z+7)-6$

সমাধান: $z\ (z+6)=z\ (z+7)\ -6$

$\Rightarrow z^2+6z=z^2+7z-6$

$\Rightarrow z^2+6z-z^2=z^2+7z-6-z^2$ (উভয় পার্শ্বে z^2 বিয়োগ করলে)

$\Rightarrow 6z-7z=7z-6-7z$ (উভয় পার্শ্বে 7z বিয়োগ করলে)

$\Rightarrow$ $-z=-6=z=6$ (উভয় পার্শ্বকে -1 দ্বারা ভাগ করলে)

টীকা: সমীকরণটিকে সমাধান করার পর উক্ত মূলকে অজ্ঞাত রাশি স্থানে লিখে সমীকরণের বাম দিক ও ডানদিক সমানতাকে পরীক্ষা করা উচিত।

উদাহরণস্বরূপ উদাহরণ 7 যে মূলটি $z=6$

প্রদত্ত সমীকরণ $z\ (z+6)=z\ (z+7)-6$-র বামদিক $=z\ (z+6)$

$=6\ (6+6)=6\times 12=72$

ডানদিক $=z\ (z+7)-6=6\ (6+7)-\ 6\ =6\times 13-6$ হলে $78-6=72$

অথবা z-6-এর জন্য বামদিক = ডানদিক।

উদাহরণ 8 : সমাধান করো x(x+9)=(x+3) (x+7)-10

সমাধান : $x(x+9)\ (-x+3)\ (x+7)\ -10 = x^2+9x = x^2+3x+7x+21-10$

$= x^2+9x = x^2+10x+11 = 1x^2-x^2+9x-10x = 11$ (পক্ষান্তরণের দ্বারা)

$= 1-x = 11 = x = -11$ (উভয় পার্শ্বকে -1 দ্বারা গুন করে)

অনুশীলনী-7(a)

বন্ধনী মধ্যে দেওয়া থাকা মান মধ্যে প্রদত্ত সমীকরণে থাকা অজ্ঞাত রাশি ঠিক মানটি বেছে লেখো।

1. (i) x-2=7 (2, 7, 9, 11) (ii) y+3=10 (3, 7, 11, 13)

(iii) 2x=8 (4, 6, 8, 10) (iv) $\frac{x}{3}=7$ (10, 14, 18, 21)

(v) 8-x=3 (3, 5, 8, 11) (vi) 7-x=2 (5, 6, 7, 8)

(vii) $x\times\frac{1}{5}=10$ (40, 50, 60, 70) (viii) $1.6=\frac{y}{1.5}$ (1.5, 1.6, 2.1, 2.4)

(ix) -8=x=3 (-11, -5, 0, 11) (x) $\frac{2}{3}x=1.4$ (1.4, 2.1, 2.8, 4.2)

2. নীচের সমীকরণগুলি সমাধান করো।

(i) 3x+7=x+15 (ii) 2x-5=x+11 (iii) 2x-6=5x+9

(iv) 4x-8=3x+9 (v) 5x-6=4x+3 (vi) $\frac{3}{7}+2=\frac{17}{7}$

(vii) $\frac{5x}{3}+\frac{2}{5}=1$ (viii) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=13$ (ix) $\frac{2x}{3}-\frac{3x}{8}=\frac{7}{12}$

(x) $\frac{7}{x}+\frac{3}{5}=\frac{-1}{10}$

3. সমাধান করো। (বজ্রগুণন প্রণালী সাহায্যে)

(i) $\frac{x+2}{x-2}=\frac{3}{2}$ (ii) $\frac{7y+2}{5}=\frac{6y-5}{11}$ (iii) $\frac{x+7}{2x-5}=\frac{1}{3}$

(iv) $\frac{5x+6}{3x-5}=\frac{4}{3}$ (v) $\frac{x+\frac{1}{2}}{2x-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$

4. সমাধান করো। তৎপূর্বে অজ্ঞাত রাশি পরিবর্তে নির্ণেয় মূলকে ব্যবহার করে উভয় পার্শ্বে সমনতাকে পরীক্ষা করো।

(i) 2(x+3)+7(x-7)=3(x+16)+12

(ii) (x+1) (x+2)+6=(x-3) (x-4)

(iii) x(x+11)=(x+5) (x+7) -9

(iv) 2(x+3)+15=3(2x-4)+24

(v) 24x-8(2x+8)=6x-(2-x) -72

7.6 একঘাতী সমীকরণ প্রয়োগ (Application of linear equation) :

পাটিগণিত সম্পর্কীয় প্রশ্নদের আবশ্যক উত্তর জন্য একটি অজ্ঞাত রাশিকে নিয়ে একটি সমীকরণ গঠন করা যায় থাকে ও এই সমীকরণকে সমাধান করার পর আবশ্যক উত্তরটি সহজে পাওয়া যায়। এ প্রকার প্রণালীকে বীজগাণিতিক প্রণালী সমাধান বলা যায়। নিম্নে কয়েকটি সমাধান দেওয়া গেছে। সেগুলি লক্ষ করো।

প্রথম সোপান: পাটিগণিত প্রশ্নটিতে অজ্ঞাত রাশিটিকে চিহ্নিত করো।

দ্বিতীয় সোপান: প্রশ্নে থাকা শর্তদের নিয়ে একটি অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট একটি সমীকরণ গঠন করো।

তৃতীয় সোপান: লব্ধ সমীকরণ সমাধান করো।

উদাহরণ-9 : কোন সংখ্যাটিতে 7 যোগ করলে যোগফল 103 হবে?

সমাধান : মনে করো সংখ্যাটি x।

প্রশ্ন অনুযায়ী x+7=103=x+7-7=103-7

=x=96 $\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি 96।

উদাহরণ 10 : দুটি সংখ্যার যোগফল 74। একটি সংখ্যা অন্যসংখ্যা অপেক্ষা 10 অধিক। সংখ্যা দুটি কত?

সমাধান: মনে করো ছোট সংখ্যাটি x। অন্য সংখ্যাটি হবে x+10

প্রশ্ন অনুযায়ী x+(x+10)=74=2x+10=74

=2x=74-10=2x=64=x=32

$\therefore$ ছোট সংখ্যাটি 32 হলে অন্য সংখ্যাটি =32+10=42।

উদাহরণ 11 : একটি সংখ্যার দুহগুণ সংখ্যাটি অর্ধেক থেকে 45 অধিক সংখ্যাটি স্থির করো।

সমাধান: মনে করো সংখ্যাটি x-এর দুইগুণ 2x এবং সংখ্যার অর্ধেক $\frac{x}{2}$

প্রশ্নানুসারে $2x-\frac{x}{2}=45 \Rightarrow \frac{4x-x}{2}=45 \Rightarrow \frac{3x}{2}=45$

$\Rightarrow x=45\times\frac{2}{3} \Rightarrow x=30$

$\therefore$ সংখ্যাটি- 30

উদাহরণ- 12 : একটি দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার অঙ্কদ্বয় সমষ্টি 8। যদি সংখ্যাটিতে 18 যোগ করা যায় তবে সংখ্যার অঙ্কদ্বয় স্থান বদলে যায় সংখ্যাটি নির্ণয় করো।

সমাধান :- মনে করো সংখ্যাটি একক স্থানে অঙ্ক x তাই দশক স্থানের অঙ্ক 8-x

$\therefore$ সংখ্যাটি =10(8-x)+x

সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বদলালে সংখ্যাটি হবে 10x+(8-x)

[10(8-x)+x]+18=10x+8-x

$\Rightarrow$ 80-10x+x+18=10x+8-x $\Rightarrow$ 98-9x=9x+8

$\Rightarrow$ 98-8=9x+9x $\Rightarrow$ 90=18x $\Rightarrow$ 18x=90 $\Rightarrow$ $x=\frac{90}{18}=5$

একক স্থানীয় অঙ্ক 5 হলে দশক স্থানীয় অঙ্কটি হবে 8-5=3

$\therefore$ সংখ্যাটি $=10\times3+5=35$ (উত্তর)

উদাহরণ-13 : একটি পরিমেয় সংখ্যার হর লব অপেক্ষা 8 অধিক লব ও হর প্রত্যেকের 9 করে যোগ করলে সংখ্যাটি $\frac{11}{50}$ সহিত সমান হবে সংখ্যাটি নির্ণয়।

সমাধান: পরিমেয় সংখ্যাটি লবকে x নেওয়া যাক প্রশ্নানুসারে হর=x+8

$\therefore$ পরিমেয় সংখ্যাটি $=\frac{x}{x+8}$

পুনশ্চ প্রশ্নানুসারে, $\frac{x+9}{(x+8)+9}=\frac{11}{15}$

$\rightarrow (x+9)15=(x+17)11\rightarrow 15x+135=11x+187$

$\rightarrow 15x-11x=187-135\rightarrow 4x=52\rightarrow x=13$

$\therefore$ পরিমেয় সংখ্যা $=\frac{x}{x+8}=\frac{13}{13+8}=\frac{13}{21}$ (উত্তর)

উদাহরণ-14 : অর্জুনের বর্তমান বয়স শ্রেয়ার বয়সের দুই গুণ। পাঁচ বছর পূর্বে তার বয়স শ্রেয়ার বয়সের 3 গুণ ছিল। তাদের বর্তমান বয়স নির্ণয় করো।

সমাধান: মনে করো শ্রেয়ার বর্তমান বয়স x বছর। তাই অর্জুনের বর্তমান বয়স 2x বছর। 5 বছর পূর্বে শ্রেয়ার বয়স (x-5) বছর এবং 5 বছর পূর্বে অর্জুনের বয়স =(2x-5) বছর ছিল।

প্রশ্নানুসারে $2x-5=3(x-5)$

$\rightarrow 2x-5=3x-15\rightarrow 15-5=3x-2x\rightarrow 10=x$

$\rightarrow x=10$

$\therefore$ শ্রেয়ার বর্তমান বয়স 10 বছর এবং অর্জুনের বর্তমান বয়স (2×10) বছর =20 বছর। (উত্তর)

অনুশীলনী-7(b)

1. কোনো একটি সংখ্যার $\frac{4}{5}$ সেই সংখ্যার $\frac{3}{4}$ থেকে 4 বেশি। সংখ্যাটি স্থির করো।
2. কোনো সংখ্যা $\frac{1}{3}$ -এর $\frac{1}{4}$ অপেক্ষা 6 বেশি?
3. কোনো সংখ্যার $\frac{1}{2}$, 12 থেকে যত কম এর $\frac{5}{2}$, 12 থেকে তত বেশি।
4. তিনটি ক্রমিক বিজোড় সংখ্যার সমষ্টি 33 হলে মধ্যম সংখ্যাটি নির্ণয় করো।
5. কোন দুটি ক্রমিক সংখ্যার সংষ্টি 31।
6. তিনটি ক্রমিক জোড় সংখ্যার যোগফল 36 হলে বৃহত্তম সংখ্যাটি নির্ণয় করো।

7. হামিদ টাকার 15%, রশিদ টাকার 20%, সহিত সমান। দুজনের টাকা মিলে 350 হলে কার টাকা কত?

8. দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার অঙ্কদ্বয় সমষ্টি 9। যদি অঙ্কদ্বয় স্থান বদলানো যায় তবে নতুন সংখ্যাটি মূল সংখ্যা থেকে 27 বেশি হবে। সংখ্যাটি নির্ণয় করো।

9. দুই অঙ্ক বিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 10। সংখ্যাটিকে 36 যোগ করলে সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বদলে যায়। সংখ্যাটি নির্ণয় করো।

10. কোন সংখ্যা 20%-এর 12% অপেক্ষা 12 বেশি।

11. দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার অন্তর 30। তাদের অনুপাত 2:5 হলে সংখ্যাটি কত?

12. একটি শ্রেণী মোট ছাত্র সংখ্যা 49। ছেলেদের সংখ্যা মেয়েদের সংখ্যার $\frac{3}{4}$ গুণ হলে শ্রেণীতে ছেলে ও মেয়ের সংখ্যা নির্ণয় করো।

13. দুটি অনুপূরক কোণের অন্তর 10^0 হলে কোণদ্বয়ের পরিমাণ স্থির করো।

14. একটি ব্যাগে 500-র 5 টাকা ও 10 টাকা মুদ্রা অছে। মোট মুদ্রা সংখ্যা 75 হলে প্রত্যেক প্রকার মুদ্রা সংখ্যা কত?

15. একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দুই গুণ আয়তক্ষেত্রে পরিসীমা 150 মিটার হলে এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করো।

16. একটি পরিমেয় সংখ্যা লব ও হরের অনুপাত 3:4। হরের 3+ করলে লব ও হর অনুপাত 3:5 হয়। পরিমেয় সংখ্যাটি স্থির করো।

17. একটি ত্রিভুজের কোণত্রয় পরিমাণ 10^0 করে কমিয়ে দিয়ে অবশিষ্ট অনুপাত 6:4:5 হয়, ত্রিভুজটি বৃহত্তম কোণের পরিমাণ স্থির করো।

18. শরৎ এর বাড়ি থেকে ঘণ্টাপ্রতি 4 কিমি বেগে স্কুলে গিয়ে ঘণ্টা বাজার 12 মিনিট পরে পৌঁছাল, পরের দিন সে ঘণ্টাপ্রতি 5 কি.মি বেগে গিয়ে ঠিক সময়ে স্কুলে পৌঁছাল। উভয় দিন সে বাড়ি থেকে একটি নির্দিষ্ট সময়ে স্কুলে গিয়ে থাকলে তার বাড়ি থেকে স্কুলের দূরত্ব নির্ণয় করো।

7.7 দ্বিঘাত সমীকরণ ও তার সমাধান (Quadric equation and its solution) :

একটি অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট সমীকরণে অজ্ঞাত রাশি সর্বোচ্চ ঘাত 2 হলে একে দ্বিঘাত সমীকরণ বলে।

এর সাধারণ রূপ হল $ax^2+bx+c=0$ যেখানে $a \neq 0$।

এখানে দ্বিঘাতী সমীকরণ বামদিক একটি দ্বিঘাত পলিনোমিয়াল যার উৎপাদকীকরণ সম্ভব উক্ত পলিনোমিয়াল উৎপাদকীকরণ দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণ সমাধান করা যায়।

পূর্ব অধ্যায়ে তোমরা দ্বিঘাত পলিনোমিয়ালের উৎপাদক কিভাবে নির্ণয় করা যায় পড়েছ। পড়া থেকে অভেদগুলো মনেকর।

সেই অভেদগুলি হল—

(i) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(ii) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(iii) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

উপরের অভেদ প্রয়োগে দ্বিঘাত পলিনোমিয়াল উৎপাদকীকরণ সম্ভব হয়ে থাকে। প্রত্যেক দ্বিঘাত পলিনোমিয়ালের দুটি একঘাতী উৎপাদক থাকে।

মনে রাখো-দ্বিঘাত সমীকরণে কেবল দুটি বীজ আছে।

উদাহরণ-15 : সমাধান করো: $x^2-36=0$

সমাধান : $x^2-36=0 \rightarrow (x)^2-(6)^2=0=(x+6)(x-6)=0$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ অভেদ প্রয়োগ

$\rightarrow (x+6)=0$ অথবা $x-6=0 \rightarrow x=-6$

কিংবা $x=6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান -6 ও 6।

উদাহরণ-16 : $x^2-5x+6=0$ সমীকরণের সমাধান করো।

সমাধান : $x^2-5x+6=0 \rightarrow x^2+\{(-3)+(-2)\}x+(-3)(-2)=0$

$\rightarrow (x-3)(x-2)=0$

$\rightarrow x-3=0$ কিংবা $x-2=x \rightarrow x=3$ কিংবা $x=2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান 3 ও 2

উদাহরণ-17 : সমাধান করো: $2x^2-9x+4=0$

সমাধান : $2x^2-9x+4=0 \rightarrow 2x^2-8x-x+4=0$

(এখানে মধ্যম পদের সহন-9 দুটি সংখ্যার সমষ্টি হবে এবং উক্ত সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল 8 হবে)।

$2x(x-4)-1(x-4)=0 \rightarrow (x-4)(2x-1)=0$

$(x-4)=0$ বা $(2x-1)=0$

$\rightarrow x=4$ বা $x=\frac{1}{2}$ $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: 4 ও $\frac{1}{2}$

উদাহরণ 18

সমাধান করো- $x^2-2x+1=0$

সমাধান-$x^2-2x+1=0 \rightarrow (x)^2-2.x.1+(1)^2=0$

$\rightarrow (x-1)^2=0$ অভেদ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$-র প্রয়োগ

$\rightarrow (x-1)(x-1)=0 \rightarrow (x-1)=0$ বা $(x-1)=0$

$\rightarrow x=1$ (উত্তর)

$\therefore$ মূলদ্বয় প্রত্যেকে 1 (এখানে দুটি বীজ সমান।)

উদাহরণ-19 : $x-\frac{18}{x}=3$-র মূলদ্বয় স্থির করো।

সমাধান : $x-\frac{18}{x}=3 \rightarrow \frac{x^2-18}{x}=3 \rightarrow x^2-18=3x$

$x^2-3x-18=0 \rightarrow x^2-6x+3x-18=0$

$=x(x-6)+3(x-6)=0 \rightarrow (x-6)(x+3)=0$

$\rightarrow$ x-6=0 অথবা x+3=0

x=6 কিংবা x=-3

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান-6 ও -3।

উদাহরণ-20 : সমাধান করো-x^2-2x=323

সমাধান-: $x^2-2x=323 \rightarrow x^2-2.x.1+(1)^2$

$=(1)^2+323$

$\rightarrow (x-1)^2=324 \rightarrow (x-1)^2=\pm(18)^2$

$\rightarrow (x-1)=\pm 18 \rightarrow x=1\pm 18$

$\rightarrow$ x=1+18 কিংবা x=x-18$\rightarrow$ x=19 কিংবা -17

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান-19 ও -17 (উত্তর)

অনুশীলনী-7(c)

1. **নিম্নলিখিত দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করো।**

(i) $x^2-3x=0$ (ii) $4x^2-25=0$ (iii) $2x^2-8=0$

(iv) $9x^2=16$ (v) $2x^2+5x=0$ (vi) $ax^2-bx=0$

(vii) $\frac{x^2}{3}=27$ (viii) $\frac{x^2}{9}=81$

2. **নিম্নলিখিত দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করো।**

(i) $x^2-2x-3=0$ (ii) $x^2-4x=5$

(iii) $x^2-x=20$ (iv) $2^2+7x+12=0$

(v) $x^2+2x-35=0$ (vi) $x^2-6x+5=0$

(vii) $2x^2-x-3=0$ (viii) $3x^2+2x-5=0$

2. (vii) জন্য সূচনায় এমন দুটি সংখ্যা স্থির করতে হবে সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল (-1) এবং গুণফল (-6) হবে।

(ix) $x^2-(a+b)x+ab=0$(x) $x^2+(a-b)-ab=0$

সূচনা মূলদ্বয়কে a ও b মাধ্যমে স্থির করো।

⌘⌘⌘⌘⌘

ব্যবসায়িক গণিত
(COMMERCIAL MATHEMATIC)

অধ্যায়
৮

8.1 শতকরা লাভ ক্ষতি

ব্যবসায়ে ব্যবসায়ীর লাভ বা ক্ষতি হওয়া আমরা জানি। কোনো কারণে যদি দোকানের ব্যবসা করে থাকা মূলধন পায় না, অর্থাৎ কোনো পরিস্থিতিতে দোকানী কেনা দাম পেতে পারে না তবে তার ক্ষতি হয় বলে আমরা বলি। যদি কেনা দামের থেকে ব্যবসায়ী বেশি পেলে তবে আমরা বলি লাভ হল। সাধারণত লাভের জন্য দোকানী ব্যবসা করে থাকে।

ব্যবসায়ের লাভ বা ক্ষতিকে শতকরাতে হিসাব করে প্রকাশ করা যায়।

8.1.1 শতকরা হিসাব

ক্রয়মূল্য 100 টাকা নিয়ে বিক্রয়মূল্যে আমরা লাভ বা ক্ষতি হিসাব করে প্রকাশ করলে শতকরা লাভ বা ক্ষতি বলে। তোমরা পূর্ব শ্রেণীতে লাভ ক্ষতি হিসাব সম্পর্কে জান এবং শতকরা লাভ বা ক্ষতি কেমন নির্ণয় করা যায় তাও জানো।

উদাহরণ-1

একজন দোকানী দুটি জিনিস প্রত্যেকটি 100 টাকা করে কিনল। একটিকে 130 টাকা ও অন্যটিকে 90 টাকাতে বিক্রি করল। তার কোন জিনিসে কত শতকরা লাভ বা ক্ষতি হল।

সমাধান:

(i) প্রথম জিনিসের ক্রয়মূল্য 100 টাকা ও বিক্রয়মূল্য 130 টাকা।

এখানে বিক্রয়মূল্য বেশি হেতু লাভ = বিক্রয়মূল্য - ক্রয়মূল্য

= 130 টাকা - 100 টাকা = 30 টাকা।

ক্রয়মূল্য 100 টাকা হয়ে থাকায় শতকরা লাভ = 30%

(ii) দ্বিতীয় জিনিসের কেনা দাম 100 টাকা এবং বিক্রি দাম 90 টাকা।

এখানে বিক্রয়মূল্য কম তাই ক্ষতি হল এবং ক্ষতি = ক্রয়মূল্য - বিক্রয়মূল্য

=100 টাকা - 90 টাকা =10 টাকা।

ক্রয়মূল্য 100 টাকা হয় থকায় শতকরা ক্ষতি=10%

মনে রাখো- (i) লাভ=বিক্রয় মূল্য - ক্রয়মূল্য

(ii) $\%$ লাভ $= \dfrac{\text{লাভ}}{\text{ক্রয় মূল্য}} \times 100$

(iii) ক্ষতি=ক্রয়মূল্য - বিক্রয়মূল্য

(iv) $\%$ ক্ষতি$= \dfrac{\text{ক্ষতি}}{\text{ক্রয় মূল্য}} \times 100$

উদাহরণ-2 : একটি শার্টকে 360 টাকা কিনে 10% লাভে বিক্রি করা হল। বিক্রয়মূল্য নির্ণয় করো।

সমাধান: বিক্রয়মূল্য=ক্রয়মূল্য + লাভ

মনে করো ক্রয়মূল্য=100 টাকা, লাভ=10 টাকা।

$\therefore$ বিক্রয়মূল্য=100 টাকা + 10 টাকা=110 টাকা

100 টাকা ক্রয় সময় বিক্রয়মূল্য =110 টাকা

1 টাকা ক্রয়মূল্য সময় বিক্রয়মূল্য $= \dfrac{110}{100}$ টাকা

360 টাকা ক্রয়মূল্য সময় বিক্রয়মূল্য $= \dfrac{110}{100} \times 360$ টাকা

=396 টাকা

বি.দ্র: এখানে লক্ষ করো বিক্রয়মূল্য $= \left(\dfrac{110}{100} \times 360\right)$ টাকা $\rightarrow$ বিক্রয়মূল্য $= \dfrac{(100+10)\times 360}{100}$

বিকল্প ভাবে আমরা লিখতে পারব $\boxed{\text{বিক্রয়মূল্য} = \dfrac{(\mathbf{100}+\text{লাভ }\%)\times \text{ক্রয়মূল্য}}{\mathbf{100}}}$

অথবা বিক্রয়মূল্য $= \dfrac{(\mathbf{100}+\text{লাভ }\%)}{\mathbf{100}} \times$ ক্রয়মূল্য $= (1+ \dfrac{\text{লাভ }\%}{\mathbf{100}}) \times$ ক্রয়মূল্য

অর্থাৎ $\boxed{\text{শতকরা লাভ r\% হলে বিক্রয়মূল্য} = \left(1+\dfrac{r}{100}\right) \times \text{ক্রয়মূল্য}}$

সেরকম $\boxed{\text{শতকরা ক্ষতি r\% হলে বিক্রয়মূল্য} = \left(1-\dfrac{r}{100}\right) \times \text{ক্রয়মূল্য}}$

বিকল্পভাবে লিখতে পারব $\boxed{\text{বিক্রয়মূল্য} = \dfrac{(\mathbf{100} - \text{ক্ষতি }\%) \times \text{ক্রয়মূল্য}}{\mathbf{100}}}$

উদাহরণ-3 : একটি বইদোকানী একটি বইকে 72 টাকায় বিক্রয় করে শতকরা 20% লাভ করলে বইয়ের ক্রয়মূল্য নির্ণয় করো।

সমাধান: মনে করো ক্রয়মূল্য =100 টাকা

$\therefore$ 100 টাকা ক্রয়মূল্য সময়ে লাভের পরিমাণ =20 টাকা

বিক্রয়মূল্য = ক্রয়মূল্য + লাভ = 100 টাকা +20 টাকা = 120 টাকা

বিক্রয়মূল্য 120 টাকা সময় ক্রয়মূল্য =100 টাকা

বিক্রয়মূল্য 72 টাকা সময় ক্রয়মূল্য $=\frac{100}{120}\times 72$ টাকা = 60 টাকা

বি. দ্র. এখানে লক্ষ করো ক্রয়মূল্য $=\frac{100\times 72}{(100+20)}=$ $\boxed{\text{ক্রয়মূল্য} = \frac{\mathbf{100}\times\text{বিক্রয়মূল্য}}{(\mathbf{100}+\text{লাভ})}}$

উদাহরণ-4 : একজন লোক একটি পদার্থকে 75 টাকা বিক্রয় করে ক্রয়মূল্য $\frac{1}{4}$ লাভ করল। তবে পদার্থের ক্রয়মূল্য কত নির্ণয় করো।

সমাধান: মনে করো পদার্থের ক্রয়মূল্য = x টাকা লাভ $=\frac{x}{4}$ টাকা

বিক্রয়মূল্য =x টাকা + $\frac{x}{4}$ টাকা $=\frac{5x}{4}$ টাকা

প্রশ্নানুসারে, $\frac{5x}{4}=75 \rightarrow x=\frac{75\times 4}{5} \rightarrow x=60$

$\therefore$ পদার্থের ক্রয়মূল্য 60 টাকা।

উদাহরণ-5 : একজন দোকানী একটি বাক্সকে 570 টাকা বিক্রি করে 15% ক্ষতি করল। যদি সে বাক্সকে 570 টাকা বিক্রি করে থাকে, তবে তার কত লাভ বা ক্ষতি হবে নির্ণয় করো।

সমাধান: প্রথম বিক্রির বিক্রয়মূল্য= 570 টাকা। ক্ষতি 15%।

100 টাকার ক্রয় (100–15) অথবা 85 টাকা বিক্রি।

$\therefore$ 85 টাকা বিক্রি সময়ে বাক্সর ক্রয়মূল্য=100 টাকা

570 টাকা বিক্রি সময়ে বাক্সর ক্রয়মূল্য $=\frac{100\times 570}{85}$ টাকা = 600 টাকা

$\therefore$ বাক্সর ক্রয়মূল্য = 600 টাকা

বি.দ্র: $\boxed{\text{ক্রয়মূল্য} = \frac{\mathbf{100}\times\text{বিক্রয়মূল্য}}{(\mathbf{100}-\text{ক্ষতি \%})}}$

পুনঃবিক্রয়মূল্য =570 টাকা, ক্রয়মূল্য =600 টাকা।

$\therefore$ বিক্রয়মূল্য < ক্রয়মূল্য $\therefore$ ক্ষতি =600 টাকা −570 টাকা =30

$$\% \text{ ক্ষতি}= \frac{\text{ক্ষতি}}{\text{ক্রয়মূল্য}} \times 100 = \frac{30\times100}{600} = 5\,\%$$

উদাহরণ-6: 20টি কলমের বিক্রয়মূল্য 25টি কলমের ক্রয়মূল্যের সহিত সমান হলে শতকরা লাভ নির্ণয় করো।

সমাধান: 20টি কলমের বিক্রয়মূল্য =100 টাকা।

$\therefore$ 25টি কলমের ক্রয়মূল্য =100 টাকা

একটি কলমের বিক্রয়মূল্য $=\frac{100}{20}=5$ টাকা

25টি কলমের বিক্রয়মূল্য=5×25=125 টাকা।

$\therefore$ লাভ=বিক্রয়মূল্য−ক্রয়মূল্য=(125−100) টাকা =25 টাকা

$$\% \text{ লাভ}=\frac{\text{লাভ}}{\text{ক্রয়মূল্য}}\times100=\left(\frac{25}{100}\times100\right)\%=25\ \%$$ (উত্তর)

উদাহরণ-7: একজন দোকানী সমান মূল্যে দুটি জিনিসকে বিক্রয় করে একটির 20% লাভ ও অন্যটির 20% ক্ষতি হল। তবে ব্যবসায়ে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হল;

সমাধান: মনে করো প্রত্যেক জিনিসের বিক্রয়মূল্য =100 টাকা।

প্রথম প্রকার বিক্রি : লাভ =20%

$$\text{ক্রয়মূল্য} = \frac{\mathbf{100} \times \text{বিক্রয় মূল্য}}{(\mathbf{100}+\text{লাভ }\%)} = \frac{100\times100}{100+20} = \frac{100\times100}{120} = \frac{250}{3} \text{ টাকা}$$

দ্বিতীয় প্রকার বিক্রি : ক্ষতি =20%

$$\text{ক্রয়মূল্য} = \frac{\mathbf{100} \times \text{বিক্রয়মূল্য}}{(\mathbf{100}-\text{ক্ষতি }\%)} = \frac{100\times100}{(100-20)} = \frac{100\times100}{80} = 125 \text{ টাকা}$$

$\therefore$ দুটি জিনিসের ক্রয়মূল্য $\left(\frac{250}{3}+125\right)=\frac{250+375}{3}=\frac{625}{3}$ টাকা।

এবং দুটি জিনিসের বিক্রয়মূল্য =200 টাকা।

ক্ষতি = ক্রয়মূল্য−বিক্রয়মূল্য $=\left(\frac{625}{3}-200\right)$ টাকা $=\frac{25}{3}$ টাকা

$\therefore$ শতকরা ক্ষতি= $\dfrac{\text{ক্ষতি}}{\text{ক্রয়মূল্য}} \times 100 = \dfrac{\frac{25}{3}}{\frac{625}{3}} \times 100 = 4\,\%$

$\therefore$ ব্যবসায়ে শতকরা ক্ষতির পরিমাণ = 4%

উদাহরণ-8 : একটি ফলদোকানী 20 কিগ্রা আপেল 300 টাকাতে কিনল। সেখান থেকে 2 কিগ্রা পচা বেরোল। অবশিষ্ট আপেল কিগ্রা প্রতি কতদরে বিক্রয় করলে 30% লাভ হবে।

সমাধান: অবশিষ্ট আপেলের পরিমাণ =20 কিগ্রা –2 কিগ্রা

=18 কিগ্রা লাভ =30%

লাভের পরিমাণ =ক্রয়মূল্যের 30% = $\left(300 \times \dfrac{30}{100}\right)$ টাকা = 90 টাকা

= ক্রয়মূল্য + লাভ =300+90 টাকা =390 টাকা

= আপেল বিক্রয়মূল্য =390 টাকা

আপেলের বিক্রয়মূল্য = $\dfrac{390}{18}$ টাকা = $21\dfrac{2}{3}$ টাকা। (উত্তর)

উদাহরণ-9 : একজন দোকানী 2 টাকায় 5টি দরে 100টি লেবু ও 3 টাকায় 8টি দরে 80টি লেবু কিনে একটিকে 50 পয়সা হিসাবে বিক্রি করল। সে শতকরা কত লাভ করল?

সমাধান: 5টি লেবুর ক্রয়মূল্য 2 টাকা

$\therefore$ 100 লেবুর ক্রয়মূল্য = $\dfrac{2 \times 100}{5} = 40$ টাকা

8টি লেবুর ক্রয়মূল্য 3 টাকা

$\therefore$ 80টি লেবুর ক্রয়মূল্য = $\dfrac{3 \times 80}{8} = 30$ টাকা

এখানে দুই প্রকারের 180টি লেবুর ক্রয়মূল্য =40+30 টাকা =70 টাকা।

একটিকে 50 পয়সা বা $\dfrac{1}{2}$ টাকা হিসাবে 180টি লেবুর বিক্রয়মূল্য = $180 \times \dfrac{1}{2} = 90$ টাকা।

$\therefore$ লাভ = বিক্রয়মূল্য – ক্রয়মূল্য = 90–70=20 টাকা

$\therefore$ শতকরা লাভ = $\dfrac{\text{লাভ}}{\text{ক্রয়মূল্য}} \times 100 = \dfrac{20}{70} \times 100 = 28\dfrac{4}{7}\,\%$ (উত্তর)

8.2 রিহাতি

আমরা জামার দোকানে গেলে দেখব জামার উপরে একটি দর লেখা থাকে। সেই দরকে পোশাকের লিখিত মূল্য বলে। সময় সময়ে ব্যবসায়ীদের গ্রাহকদের আকৃষ্ট করার জন্য লিখিত মূল্য থেকে কিছু পরিমাণ কমিয়ে তাদের জিনিস বিক্রি করে থাকে। একে রিহাতি বলে।

মনে রাখো: লিখিত মূল্য উপরে রিহাতি শতকরাতে হিসাব হয়। একটি বইয়ের দাম 100 টাকা ও রিহাতি 20% হয়। তবে আমরা বইটিকে 80 টাকাতে পাই।

মনে রাখো: **রিহাতি = লিখিত মূল্য - বিক্রয়মূল্য** ...(1)

উদাহরণ 1 : একটি ঘড়ির লিখিত মূল্য 840 টাকা। ঘড়িটিকে 714 টাকায় বিক্রি করা হল। শতকরাতে রিহাতি নির্ণয় করো।

সমাধান: রিহাতি = লিখিত মূল্য - বিক্রয়মূল্য =840-714=126 টাকা

লিখিত মূল্য 840 টাকা সময় রিহাতি =126 টাকা

লিখিত মূল্য 100 টাকা সময়ের রিহাতি = $\left(\frac{126}{840}\times 100\right)\% = 15\%$

মনে রাখো- $\boxed{\text{রিহাতি } \% = \frac{\text{রিহাতি}}{\text{লিখিত মূল্য}}\times 100}$ .... (2)

8.2.1 ক্রমিক রিহাতি

গান্ধীজয়ন্তী অবসরে খাদি বস্ত্রর উপরে কেন্দ্রীয় সরকার ও রাজ্য সরকার উভয়ে রিহাতি দিয়ে থাকে। মনে করো কেন্দ্রীয় সরকারের রিহাতি x% । তা লিখিত মূল্য থেকে বাদ দিয়ে রাজ্য সরকার মনে করো y% রিহাতি দিল। এরকম রিহাতিকে ক্রমিক রিহাতি বলে।

আমরা জানি রিহাতি, লিখিত মূল্য উপরে দেওয়া যায়।

মনে করো জিনিসের লিখিত মূল্য z টাকা।

(i) কেন্দ্রীয় সরকারের রিহাতি $= x\% = z\times\frac{x}{100} = \frac{zx}{100}$ টাকা। কেন্দ্রীয় সরকারের রিহাতি পরে অবশিষ্ট বিক্রয়মূল্য

$$= z - \frac{zx}{100} = z\left(1-\frac{x}{100}\right) \text{ টাকা।}$$

পুনশ্চ রাজ্য সরকারের রিহাতি $= y\% = z\left(1-\frac{x}{100}\right)\times\frac{y}{100}$

$$= \frac{yz}{100}\left(1-\frac{x}{100}\right) \text{ টাকা।}$$

কেন্দ্র ও রাজ্য সরকারের রিহাতি পরে রিহাতি বিক্রয়মূল্য

$$= z\left(1-\frac{x}{100}\right) - \frac{yz}{100}\left(1-\frac{x}{100}\right) = z\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{y}{100}\right) = \left(\frac{100-x}{100}\right)\left(\frac{100-y}{100}\right)$$

অর্থাৎ $\boxed{\text{রিহাতি বিক্রয়মূল্য} = \text{লিখিত মূল্য}\times\left(\frac{\mathbf{100} - \text{প্রথম রিহাতি}\%}{\mathbf{100}}\right)\left(\frac{\mathbf{100} - \text{দ্বিতীয় রিহাতি}\%}{\mathbf{100}}\right) \quad .... (3)}$

উদাহরণ 2 : দুর্গা পুজা বয়নিকা বস্ত্র ভাণ্ডার প্রথমে 20% ও তার পর স্বতন্ত্র 10% রিহাতি দিল। একটি পাটশাড়ির লিখিত মূল্য 3000 টাকা হলে, বিক্রয়মূল্য নির্ণয় করো।

সমাধান: প্রথম প্রণালী

লিখিত মূল্য 3000 টাকা

প্রথম রিহাতি 20% এবং দ্বিতীয় রিহাতি 10%

জিনিসের বিক্রয়মূল্য = লিখিত মূল্য $\times\left(\frac{\mathbf{100} - \text{প্রথম রিহাতি}}{\mathbf{100}}\right)\left(\frac{\mathbf{100} - \text{দ্বিতীয় রিহাতি}}{\mathbf{100}}\right)$

$= \frac{3000\,(100-20)\,(100-10)}{100\times100}$ টাকা $= \frac{3000\times80\times90}{100\times100}$ টাকা

=2160 টাকা।

$\therefore$ শাড়িটির বিক্রয়মূল্য 2160 টাকা।

বিকল্প প্রণালী : 3000 টাকা 20% রিহাতি $= \frac{3000\times20}{100} = 600$ টাকা

অবশিষ্ট বিক্রয়মূল্য =(3000 - 600) টাকা 2400 টাকা

আবার স্বতন্ত্র রিহাতি 10% হেতু রিহাতির পরিমাণ =2400 টাকা 10% = 240 টাকা।

$\therefore$ শাড়ির বিক্রয়মূল্য =2400 টাকা -240 টাকা 2160 টাকা

অনুশীলনী-8 (a)

1. একজন দোকানী একটি বিছানার চাদরকে 640 টাকায় বিক্রয় করে 28% লাভ করল। চাদরটির ক্রয়মূল্য নির্ণয় করো।
2. একজন লোক 42টি লেবু বিক্রয় করে 8টি লেবুর বিক্রয়মূল্য ক্ষতি করল। শতকরা ক্ষতি নির্ণয় করো।
3. একজন দোকানী 5টি লেবুর কেনা দামে 4টি লেবু বিক্রয় করল। শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হবে নির্ণয় করো।
4. চার টাকায় 5টি কমলা কিনে 5 টাকায় 4টি কমলা বিক্রয় করে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হবে নির্ণয় করো।
5. কুড়িটা আম 30 টাকায় কিনে ডজন 24 টাকায় বিক্রয় করলে শতকরা কত লাভ হবে?
6. একজন সবজি দোকানী দুই প্রকার শসা কুইন্টাল প্রতি 500 টাকা ও 400 টাকায় কিনে উভয়কে সম পরিমাণে মিশিয়ে কিগ্রা প্রতি কততে বিক্রয় করলে তার 25% লাভ হবে।
7. একজন ব্যবসায়ী 1000 ডিম কিনল। সেখান থেকে 90টি ডিম পচে গেল। অবশিষ্ট ডিমকে প্রতি ডজন টা. 9.60 পয়সাতে বিক্রয় করে 12% ক্ষতি করল। ব্যবসায়ী কত টাকা দিয়ে ডিমগুলি কিনেছিল নির্ণয় করো।

8. সমান বিক্রয়মূল্যে দুটি শাড়ির বিক্রিতে একটি 25% লাভ ও অন্যটির 25% ক্ষতি হল। দোকানদারের এখানে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হল?

9. একজন ব্যবসায়ী দুটি রেডিও সেটকে 1000 টাকায় কিনে একটিকে 20% ক্ষতিতে ও অন্যটিকে 20% লাভে বিক্রয় করল। যদি রেডিও সেটদ্বয়ের বিক্রয়মূল্য সমান হয়, তবে প্রত্যেকের ক্রয়মূল্য নির্ণয় করো।

10. একজন দোকানী একটি শার্টকে 20% লাভে বিক্রয় করল। যদি সে শার্টটিকে 10% ক্রমে কিনে 75 টাকা বেশি মূল্যে বিক্রয় করে থাকে তবে তার 50% লাভ হয়ে থাকত। তবে শার্টটির ক্রয়মূল্য নির্ণয় করো।

11. পূজার সময়ে রাজ্য সরকার 20% ও কেন্দ্রীয় সরকার 5% রিহাতিতে সমিতির কাপড় বিক্রয় করে থাকে। একটি কাপড়ের লিখিত মূল্য 540 টাকা হলে তার বিক্রয়মূল্য কত হবে নির্ণয় করো।

12. পূজায় কাপড় বিক্রয় প্রথমে 20% ও পরবর্তী মূল্যে 10% রিহাতি দেওয়া হয়। আমি একটি শাড়ি 360 টাকায় কিনলাম। এর লিখিত মূল্য কত ছিল নির্ণয় করো।

13. সমান মূল্যের দুটি কাপড়ে দুজন দোকানী যথাক্রমে (i) 20% ও 10% (ii) 15% ও 15% রিহাতি দেয়। কোন ক্ষেত্রে কাপড় ক্রয় করা লাভজনক?

14. একজন ব্যবসায়ী একটি ঘড়ির লিখিত মূল্যের উপরে শকতরা 10% রিহাতি দেয়। ঘড়িটির ক্রয়মূল্য 300 টাকা হলে 20% লাভ পাওয়ার জন্য লিখিত মূল্য কত হবে নির্ণয় করো।

15. একটি টেবিলের লিখিত মূল্য 800 টাকা। একজন খুচরো ব্যবসায়ী 10% রিহাতিতে ক্রয় করল। যদি ব্যবসায়ী পরিবহন বাবদ খরচ 10 টাকা হয় তবে টেবিলটিকে খুচরো ব্যবসায়ীটি কত টাকায় বিক্রি করলে তার 12% লাভ হবে?

16. একজন লোক 40% লাভ রেখে জিনিস বিক্রয় করছিল। সে 10% ক্রয়মূল্যে কিনে বর্তমান মূল্যকে 10% রিহাতি দিলে তার কত শতকরা লাভ হবে?

17. একটি জিনিসের ক্রয়মূল্য 500 টাকা। দোকানীটি জিনিসের একটি মূল্য লিখে লিখিত মূল্যের উপরে 25% রিহাতি দিয়ে বিক্রয় করল। জিনিসটির 10% লাভ করেন। তবে জিনিসের লিখিত মূল্য নির্ণয় করো।

8.3 সরল সুদকষা (Simple Interest) :

পোস্ট অফিস বা ব্যাঙ্কে টাকা সঞ্চয় করলে নির্দিষ্ট সময় পরে আমাদের জমা রাখা টাকা থেকে বেশি টাকা পাওয়া যায়। সেরকম আমাদের আবশ্যক সময়ে আমরা ব্যাঙ্ক বা স্থানীয় মহাজন থেকে ঋণ করে থাকি। ব্যাঙ্ক বা মহাজনের টাকাকে আমরা কাজে লাগিয়ে থাকায় আমরা নির্দিষ্ট সময়ে ঋণ টাকা সহিত আরও বেশি টাকা দিয়ে ঋণ মুক্ত হই। জমা রাখা থেকে ক্ষেত্রে ব্যাঙ্ক থেকে পেয়ে থাকা বেশি টাকা অথবা ব্যাঙ্ক থেকে ঋণ এনে থাকা ক্ষেত্রে ব্যাঙ্ককে দিয়ে থাকা বেশি টাকাকে সুদ বলে।

কর্জর পরিমাণকে কোনো সময়ের জন্য গচ্ছিত টাকার পরিমাণকে মূলধন বলে। মূলধন ও সুদ টাকার সমষ্টিকে সমূল সুদ **(Amount)** বলে।

সমূল সুদ= মূলধন + সুদ

প্রতি 100 টাকার জন্য বার্ষিক যত সুদ দেওয়া যায় তাকে সুদের হার বলে। নির্ধারিত সুদ হারে কেবল মূলধন উপরে সুদ হিসাব করা গেলে তাকে সরল সুদ বলে।

পূর্ব শ্রেণীতে আমরা ঐকিক ধারাতে সুদ হিসাব জানি। এখন সূত্র প্রয়োগ করে সুদ হিসাব করা শিখব।

মনে করো মূলধন =p টাকা সুদের হার =r% সময় =7 বর্ষ 100 টাকার 1 বর্ষ সুদ =r টাকা

1 টাকার 1 বর্ষর সুদ= $\frac{r}{100}$ টাকা।

p টাকা 1 বর্ষ সুদ $=\frac{pr}{100}$ টাকা। p টাকার t বর্ষ সুদ $=\frac{PTR}{100}$ টাকা।

সরল সুদ (1) $=\frac{PTR}{100}$ ....(1) সূত্র

সুদের পরিমাণ সর্বদা মূলধন সময় ও সুদ হার উপরে নির্ভর করে।

8.3.1 সরল সুদ নির্ণয়:

উদাহরণ-1: বার্ষিক 4.5% হারে 1200 টাকা 5 বছরের সরল সুদ নির্ণয় করো।

সমাধান : এখানে মূলধন=p=1200 টাকা, সময় t=5 বর্ষ সুদ হার= r%=4.5%

সরল সুদ $=\frac{PTR}{100}=\frac{1200\times4.5\times5}{100}=12\times45\times5=270$ টাকা

$\therefore$ 1200 টাকা বার্ষিক 4.5% হারে 5 বর্ষে সরল সুদ = 270 টাকা। (উত্তর)

উদাহরণ-2 : বার্ষিক 6% হারে 2500 টাকার 2 বর্ষ 6 মাসের সমূল সুদ নির্ণয় করো।

সমাধান : মূলধন (p)=2500 টাকা, সুদ হার=R%=6%

সময় T= $2\frac{6}{12}$ বর্ষ $2\frac{1}{2}$ বর্ষ $\frac{5}{2}$ বর্ষ

সরল সুদ (i) $=\frac{PTR}{100}=\frac{2500\times6\times5}{2\times100}$ টাকা 25×3×5=375 টাকা

সমূল সুদ = মূলধন + সরল সুদ (2500+375)=2875 টাকা

$\therefore$ 2500 টাকা 6% হারে 2 বর্ষ 6 মাসের সমূল সুদ =2875 টাকা (উত্তর)

মনে রাখো : A (সমূল সুদ) = p (মূলধন) + I (সুদ)

$$A = P + \frac{PTR}{100} = P\left(1 + \frac{TR}{100}\right) \text{ বা সমূল সুদ } (A) = P\left(1 + \frac{TR}{100}\right) \quad \text{..... (ii) সূত্র}$$

সূচনা: সুদ হারে সময়ের সূচনা না থাকলে বার্ষিক সুদ হার বলে ধরা যায়।

সুদ হার 5% অর্থ শতকরা বার্ষিক সরল সুদহার 5 টাকা।

উদাহরণ-3 : বার্ষিক 10% হারে 4500 টাকার 73 দিনের সুদ ও সমূল সুদ নির্ণয় করো।

সমাধান : মূলধন (p)=4500 টাকা।

সুদহার=R%=10% হলে সময়=7=73 দিন $\frac{73}{365}$ বর্ষ $\frac{1}{5}$ বর্ষ

সরল সুদ (i) $= \frac{PTR}{100} = \frac{4500 \times 10 \times 1}{5 \times 100}$ টাকা =9×10=90 টাকা

সমূল সুদ = মূলধন + সুদ = 4500 টাকা+90 টাকা=4590 টাকা (উত্তর)

উদাহরণ-4 : টাকা প্রতি মাসিক 2 পয়সা হারে 500 টাকার $1\frac{1}{2}$ বর্ষের সুদ নির্ণয় করো।

সমাধান: 1 টাকার মাসিক সুদ =2 পয়সা

100 টাকায় মাসিক সুদ=2 টাকা, 100 টাকার 1 বর্ষের সুদ = 2×12 = 24 টাকা

এখানে মূলধন (p)=500 টাকা, সুদের হার = R%=24%

সময় T $=1\frac{1}{2}$ বর্ষ $\frac{3}{2}$ বর্ষ

সরল সুদ (i) $= \frac{PTR}{100} = \frac{500 \times 24 \times \frac{3}{2}}{100}$ টাকা 5×12×3 টাকা =180 টাকা

500 টাকার $1\frac{1}{2}$ বর্ষের সুদ = 180 টাকা (উত্তর)

উদাহরণ-5 : 6% হারে কোনো মূলধনের 12 বর্ষের সরল সুদ 648 টাকা হবে?

সমাধান: সুদের হার (R%) = 6% সময় T = 12 বর্ষ।

সরল সুদ (i)=648 টাকা। আমাকে মূলধন (p) নির্ণয় করতে হবে।

আমরা জানি (i)= $\frac{PTR}{100} = p = \frac{100 \times 1}{RT} = \frac{100 \times 648}{6 \times 12} = 900$ টাকা

900 টাকা 6% হারে 12 বর্ষের সুদ=648 টাকা (উত্তর)

উদাহরণ-6 : 12.5% হারে কোনো মূলধনের সমূল সুদ কত বছরে দুই গুণ হবে?

সমাধান: মনে করো মূলধন (p)=100 টাকা

প্রশ্নানুসারে সমূল সুদ =200 টাকা, সময় =T বর্ষ

শতকরা সুদের হার =R%=12.5%

সুদ (i)= সমূল সুদ - মূলধন =200 টাকা -100 টাকা=100 টাকা

$I=\frac{PTR}{100}=T=\frac{100\times 1}{PR}=\frac{100\times 100}{100\times 12.5}=8$ বর্ষ

∴ 12.5% হারে কোনো মূলধনের সমূল সুদ 8 বর্ষের দুই গুণ হবে। (উত্তর)

অনুশীলনী-8(b)

1 (i) টাকা প্রতি মাসে 3 পয়সা সুদ হারে শতকরা বার্ষিক সুদ হার কত?

(ii) শতকরা বার্ষিক সুদ হার 8 টাকা হলে 1 টাকার বার্ষিক সুদ কত?

(iii) বার্ষিক সুদ মূলধনের $\frac{1}{8}$ অংশ হলে শতকরা বার্ষিক সুদহার কত?

(iv) 1 টাকার 1 বর্ষের সুদ $\frac{1}{16}$ টাকা হলে শতকরা বার্ষিক সুদহার কত?

2. সদানন্দ পোস্ট অফিসে 8% বার্ষিক সুদে 6 বছরের জন্য 8000 টাকা সঞ্চয় করল। সে 6 বছর পরে মোট পোস্ট অফিস থেকে কত টাকা পাবে?

3. 7.5% হারে 6000 টাকার 6 বছরে সমূল সুদ নির্ণয় করো।

4. হরিহর 10% হারে ব্যাঙ্ক থেকে 10,000 টাকা বাকি করে 13% হারে দুইজন লোককে বাকি দিল। 5 বছর শেষে তার এখানে ব্যাঙ্ক ঋণ পরিশোধ করে কত লাভ পাবে?

5. রসানন্দ ব্যাঙ্ক থেকে 10.5% হারে 12000 টাকা ধার করে টাকা প্রতি মাসিক 2 পয়সা সুদে ধার দিল। এর দ্বারা বছর শেষে সে কত টাকা রোজকার করবে?

6. টাকা প্রতি মাসিক 3 পয়সা হারে P টাকার T বছরে সমূল সুদ কত হবে নির্ণয় করো।

7. শরৎ ব্যাঙ্ক থেকে 12% হারে 3000 টাকা ধার করে ব্যাঙ্ক থেকে 6000 টাকা দিয়ে ঋণমুক্ত হল। সে কত বছরের জন্য টাকা ধার করেছিল?

8. 6% হারে কোনো মূলধনে $7\frac{1}{2}$ বছরে সরল সুদ 4500 টাকা হবে?

9. কোনো মূলধন 20 বছরে সুদ ও মূল মিশে মূলধনের 3 গুণ হয়ে যায়। সুদ হার নির্ণয় করো।

10. কোনো মূলধনের 2 বছরে সরল সুদ। সমূল সুদের $\frac{1}{9}$ অংশ। সুদহার নির্ণয় করো।

11. কোনো মূলধনের একটি নির্দিষ্ট হারে 10 বছরে ও 6 বছরের সমূল সুদ যথাক্রমে 3000 টাকা ও 2600 টাকা। মূলধন ও সুদহার নির্ণয় করো।

12. কোনো মূলধন একটি নির্দিষ্ট হারে 15 বছরে 3 গুণ হয়ে যায়। তবে উক্ত মূলধন কত বছরে 4 গুণ হয়ে যাবে?

13. কোনো মূলধন 8 বছর 4 মাসে দুই গুণ হয়ে যায়। এটি কত বছরে 3 গুণ হবে?

14. কোনো মূলধনের সরল সুদ, মূলধনের $\frac{16}{25}$। যদি সুদের হার ও সময়ের সংখ্যক মান সমান হয় তবে সুদের হার নির্ণয় করো।

15. কোনো মূলধন 8% হারে 2 বছরে 12,122 টাকা হয় তবে সেই মূলধন 9% হারে 2 বছর 8 মাসে সমূল সুদ কত হবে?

16. করিম একটি ব্যাঙ্কে 9000 টাকা জমা দিল। 2 বছর পরে সে 4000 টাকা উঠাল। 5 বছর শেষে সে ব্যাঙ্ক থেকে 7640 টাকা পেল। সুদের হার নির্ণয় করো।

8.4 চক্রবৃদ্ধি সুদ (Compound Interest) :

ব্যাঙ্কগুলি সময়ে সময়ে স্থায়ী জমার উপরে বিজ্ঞাপন দিতে তোমরা জানো। বার্ষিক জন্য স্থায়ীর জমার উপরে সুদের হার 7% ও সঞ্চয় ব্যাঙ্ক উপরে সুদের হার 3.5%

সাধারণত আমরা স্থায়ী জমার উপর পেয়ে থাকা সুদ, সরল সুদ না। পূর্ব বছরে মূলত সুদ মিসে পরের বছরের জন্য মূলে পরিণত হয়। সঞ্চয় ব্যাঙ্ক জমার উপরে প্রতি 6 মাসে সুদ হিসাবে করা মূলধনের সহিত মিশে যায়। মাত্র স্থায়ী জমার উপরে 3 মাসের সুদ হিসাব করা গিয়ে মূলের সাথে মিশে যায়। সময় সময় মধ্যে এর অবধি 4 মাস কিংবা 6 মাস হয়ে যায়। **একটি নির্দিষ্ট সময়ে মূলধনের সাথে সুদকে মিশিয়ে পরবর্তী মূলধনে পরিণত করা এবং উক্ত মূলধন উপরে সুদ হিসাব করার পদ্ধতিকে চক্রবৃদ্ধি সুদ (Compound Interest) হিসাব বলে।**

উদাহরণ-1 : মধুসূদন একটি ব্যাঙ্ক থেকে রবি ফসল চাষের জন্য 10% হারে 1500 টাকা ধার করল। যদি প্রতি বছর শেষে সুদ হিসেবে ব্যবস্থা থাকে, তবে বিভিন্ন বর্ষ শেষে তার দেয় কত হবে? সে 2 বছর পরে ঋণ পরিশোধ করলে ব্যাঙ্ক কত টাকা দেবে?

সমাধান: প্রথম বছরে মূলধন (P_1) = 1500 টাকা এবং সুদের হার = R% = 10%

প্রথম বছরে সুদ (I_1) $=\frac{P_1RT}{100}=\frac{1500\times10\times1}{100}$ =150 টাকা

দ্বিতীয় বছরে মূলধন $=P_2=P_1+I_1=(1500+150)$ টাকা =1650 টাকা

দ্বতীয় বছরে সুদ $(I_2) = \frac{P_2RT}{100} = \frac{1650 \times 10 \times 1}{100}$ টাকা =165 টাকা

দ্বিতীয় বছরের শেষে ব্যাঙ্ককে পরিশোধ করা অর্থের পরিমাণ =(1650+165) টাকা =1815 টাকা। এখানে সমূল চক্রবৃদ্ধি সুদ =1815 টাকা

2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = সমূল চক্রবৃদ্ধি সুদ - মূলধন =(1815 - 1500 টাকা 315 টাকা

প্রদত্ত প্রশ্ন সমাধানের প্রথম বছরে সুদ + দ্বিতীয় বছরে সুদ =150+165=315 টাকা

এখানে লক্ষ করো নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি সুদ, প্রত্যেক বছরে শেষে নির্ণীত সুদদের সমষ্টির সাথে সমান বা নির্ণয় চক্রবৃদ্ধি সুদ 315 টাকার সাথে সমান।

বর্তমান আমরা উপরোক্ত ক্ষেত্রে 2 বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ এবং সরল সুদ মধ্যে থাকা পার্থক্যকে উপলব্ধি করব। মূলধন =1500 টাকা, সুদের হার =10% সময় = 2 বছর

2 বছরের সরল সুদ $= \frac{1500 \times 10 \times 2}{100}$ = 300 টাকা

উভয় সুদের পার্থক্য =315 - 300 = 15 টাকা

সূচনা- সরল সুদের ক্ষেত্রে মূলধন প্রত্যেক বছরের জন্য সমান থাকার সময় চক্রবৃদ্ধি সুদ ক্ষেত্রে প্রতি বছর এটির পরিবর্তন হয়। কারণ সুদ মূলে মিশে পরবর্তী সময়ে মূলধনে পরিণত হয়।

নিজে করো: (1) মূলধন 100 টাকা ও বার্ষিক সুদের হার 10%-এ 3 বছরের সরল সুদ এবং চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করো:

(2) 10000 টাকা মূলধন ও বার্ষিক সুদের হার 10%-এ 3 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করো।

8.4.1 চক্রবৃদ্ধি সুদ হিসাবের সূত্র নির্ণয় :

মনে করো মূলধন =P টাকা বার্ষিক সুদের হার =R%

প্রথম বছরের সুদ $(I_1) = \frac{PR \times 1}{100} = \frac{PR}{100}$ টাকা

প্রথম বছরের সমূল সুদ (A_1)= দ্বিতীয় বছরের মূলধন = প্রথম বছরের মূলধন + প্রথম বছরের সুদ

$$= P + \frac{PR}{100} = p\left(1 + \frac{R}{100}\right)$$

দ্বিতীয় বছরের সুদ $(I_2) = P\left(1 + \frac{R}{100}\right) \times \frac{R}{100}$ টাকা

তৃতীয় বছরের মূলধন (A_2) $= P\left(1+\frac{R}{100}\right)+P\left(1+\frac{R}{100}\right)\times\frac{R}{100}$ টাকা

$= P\left(1+\frac{R}{100}\right)\left(1+\frac{R}{100}\right)$ টাকা $= P\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$ টাকা

তৃতীয় বছরের সুদ $I_3 = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^2\times\frac{R}{100}$ এবং তৃতীয় বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি $A_3 = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^3$ হবে।

সেরকম প্রমাণ করা যেতে পারে যে n, বছর শেষে

সমূল সুদ =A $= P\left(1+\frac{P}{100}\right)^3$
যেখানে মূলধন =P....(1) সুদের হার =R% সময় n= বছর।

মনে রাখো: চক্রবৃদ্ধি সুদ (C.I.) = সমূল চক্রবৃদ্ধি সুদ (A) - মূলধন (p)

বিশেষ সূচনা: যেখানে সুদ হিসাবে সময়ে দেওয়া থাকে না সেখানে সুদ হিসাব সময় একটি বছর বোলে নেওয়া যায়। সুদ হিসাব সময়কে সুদ দেয় সময় সুদ বলা যায়।

উদাহরণ-2 : 1000 টাকা 10% হারে 3 বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করো।

সমাধান :- মূলধন (p)=1000 টাকা, সুদের হার R%=10% সময় (n)=3 বছর।

সমূল চক্রবৃদ্ধি সুদ (A)=p $\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$ ......(1)

$$=1000\left(1+\frac{10}{100}\right)^3=1000\left(\frac{11}{10}\right)^3=\frac{1000\times1331}{1000}=1331 \text{ টাকা}$$

চক্রবৃদ্ধি সুদ =A-P=1331+1000=331 টাকা

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি সুদের পরিমাণ 331.00 টাকা

উদাহরণ-3: শতকরা 5 হারে 800 টাকা 3 বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করো।

সমাধান: মূলধন (P)=800 টাকা, সুদের হার =R%=5% এবং সময় =n=3 বছর।

সমূল চক্রবৃদ্ধি সুদ (A)=P $\left(1+\frac{R}{100}\right)^n=800\left(1+\frac{5}{100}\right)^3=800\left(\frac{21}{20}\right)^3$

$\frac{800\times9261}{8000}$ = টা. 926.10 প.

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি সুদ = সমূল চক্রবৃদ্ধি – মূলধন = (926.10–800) টাকা

= 126.10 টাকা

উদাহরণ-4 : শতকরা 12% হারে কত বছরের জন্য 5400 টাকা ব্যাঙ্কে রাখলে সমূল চক্রবৃদ্ধি টা. 6773.76 প. হবে।

সমাধান: এখানে মূলধন =P=5400 টাকা

সমূল চক্রবৃদ্ধি (A)=6773.76 টাকা সুদের হার (R%)=12% সময় =(n) স্থির করতে হবে।

আমরা জানি A=P $\left(1+\frac{R}{100}\right)^n \rightarrow 6773.76 = 5400\left(1+\frac{12}{100}\right)^n$

$\rightarrow \frac{6773.76}{5400} = \left(1+\frac{3}{25}\right)^n \rightarrow \frac{677376}{540000} = \left(\frac{28}{25}\right)^n \rightarrow \frac{784}{625}\left(\frac{28}{25}\right)^n$

$\left(\frac{28}{25}\right)^n = \left(\frac{28}{25}\right)^2 \rightarrow n = 2$ বছর।

$\therefore$ ব্যাঙ্কে 5400 টাকা 2 বছর জন্য জমা রাখলে 2 বছরে শেষে টাকা 6773.76 পাব। (উত্তর)

উদাহরণ-5 : একটি গ্রামের লোকসংখ্যা 8000। প্রতিবছর লোকসংখ্যা 10% হারে বৃদ্ধি পেলে 3 বর্ষ পরে সেই গ্রামের লোকসংখ্যা কত হবে?

সমাধান-: এখানে প্রারম্ভিক লোকসংখ্যা (P)=8000

বার্ষিক বৃদ্ধির হার R%=10% সময় (n)=3 বছর।

তিন বছর পরে গ্রামের লোকসংখ্যা (A)=P $\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

A=8000 $\left(1+\frac{10}{100}\right)^3 = 8000\left(\frac{11}{10}\right)^3 = \frac{8000\times1331}{1000} = 10.648$

$\therefore$ 3 বছর পরে উক্ত গ্রামের লোকসংখ্যা 10,648 হবে। (উত্তর)

8.4.2 সুদ দেয় সময় ছয় মাসিক অথবা ত্রৈমাসিক অবধি নিমিত্ত চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয়।

এসো দেখব, বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি ও অর্ধ বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি কি প্রকার পার্থক্য আছে? বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদ ক্ষেত্রে আমাকে বছর পরে সুদকে মূল সাথে মিশাতে হবে অর্ধবার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদ ক্ষেত্রে প্রতি ছয়মাস পরে সুদকে মূলধনের সাথে মিশে যাবে নতুন মূলধন নির্ণয় করা যায়।

অর্থাৎ যখন সুদের দেয় সময় 6 মাস হবে, তোমাকে একবছরে দুবার সুদ হিসাব করতে হবে। এক্ষেত্রে সুদের হার অর্ধেক হওয়ার সময় দ্বিগুণ হবে। সেরকম সুদ দেয় সময় 3 মাস হলে সুদের হার এক চতুর্থাংশ এবং সময় চারগুণ হবে।

উদাহরণ-6 : সুদের দেয় 6 মাস হলে 2048 টাকা $12\frac{1}{2}\%$ হারে $1\frac{1}{2}\%$ বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করো।

সমাধান-: এখানে বার্ষিক সুদের হার $12\frac{1}{2}\%$ হলে, 6 মাসের সুদের হার $6\frac{1}{4}\%$ হবে।

$1\frac{1}{2}\%$ বছর =18 মাস =3টি 6 মাসের দেয়।

মূলধন (p)=2048 টাকা, সুদের হার $6\frac{1}{4}\%$ সময় (n)=3

সমূল চক্রবৃদ্ধি সুদ (A)=P $\left(1+\frac{R}{100}\right)^n = 2048\left(1+\frac{25}{400}\right)^3$

$= 2048\left(\frac{17}{16}\right)^3 = 2048\times\frac{4913}{4096} =$ টাকা 2456.50 পয়সা

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি সুদ: A–P=2456.50 - 2048.00=408.50 টাকা। (উত্তর)

উদাহরণ-7: সুদের দেয় 3 মাস হলে 240000 টাকার 10% হারে 9 মাসের চক্রবৃদ্ধি সমূল নির্ণয় করো।

সমাধান: মূলধন (p)=240000 টাকা, সময় 9 মাস =3 মাস অর্থাৎ n=3

3 মাসের সুদের হার $\left(\frac{10}{4}\right)\% = 2\frac{1}{2}\%$ (এখানে বার্ষিক সুদের হার এক চতুর্থাংশ হবে)

সমূল চক্রবৃদ্ধি (A) $= P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n = 240000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$

$$= 240000\times\left(1+\frac{1}{40}\right)^3 = 240000\times\left(\frac{41}{40}\right)^3$$

$$= 240000\times\frac{41}{40}\times\frac{41}{40}\times\frac{41}{40} = \frac{1033815}{4} = 258453.75$$ টাকা। (উত্তর)

8.4.3 মূল্যের চক্রহ্রাস হিসাব :

কতকগুলি বস্তু যথা- মোটরগাড়ি, স্কুটার, ঘর আদি ব্যবহৃত হয় ততটা পুরানো হয় তার দাম ততটা কমে যায়। অনেক ক্ষেত্রে এর মূল্য হ্রাস একটি নির্দিষ্ট হারে হয়। প্রত্যেক অবধির মূল্য হ্রাস পরে হ্রাস প্রাপ্ত মূল্য উপরে পরবর্তী হ্রাস ঘটে। এই মূল্য হ্রাসকে চক্রহ্রাস বলে।

এই হিসাব জন্য সূত্রটি হল।

হ্রাসপ্রাপ্ত মূল্য (A)=p $\left(1-\frac{R}{100}\right)^n$ [P= সামগ্রীর প্রারম্ভিক মূল্য। R%= হ্রাসের হ্রাস, সময় =n]

উদাহরণ-8

একটি গাড়ির মূল্য 16,000 টাকা। গাড়িটি ব্যবহার হয়ে থাকলে এর মূল্য প্রতি বছর 5% হারে হ্রাস প্রাপ্ত হয়। 3 বছর পরে এর দাম কত হবে, নির্ণয় করো।

সমাধান: প্রারম্ভিক মূল্য (P)=16,000,00 টাকা।

হার (R)%=5% সময় n=3 বছর।

তিন বছর পরে এর দাম (A)=p $\left(1-\frac{R}{100}\right)^n = 16,000\left(1-\frac{5}{100}\right)^3$

$= 16,000\times\left(\frac{19}{20}\right)^3 = \frac{16000\times 6859}{8000} = 13718.00$ টাকা

তিন বছর পরে গাড়ির হ্রাসপ্রাপ্ত মূল্য 13718.00 টাকা হবে।

অনুশীলনী-8 (c)

1. 800 টাকার 8% হারে দুই বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করো।
2. 1500 টাকার 7% হারে দুই বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় করো।
3. 5000 টাকার 10% হারে 3 বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করো।
4. 8000 টাকার 5% হারে 3 বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করো।
5. একজন ব্যক্তি একটি ধান বোনা যন্ত্রের জন্য 10% সুদ হারে ব্যাঙ্ক থেকে 5000 টাকা ঋণ করলেন। 3 বছর পর সে কত টাকা দিয়ে ব্যাঙ্ক থেকে ঋণ মুক্ত হবে?
6. কমল একটি স্কুটার কেনার জন্য ব্যাঙ্ক থেকে 26,400 টাকা 15% বার্ষিক চক্রবৃদ্ধিতে ঋণ নিল। সে 2 বছর 4 মাস পরে কত টাকা ব্যাঙ্ককে দিয়ে ঋণ মুক্ত হবে?

   (সূচনা: A=2 বর্ষর সমূল চক্রবৃদ্ধি সুদ +A-র $\frac{4}{12}$ বছরের সরল সুদ)
7. বার্ষিক 4% হারে 6250.00 টাকা কত বছরের জন্য ব্যাঙ্কে জমা দিলে 510 টাকা সুদ মিলবে?
8. কোনো মূলধনের 5% হারে 3 বছর সরল সুদ 540 টাকা। সেই মূলধনের সমান সুদ হারে ও সমান সময়ে চক্রবৃদ্ধি সুদ কত হবে?
9. কোনো মূলধনের 10% হারে 3 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদ পার্থক্য টা. 93.00। মূলধন নির্ণয় করো।
10. সুদ 6 মাস অন্তরে দেয় বার্ষিক 12.5% হারে 2500 টাকার $1\frac{1}{2}$ বছর সমূল চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করো।

11. সুদ 6 মাস অন্তরে দেয় বার্ষিক 14% হারে 5000 টাকার $1\frac{1}{2}$ বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করো।

12. সুদ 4 মাস অন্তরে দেয় শর্তে একজন ব্যক্তি বার্ষিক 10% হারে 1 বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করো।

13. একটি ঘরের মূল্য 2,00,000 টাকা। প্রত্যেক বছর এর 6% হারে হ্রাস পায়। তবে 3 বছর পরে এর হ্রাস প্রাপ্ত মূল্য কত হবে?

14. একটি গ্রামের লোকসংখ্যা 20,000। প্রতিবছর এর লোকসংখ্যা 7% বৃদ্ধি পেলে দুই বছর পরে লোক সংখ্যা কত হবে?

15. একটি মোটর সাইকেলের মূল্য টা. 42.000। প্রত্যেক বছর পরে এর মূল্য 8% হারে হ্রাস পায়। তবে 2 বছর পরে মোটর সাইকেল মূল্য কত হবে নির্ণয় করো।

8.5 জীবনধারণের মূলসূচী (Cost of living index) :

জিনিসপত্রের দরদামের সাথে আমরা সবাই পরিচিত। বিভিন্ন কারণে দিনে দিনে জিনিসপত্রের দামের বৃদ্ধি ঘটছে। ফলে প্রত্যেক নাগরিক উপরে জীবন ধারণ ব্যয়ভার বেড়ে চলেছে। তাই এক সময় থেকে পরবর্তী সময়কে বিভিন্ন ব্যবহার্য জিনিসের দর বৃদ্ধি বিচারকে নিয়ে জীবন ধারণের ব্যয়ভার কত বৃদ্ধি হল তা নির্ণয় করার আবশ্যকতা আছে। এই ব্যয়ভার বৃদ্ধিকে আমরা একটি সূচকাঙ্ক দ্বারা প্রকাশ করে থাকি।

8.5.1 সূচকাঙ্ক (Index Number) :

সূচকাঙ্ক মাধ্যমে সাধারণত এক নির্ধারিত সময়ে মধ্যে নিত্য ব্যবহার্য সামগ্রী তথা কৃষিজাত পদার্থ, শিল্পজাত দ্রব্য ইত্যাদির দরদাম বা বৃদ্ধি দেওয়া যায়।

সুচকাঙ্ক মুখ্যতর তিন প্রকার:

(i) মূল্য সূচকাঙ্ক (Price index number) :

(ii) পরিমাণমূক সূচকাঙ্ক (Quantity index number) :

(iii) জীবন ধারণের মূল সূচকাঙ্ক (Cost of living index number) :

এই অধ্যায়ে আমরা কেবল জীবন ধারণ মূল্য সূচকাঙ্ক সম্বন্ধে আলোচনা করব।

8.5.2 জীবনধারণ মূল্য সূচকাঙ্ক (Cost of living index number) :

একটি নির্দিষ্ট বর্গর লোকদের জন্য বিভিন্ন সময় তথা ভিন্ন ভিন্ন স্থানে মূল্যস্তরে পরিবর্তন (Change in price level) পরিপ্রকাশ নিমিত্ত যে সংখ্যক মান (Numerical Value) ব্যবহৃত হয়, তাকে জীবনধারণ মূল্য সূচকাঙ্ক বলা যায়।

একটি সাধারণ মধ্যবিত্ত পরিবার কতকগুলি নিত্য ব্যবহার্য জিনিসের জন্য মাসিক খরচের তুলনার জন্য 1994 এবং 2006 দুটি বছরকে স্থির করা যাক। এখানে 1994 -এ হয়ে থাকা সমুদায় মাসিক খরচ সাথে 2006-এর সেই সেই জিনিস বাবদ সমুদায় মাসিক খরচের সাথে তুলনা করব।

আমরা যে সময়ে দরদাম বা খরচের সাথে উপরিস্থ দামকে তুলনা করব, সেই সময়কে **মূল বর্ষ (Base year)** বলা যায়। এবং এখানে 2006-কে চলতি বর্ষ **(Current year)** বলা যাবে।

মনে করো মূল বর্ষে সমুদায় খরচের পরিমাণ 100.00 টাকা এবং চলতি বছরে সেই সেই সামগ্রীর সমুদায় খরচের পরিমাণ 146.00 টাকা।

এখানে মূলবর্ষ 1994 তুলনাতে চলতি বর্ষ 2006-এর জীবনধারণ মূল্য সূচকাঙ্ক 146। এখানে 1994 ও 2006 বছরে থাকা পরিবর্তিত মূল্যস্তর **(Change price level)** কে 146 সংখ্যা মাধ্যমে স্থির করা হল।

অন্য প্রকারে প্রকাশ করতে গেলে 1994 মূলবর্ষের প্রতি 100 টাকা খরচ করে থাকা একটি সাধারণ মধ্যবিত্ত পরিবারকে 2006 চলতি বর্ষে 146 টাকা খরচ করতে পারবে।

তাই 1994-কে মূলবর্ষ রূপে নিয়ে 2006 বছরে জীবনধারণের মূল্য সূচকাঙ্ক

$$= \frac{\text{২০০৬ বছরে সমুদায় খরচের পরিমাণ}}{\text{১৯৯৪ বছরে সমুদায় খরচের পরিমাণ}} \times 100$$

$$\boxed{\text{অর্থাৎ জীবনধারণ মূল্য সূচকাঙ্ক} = \frac{\text{চলিত বছরে সমুদায় খরচের পরিমাণ}}{\text{মূলবর্ষের সমুদায় খরচের পরিমাণ}} \times 100}$$

8.5.3 জীবনধারণের মূল্য সূচকাঙ্ক স্থির করার পদ্ধতি (Method for cost of living index) :

প্রথমে একটি সময় স্থির করব (মূলবর্ষ) যে সময়ের দরদামের সঙ্গে চলিত বর্ষের দরদামকে তুলনা করাযাবে

দ্বিতীয়তে প্রত্যেক ব্যবহার্য্য জিনিষের মূল বর্ষতে দাম ও বর্তমানের দাম সংগ্রহ করা হবে।

তৃতীয়তে জীবনধারণের জন্য কোন জিনিষকে কত পরিমাণে ব্যবহার করা হয়েছে তা স্থির করা হবে।

মনেকর এক নির্দিষ্ট বস্তুর জন্য P_0: মূলবছরে জিনিষের দাম

P_1: জিনিষের চলিত বছরে দাম

W: জিনিষের পরিমাণ হয়

$$\text{তবে জীবনধারণের মূল্য সুচকাঙ্ক} = \frac{\sum \mathrm{WP}\mathbf{1}}{\sum \mathrm{WP}\mathbf{0}} \times \mathbf{100}$$

যেখানে $\sum \mathrm{WP}\mathbf{1} =$ চলিত বছরে সব খরচের পরিমাণের সমষ্টি

$\sum \mathrm{WP}\mathbf{0} =$ মূলবছরে সব খরচের পরিমাণের সমষ্টি

8.5.4 জীবনধারণের মূল্য সূচকাঙ্ক ব্যবহার (use of cost of living Index Number) :

(1) মূল্য সূচকাঙ্ক বিভিন্ন সামগ্রীগুলির খুচরো দরে পরিবর্তনে সূচনা দেবার সাথে মূলবর্ষ তুলনায় সামগ্রীগুলি সহসা পরিমাণ বাড়ছে কিংবা কমছে তাও জানাতে সাহায্য করে।

(2) সরকারকে দৈনিক মজুরি (wage) বস্তুর নির্ধারিত মূল্য (price) বস্তুর উপরে কর (tax) ইত্যাদি স্থির করতে সাহায্য করে।

(3) সরকারী কর্মচারীর জন্য মহঙ্গা ভাতা (Dearness Allowance) এবং বার্ষিক বোনাস (Bonus) প্রভৃতি স্থির করতে সাহায্য করে।

উদাহরণ-1 : একটি সাধারণ পরিবারে কয়েকটি ব্যবহার্য বস্তুর নির্দিষ্ট পরিমাণ উপরে 2007 সালে সমুদায় খরচের পরিমাণ ছিল 8200 টাকা। যদি 2007-কে মূলবর্ষ নিয়ে 2009-এ জীবনধারণ মূলসূচীর নির্দেশিকা সংখ্যা 140.50 হয়ে ছাকে, তবে 2009 সালে সেই পরিমাণের ব্যবহার্য বস্তু উপরে খরচের পরিমাণ কত ছিল স্থির করো।

সমাধান : জীবনধারণ মূল্য সূচকাঙ্ক

$$=\frac{\textbf{2009}\text{ এ সমুদায় খরচের পরিমাণ}}{\textbf{2007}\text{ এ সমুদায় খরচের পরিমাণ}}\times 100$$

$$=146.50=\frac{\textbf{2009}\text{ এ সমুদায় খরচের পরিমাণ}}{\textbf{8200}}\times 100$$

=2009-এর সমুদায় খরচের পরিমাণ =146.50×82=12013 টাকা

∴ পরিবারটির 2009 খরচের পরিমাণ 12013 টাকা। (উত্তর)

উদাহরণ-2 : নীচের ঘরে 2000 সালে আরম্ভ বিভিন্ন বস্তুর দাম ও 2009 সালে আরম্ভে সেই বস্তুর দাম সাথে সেই বস্তুগুলি কত পরিমাণে ব্যবহার করা যায় তা দেওয়া গেছে। 2000 সালকে মূলবর্ষ নিয়ে 2009 সালে আরম্ভ জীবনধারণ মূল্য সূচকাঙ্ক স্থির করে।

বস্তুর নাম	বস্তুর পরিমাণ (w)	2000 একক প্রতি দাম (p)	2009-র একক প্রতি দর (P_1)
চাল	40 কিলো	6.00 টাকা	12.00 টাকা
খাবার তেল	5 লিটার	32.00 টাকা	60 টাকা
চিনি	7 কিলো	16.00 টাকা	35 টাকা
দুধ	15 লিটার	6.00 টাকা	10 টাকা
মাংস	4 কিলো	120.00 টাকা	200 টাকা

সমাধান:

বস্তুর নাম	W	P_O	WP_O	P_1	WP_1
চাল	40 কিলো	6.00 টাকা	240 টাকা	12.00 টা.	480 টাকা
খাওয়ার তেল	5 লিটার	32 টাকা	160 টাকা	60 টা.	300 টাকা
চিনি	7 কিলো	16 টাকা	112 টাকা	3.5 টা.	245 টাকা
দুধ	15 লিটার	6 টাকা	90 টাকা	10 টা.	150 টাকা
মাংস	4 কিলো	120 টাকা	480 টাকা	200 টা.	800 টাকা

ΣNP_O=1082 টাকা ΣWP_1=1975 টাকা

জীবনধারণের মূল সূচকাঙ্ক $=\frac{\sum WP_1}{\sum WP_o}=\frac{1975\times 100}{1082}=182.5$ (উত্তর)

উদাহরণ-3 : নীচের ঘরে তথ্যকে ব্যবহার করে জীবন ধারণের মূল্য সূচকাঙ্ক নির্ণয় করো।

সামগ্রী	আবশ্যকতা পরিমাণ (কিগ্রাতে)	কি.গ্রা. পিছু দর (টাকা)	
		2000 সালে	2004 সালে
গম	15	600	8.50
চিনি	5	12.50	15.00
চাল	7	18.00	20.00
চা	0.5	85.00	90.00
ডাল	2.5	22.00	25.00

সমাধান :

সামগ্রী	সামগ্রীর পরিমাণ (কিগ্রা)	2000 দর টাকায়	সমুদায় খরচ 2000-এ	2004 দর টাকায়	সমুদায় খরচ 2004-এ
গম	15	6.00	90	8.50	127.50
চিনি	5	12.50	62.50	15.00	75.00
চাল	7	18.00	126.00	20.00	140.00
চা	0.5	85.00	42.50	90.00	45.00
ডাল	2.5	22.00	55.00	25.00	62.50
			376.00		450.00

2000-কে মূলবর্ষ রূপে নিয়ে

2004 (চলিতবর্ষ)-র জীবনধারণ মূল্য সূচকাঙ্ক $= \dfrac{\textbf{2004} \text{ এ সমুদায় খরচের পরিমাণ}}{\textbf{2000}\text{এ সমুদায় খরচের পরিমাণ}} \times 100$

$$= \frac{450.00}{376.00} \times 100 = 119.68 = 119.7 \text{ (প্রায়)}$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য:

2000-কে মূলবর্ষ রূপে নিয়ে 2004-র জীবনধারণ মূল্য সূচকাঙ্ক (Price of the commodities) অন্য অর্থে বস্তুর মূল্য 19.7% (শতকরা 19.7) অভিবৃদ্ধি ঘটেছে বলে বলতে পারবে।

নিজে করো

1. একটি রাজমিস্ত্রির দৈনিক মজুরি 2000 সালে 125 টাকা ছিল। 2009 সালে দৈনিক মজুরি 250 টাকা ছিল। তবে 2009 সালে জীবনধারণে মূল্য সূচকাঙ্ক নির্ণয় করো।
2. জীবন ধারণের মূল্য সূচকাঙ্ক এক সংখ্যা কেন? উদাহরণ সহিত বুঝিয়ে লেখো।

অনুশীলনী-8(d)

1. একটি সাধারণ পরিবারে কয়েকটি ব্যবহার্য বস্তুর নির্দিষ্ট পরিমাণ উপরে 2003 সালে সমুদায় খরচের পরিমাণ ছিল 8000 টাকা। যদি 2003-কে মূলবর্ষ নিয়ে 2010-এ জীবনধারণের মূল্য সূচকাঙ্ক 132.8 হয়ে থাকে, তবে 2010 সালে সেই পরিমাণ বিশিষ্ট ব্যবহার্য বস্তুর উপরে খরচের পরিমাণ কত ছিল নির্ণয় করো।
2. একটি পরিবারে 2002 সালে চিনি খরচের পরিমাণ 145 টাকা ছিল ও 2008-কে চিনি খরচের পরিমাণ 210 টাকা হলে 2002-কে মূলবর্ষ নিয়ে 2008-র জীবনধারণ মূল্য সূচকাঙ্ক নির্ণয় করো।
3. একটি পরিবারে কয়েকটি ব্যবহার্য বস্তুর নির্দিষ্ট পরিমাণ উপরে 2007 সালে সমুদায় খরচের পরিমাণ টা. 8900.00 পয়সা ছিল। 2000-কে মূলবর্ষে নিয়ে 2007-কে জীবনধারণের মূল্য সূচকাঙ্ক 210 হলে 2000 সালে সেই পরিমাণ বিশিষ্ট ব্যবহার্য বস্তুর উপরে মোট খরচের পরিমাণ কত ছিল নির্ণয় করো।
4. নীচের তথ্যে 2001-কে মূলবর্ষ নিয়ে 2005 সালে জীবনধারণের মূল্য সূচকাঙ্ক স্থির করো।

সামগ্রীর নাম	পরিমাণ (কিগ্রা)	প্রতি একক পিছু দর টাকাতে	
		2001-এ	2005-এ
A	100	6.00	12.00
B	10	8.00	8.00
C	16	5.00	6.50
D	20	40.00	55.00
E	45	15.00	20.00
F	20	20.00	25.00

5. একটি সাধারণ পরিবারে বিভিন্ন ব্যবহার্য বস্তুর আবশ্যকতা পরিমাণ ও সেগুলির 1998 ও 2006 সেগুলির মূল্য দেওয়া গেছে। 1998-কে মূলবর্ষ রূপে নিয়ে 2006-এর জীবনধারণ মূল্য সূচকাঙ্ক কত ছিল নির্ণয় করো।

সামগ্রীর নাম	আবশ্যকতার পরিমাণ	1998 সামগ্রীর দর	2006 সামগ্রীর দর
চাল	40 কিলো	2.78 টা.	3.50 টা.
আলু	35 কিলো	2.00 টা.	3.00 টা.
চা	1 কিলো	25.00 টা.	32.00 টা.
চিনি	10 কিলো	5.90 টা.	6.50 টা.
তেল	2 লিটার	48.00 টা.	58.00 টা.

6. নীচে সারণীতে ব্যবহার করে বর্তমান সময়ে জীবনধারণ মূল্য সূচকাঙ্ক নির্ণয় করো।

সামগ্রী	আবশ্যকতার পরিমাণ	মূল্যবর্ষর দর	বর্তমান দর
চাল	30 কিলো	টা. 3.00	টা. 14.50
ডাল	5 কিলো	টা. 8.00	টা. 32.00
তেল	8 লিটার	টা. 16.00	টা. 46.00
চিনি	4 কিলো	টা. 4.50	টা. 18.00
দুধ	20 লিটার	টা. 3.00	টা. 14.00
মাংস	3 কিলো	টা. 25.00	টা. 110.00

7. নীচের সারণী তথ্যকে ব্যবহার করে জীবনধারণ মূল্য সূচকাঙ্ক নির্ণয় করো।

সামগ্রী	আবশ্যকতার পরিমাণ	মূল্যবর্ষর দর	বর্তমান দর
চাল	10 কিলো	টা. 9.50	টা. 14.00
ডাল	2 কিলো	টা. 27.00	টা. 32.00
সবজি	12 কিলো	টা. 4.00	টা. 6.00
তেল	4 লিটার	টা. 32.00	টা. 46.50
মশলা	500 গ্রাম	টা. 48.00	টা. 60.00
জ্বালানি	8 কিলো	টা. 12.25	টা. 19.00

8. একটি মধ্যবিত্ত পরিবার 1985 এবং 1995-র জীবনধারণের নিমন্তে ব্যবহার করে থাকা বিভিন্ন বস্তুর আপেক্ষিক আবশ্যকতার পরিমাণ ও সেগুলি পাওয়ার নিমন্তে একক প্রতি দাম নীচে থাকা সারণীতে দেওয়া আছে। 1985-কে মূল বর্ষ রূপে নিয়ে 1995-তে মধ্যবিত্ত পরিবারের জন্য জীবনধারণ মূল্য সূচকাঙ্ক নির্ণয় করো।

বিভিন্ন সামগ্রীর পরিমাণ	খাদ্য 50%	পোশাক 10%	যাতায়াত খরচ 10%	ঘরভাড়া 20%	অন্যান্য 10%
1985 একক প্রতি দাম	240	30	60	100	40
1995 একক প্রতি দর	280	35	80	120	85

সূচনা=খাদ্য=50%=0.5 একক

পোশাক=10%=0.10 একক

যাতায়াত খরচ=10%=0.10 একক

ঘরভাড়া=20%=0.20 একক

অন্যান্য=10%=0.10 একক

প্রত্যেক সামগ্রীতে হয়ে থাকা মোট খরচ নির্ণয় করে থাকার পরে সেগুলি একত্র করে $\sum WP_o$ এবং $\sum WP_1$ নির্ণয় করা যাবে।

9. নীচের সারণীতে একটি পরিবারের খরচ 1995 সালে ও 2000 সালে একক প্রতি দর দেওয়া গেছে।

1995-কে মূলবর্ষ নিয়ে 2000 পরিবার লেগে জীবনধারণ মূল্য সূচকাঙ্ক নির্ণয় করো।

বিভিন্ন সামগ্রীর পরিমাণ	খাদ্য 40%	জ্বালানি 10%	পোশাক 20%	ঘরভাড়া 20%	অন্যান্য 10%
1995-এর একক প্রতি দাম	1400.00 টা.	20.00 টা.	60.00 টা.	50.00 টা.	30.00 টা.
2000-এ একক প্রতি দাম	165.00 টা.	23.00 টা.	70.00 টা.	80.00 টা.	35.00 টা.

.10. নিম্ন তথ্যকে ব্যবহার করে 2003-কে মূলবর্ষ নিয়ে 2009-এর জীবনধারণ মূল্য সূচকাঙ্ক নির্ণয় করো।

সামগ্রী	পরিমাণ কি.গ্রাতে	মূল্য টাকাতে	
		2003-এ	2009-এ
A	10	7.00	10.00
B	15	12.00	20.00
C	8	25.00	25.00
D	25	12.00	20.00
E	5	50.00	60.00

8.6 ব্যাঙ্ক কারবার (Banking) :

ব্যাঙ্ক একটি আর্থিক প্রতিষ্ঠান, যেখানে টাকা লেনদেন হয়। এখানে টাকা জমা হয় ও ঋণ দেওয়া হয়। মূল্যবান কাগজপত্র, হীরা, সোনা ইত্যাদি মূল্যবান পদার্থের সুরক্ষার জন্য ব্যাঙ্কের সাহায্য নেওয়া হয়ে থাকে। ব্যাঙ্কে পয়সা জমা রাখলে ব্যাঙ্কের তরফে কিছু সুদ পাওয়া যায়। ব্যাঙ্ক থেকে ঋণ নিলে ব্যাঙ্ককে কিছু সুদ দিতে হয়। শুধু মাত্র টাকা রাখলে যে হারে সুদ মিলে টাকা ঋণ আনলে ব্যাঙ্ককে তা থেকে বেশি হারে সুদ দিতে হয়।

ব্যাঙ্কের ইতিহাস অর্থের অভিবৃদ্ধি সহিত নিবিড়ভাবে সম্পৃক্ত। পূর্বকালে সাধারণ লোক তার সঞ্চিত ধনকে সমাজের এক বলবানের নিকট দায়িত্বে রেখে ছিল। যে সঞ্চিত অর্থকে আবশ্যক করে থাকা লোককে অধিক সুদে ঋণ দিয়েছিল। কালক্রমে তাদের সাধারণ লোক থেকে কম সুদ হারে টাকা জমা গ্রহণ করলে এবং অধিক সুদ হারে ঋণ দিতে লাগল। সেই বলবান লোকের প্রতিষ্ঠানকে ঘরোয়া ব্যাঙ্ক বলা চলে। 1974 সালে ভারত সরকার 14টি ব্যাঙ্কে জাতীয়করণ করেছিল। বর্তমান দেশে থাকা প্রায় সমস্ত ব্যাঙ্ক জাতীয়করণ ব্যাঙ্ক আছে। জাতীয়করণ ব্যাঙ্কগুলি রিজার্ভ ব্যাঙ্কের নির্দেশে কাজ করে।

ব্যাঙ্কের কার্য :

ব্যাঙ্কের বহুবিধ কার্য মধ্যে কয়েকটি কার্যকে নীচে দেওয়া হল।

(i) জমার জন্য টাকা গ্রহণ করা।

(ii) আবশ্যক সময় টাকা প্রদান করা।

(iii) জমা টাকার উপরে সুদ প্রদান করা।

(iv) টাকা জমাকারীকে অগ্রিম ঋণ প্রদান করা।

(v) সুরক্ষা বন্ডগুলির ক্রয় ও বিক্রয় করা।

(vi) লকারে ভাড়া সূত্রে দিয়ে মূল্যবান পদার্থগুলি যোগান দেবা।

(vii) ভ্রমণকারী বা পর্যটককে ভ্রমণ চেক অথবা বিদেশী চেক ও বিদেশী মুদ্রার বিনিময়ে নগদ টাকা প্রদান করা।

(viii) চাষী, দোকানী, শিক্ষিত বেকার ও আর্থিক দুর্বল লোককে ঋণ প্রদান করে তাদের অর্থিক স্থিতিকে মজবুত করা।

(ix) স্কুলের দরমা, জল, ইলেকট্রিক ও টেলিফোন বিল, ঘরভাড়া, আয়কর ট্যাক্স, ঋণের কিস্তি ইত্যাদি বাঙ্কের মাধ্যমে গ্রহণ করা এবং

(x) সরকারী চাকুরীজীবীর বেতন ও পেনশনভোগীদের পেনশন প্রদান করব ইত্যাদি।

ব্যাঙ্কে টাকা মুখ্যত পাঁচ প্রকারের অ্যাকাউন্টে রাখা যায়।

(ক) চলতি অ্যাকাউন্ট (Current Account)

(খ) সঞ্চয় ব্যাঙ্ক অ্যাকাউন্ট (Savings Bank Account)

(গ) মেয়াদি জমা অ্যাকাউন্ট (Term Deposite Account)

(ঘ) পৌনঃপুনিক জমা অ্যাকাউন্ট (Recurring Deposite Account)

(ঙ) নাবালক বা নাবালিকার জন্য অ্যাকাউন্ট (Accounts for Minors)

ডাকঘরে চলতি অ্যাকাউন্ট ব্যতীত অন্য চারটি অ্যাকাউন্ট প্রচলন করা যায়।

চলতি অ্যাকাউন্ট : বড়ো বড়ো ব্যবসায়ী কোম্পানীদের সাধারণত চলতি অ্যাকাউন্ট খুলে থাকে। ব্যাঙ্ক প্রদত্ত চেক মাধ্যমে এই ব্যবসায়ী ও কোম্পানীদের কারবার করে থাকে এই অ্যাকাউন্টে জমে থাকা টাকার জন্য ব্যাঙ্ক কিছু সুদ দেয় না। কিন্তু তার পরিবর্তে কয়েকটি সুবিধা জুগিয়ে থাকে। অ্যাকাউন্টধারী চাইলে দিনে যতবার টাকা জমা করতে পারবে অথবা টাকা ওঠাতে পারবে।

সঞ্চয় ব্যাঙ্ক অ্যাকাউন্ট : বেতনধারী, স্বল্প ও মধ্যম আয়কারী ব্যক্তিবিশেষ সাধারণত সঞ্চয় ব্যাঙ্ক অ্যাকাউন্ট খুলে থাকে। এই অ্যাকাউন্টের মুখ্য উদ্দেশ্য হল স্বল্প ও মধ্যম আয়কারী লোকদের মধ্যে সঞ্চয়ের অভ্যাসকে বাড়ানোর জন্য উৎসাহ প্রদান করব। সঞ্চয় ব্যাঙ্ক অ্যাকাউন্ট সব থেকে লোকপ্রিয় অ্যাকাউন্ট। যে কোনো ব্যক্তি সর্বনিম্ন 100 টাকা দিয়ে যে কোনো ব্যাঙ্কের একটি অ্যাকাউন্ট খোলাতে পারবে। সব সময়ের জন্য অতি কমে অ্যাকাউন্টে 100 টাকা থাকা আবশ্যক।

8.6.1 ব্যাঙ্কে অ্যাকাউন্ট খোলার উপায় :

ব্যাঙ্কের একটি অ্যাকাউন্ট খোলার জন্য একটি নির্ধারিত ফর্ম পূরণ করতে হয়। সেই ফর্মেই অ্যাকাউন্টধারী ও অ্যাকাউন্টধারীকে পরিচয় করে দিয়ে থাকা ব্যক্তি ঠিকানার সাথে জমাকারীর নমুনা দস্তখত থাকে। তা ব্যতীত পাসপোর্ট সাইজের ফটোগ্রাফ, ভোটের পরিচয়পত্র বা প্যান (PAN Permanent Account Number) কার্ডের জেরক্স দিতে হয়।

অ্যাকাউন্ট খোলার পর অ্যাকাউন্টধারীকে ব্যাঙ্কের তরফ থেকে একটা পাশবই দেওয়া হয়। যে কোনো কার্য দিবসে নির্ধারিত সময়ের মধ্যে ব্যাঙ্কে গিয়ে অ্যাকাউন্টধারী যত টাকা জমা করতে পারে বা জমা থাকা টাকাকে ওঠাতে পারবে। সঞ্চয় ব্যাঙ্ক থেকে টাকা ওঠানো বা জমা করার জন্য একটি নির্দিষ্ট ফর্ম পূরণ করতে হয়। সেই ফর্মগুলি ব্যাঙ্কে পাওয়া যায়। টাকা ওঠানোর জন্য নির্দিষ্ট ফর্ম ব্যতীত অ্যাকাউন্টধারীকে একটি চেকবই দেওয়া হয়। চেক ব্যবহার করতে হলে স্টেটব্যাঙ্ক ব্যতীত অন্য সমস্ত ব্যাঙ্ক অ্যাকাউন্ট অতি কমে 500 টাকা থাকা দরকার এবং স্টেট ব্যাঙ্ক অ্যাকাউন্টের অতি কমে 1000 টাকা থাকা দরকার।

ডাকঘরেও যে কোনো ব্যক্তি একটি সঞ্চয় ব্যাঙ্ক অ্যাকাউন্ট খুলতে পারবে।

পাশবুকের একটি পৃষ্ঠার নমুনা নীচে দেওয়া গেল।

Date তারিখ	Particulars বিবরণী	Cheque No. চেক	Ammount Withdrawn Rs. p টাকা ওঠানো টা. প.	Ammount Deposited Rs. p টাকা রাখা টা. প.	Balance Rs. p অবশেষে টা. প.	Signature সাক্ষর

মেয়াদি জমা অ্যাকাউন্ট :

যদি একজন ব্যক্তি টাকা খরচ না করে তার সঞ্চয়কে বাড়াতে চায়, তবে সে মেয়াদি জমা অ্যাকাউন্টে একটি নির্দিষ্ট সময়সীমার জন্য টাকা জমা রাখে। নির্ধারিত অবধির মধ্যে এই অ্যাকাউন্ট থেকে টাকা ওঠানো যায় না। এর জন্য প্রচলিত সুদ হার থেকে ব্যাঙ্ক বেশি সুদ দিয়ে থাকে। যদি অ্যাকাউন্টধারীকে সময়সীমার পূর্বে টাকা ওঠাতে হলে ব্যাঙ্ক থেকে অনুমতি নিতে হয় ও সুদের হার নির্দিষ্ট সুদহার থেকে কম হয়। 2009 সালের জন্য এই মেয়াদি জমা আমানতের বিভিন্ন অবধি জন্য সুদের হার হচ্ছে।

15 দিনে 45 দিন পর্যন্ত সুদের হার 2.5%
46 দিনে 90 দিন পর্যন্ত সুদের হার 3.5%
91 দিনে 180 দিন পর্যন্ত সুদের হার 4.75%
181 দিনে 1 বর্ষ পর্যন্ত সুদের হার 5.5%

2 বছরে 3 বছর পর্যন্ত সুদের হার 6.5%
3 বছরে 5 বছর পর্যন্ত সুদের হার 6.75%
5 বছরে 8 বছর পর্যন্ত সুদের হার 7%
8 বছরে 10 বর্ষ পর্যন্ত সুদের হার 7.25%

এই সুদের হার ভারতীয় স্টেট ব্যাঙ্ক দ্বারা প্রচলিত অন্য কয়েকটি ব্যাঙ্কের সুদ হার এর থেকে কম হতে পারে।

পৌনঃপুনিক জমা অ্যাকাউন্ট: পৌনঃপুনিক জমা অ্যাকাউন্ট হচ্ছে এক প্রকার স্থায়ী আমানত অ্যাকাউন্ট। এই অ্যাকাউন্ট পরিপক্ক হওয়ার জন্য একটি নির্দিষ্ট সময়সীমা ধার্য করা গিয়ে থাকে। এটি স্থল বিশেষে 5 বছর, 10 বছর মধ্য হতে পারে। এই অ্যাকাউন্ট একটি নির্দিষ্ট পরিমাণের টাকা পূর্বনির্ধারিত শর্ত অনুসারে প্রতি মাসে, তিন মাসে একবার ছয় মাসে একবার বা বছরে একবার জমা দেওয়া যায়। পূর্ব নির্ধারিত অবধি পরে সমূল সুদ সাথে পুরো টাকা জমাকারীকে মিলে থাকে।

নাবালক/ নাবালিকার জন্য অ্যাকাউন্ট: নাবালক/ নাবালিকার জন্য ব্যাঙ্কের অ্যাকাউন্ট খোলা যায়। তারা সাবালক সাবালিকা হওয়া পর্যন্ত তাদের অভিভাবকদের দ্বারা অ্যাকাউন্ট চালু রাখা যায়।

8.6.2 সঞ্চয় ব্যাঙ্ক অ্যাকাউন্টের সুদ হিসাব:

(i) প্রতি মাসের 10 তারিখ থেকে সেই মাসের শেষ তারিখ পর্যন্ত অ্যাকাউন্টে থাকা সর্বনিম্ন অবশেষে জমারাশি উপরে সুদ হিসাব করা যায়।

(ii) সর্বনিম্ন অবশেষে জমারাশিকে 10-র গুণিতক রূপ নিয়ে হিসাব করা যায়। যদি সর্বনিম্ন অবশেষে পরিমাণ 560 টাকা থেকে 565 টাকার মধ্যে থাকে, তবে তাকে 560 টাকা হিসাবে গ্রহণ করা যাবে, এবং যদি সর্বনিম্ন অবশেষে পরিমাণ 565 টাকা থেকে 570 টাকা মধ্যে থাকে। তবে তাকে 570 টাকা হিসাবে গ্রহণ করা যাবে। 5 টাকা পর্যন্ত জমারাশিতে কোনো সুদ মেলে না।

(iii) প্রতিমাসের সর্বনিম্ন অবশেষ টাকাকে নিয়ে মিশিয়ে সুদ হিসাব নিমিত্ত মূলধন P স্থির করা যাবে।

(iv) উপরোক্ত মূলধনের জন্য 1 মাসে ($\frac{1}{12}$ বর্ষ) সরল সুদ হিসাবে করা যাবে। সরল সুদের হিসাব জন্য $1=\frac{PRT}{100}$ সূত্র ব্যবহার করা যাবে।

(v) যে মাসে অ্যাকাউন্ট রদ হল সে মাসের জন্য সুদ হিসাব করা যাবে না।

(vi) যদিও প্রতি মাসের জন্য সুদ হিসাব করা যায়, তবে বছরে দুবার মার্চ 31 তারিখ ও সেপ্টেম্বর 30 তারিখ অ্যাকাউন্টধারীকে পাশবুকের ব্যাঙ্ক তরফে সুদ জমা করা হয়। কয়েকটি ব্যাঙ্কে এই সুদের হিসাব জুন 30 তারিখ ও ডিসেম্বর 31 তারিখে করা হয়ে থাকে।

স্টেট ব্যাঙ্ক অফ ইন্ডিয়া তরফে সঞ্চয় ব্যাঙ্ক অ্যাকাউন্ট জন্য সুদের হার বার্ষিক 3.5% যা বছরে দুবার দেওয়া যায়, পোস্ট অফিসে সঞ্চয় অ্যাকাউন্ট জন্য সুদের হারও বার্ষিক 3.5%।

উদাহরণ-1 :

হবির ভারতীয় স্টেট ব্যাঙ্কে 2.7.09 তারিখে 500 টাকা জমা দিয়ে একটি অ্যাকাউন্ট খুলল। সে মাসের 9 তারিখে আর 720 টাকা জমা দিল ও 17 তারিখে 200 টাকা তুলল। সেই মাসের 22 তারিখে 100 টাকা ব্যাঙ্কে জমা দিল। তবে 2009 সালে জুলাই মাসের জন্য হবির কত টাকা উপরে সুদ পাবে?

সমাধান:

তারিখ	বিবরণী	চেক নং	টাকা ওঠানো টা. প.	টাকা রাখা টা. প.	অবশেষে টা. প.	স্বাক্ষর
2.7.09	টাকা আকারে			500.00	500.00	
9.7.09	টাকা আকারে			720.00	1220.00	
17.7.09	চেক আকারে	301	200.00		1020.00	
22.7.09	টাকা আকারে			100.00	1120.00	

জুলাই মাসের 10 তারিখ থেকে মাস শেষ পর্যন্ত সর্বনিম্ন অবশেষ টাকা 1020.00।

(কারণ নিয়ম মতো 22 তারিখে জমা রাখা টাকার উপরে সুদ পাবেনা।)

উদাহরণ -2 : নমিতা পণ্ডার গ্রাম্য ব্যাঙ্কে একটি সঞ্চয় অ্যাকাউন্ট আছে। অ্যাকাউন্ট বইতে মে ও জুন 2006 সালের জন্য বিশদ বিবরণী নিম্ন প্রাকারের।

তারিখ	বিবরণী	চেক নং	টাকা ওঠানো টা. প.	টাকা রাখা টা. প.	অবশেষে টা. প	স্বাক্ষর
মে 3	টাকা আকারে			200.00	200.00	
মে 8	টাকা আকারে			300.00	500.00	
জুন 1	চেক আকারে		2000.00		2500.00	
জুন 1	চেক আকারে		15.00		2485.00	
জুন 6		501	485.00		2000.00	

মে ও জুন মাসে কত টাকার জন্য নমিতা সুদ পেতে হক্‌দার নির্ণয় করো। যদি সুদের হার বার্ষিক 3.5% হয়ে থাকে এবং মে জুন মাসে তার অ্যাকাউন্ট বন্ধ করে না থাকে তবে মে ও জুন উভয় মাসের জন্য সমুদায় কত টাকা সুদ পাবে।

সমাধান :

মে মাসের 10 তারিখ থেকে 31 তারিখ পর্যন্ত অবশেষে টাকা হচ্ছে 500 টাকা, তাই এই টাকার জন্য সে সুদ পাবে। সেরকম জুন মাসে পূর্বনির্ধারিত সময়ের জন্য অবশেষে টাকা হচ্ছে 2000 টাকা। তাই

মে মাসের জন্য সর্বনিম্ন অবশেষ টাকা = 500 টাকা
জুন মাসের জন্য সর্বনিম্ন অবশেষ টাকা = 2000 টাকা
সমুদায় .= 2500 টাকা।

এই মূলধন 2500 টাকা এক মাসের জন্য সুদ হচ্ছে।

সুদ $= \frac{P \times R \times T}{100} = \frac{2500 \times 35}{100} \times \frac{1}{12}$ টা. $= \frac{875}{12}$ টা.=72.9 টা.

উদাহরণ-3 : রিঙ্কুর পাশবুকে একটি অংশ নীচে দেওয়া গেল। যদি প্রতিবছর মার্চ 31 ও সেপ্টেম্বর 30 তারিখে সুদ হিসাব করা গিয়ে থাকে তবে বার্ষিক 3.5% সুদ হার হিসাবে সেপ্টেম্বর 30 তারিখে রিঙ্কু কত টাকা সুদ পাবে?

তারিখ	বিবরণী	চেক নং	টাকা ওঠানো টা. প.	টাকা রাখা টা. প.	অবশেষে টা. প	স্বাক্ষর
এপ্রিল 1	অবশেষে				2000.00	
এপ্রিল 6	টাকা আকারে			600.00	2600.00	
এপ্রিল 16	লোকাল চেক			1200.00	3800.00	
মে 9		108 জন্য	700.00		3100.00	
মে 10	টাকা আকারে			800.00	3900.00	
মে 12		109 জন্য	1200.00		2700.00	
জুলাই 10	টাকা আকারে			1500.00	4200.00	
জুলাই 19	নিজের জন্য		1000.00		3200.00	
জুলাই 30		110 জন্য	600.00		2600.00	

সমাধান :

এপ্রিল মাস থেকে সেপ্টেম্বর মাসের জন্য সর্বনিম্ন অবশেষে জন্য টাকা এরকম

এপ্রিল	টা.	2600.00
মে	টা.	2700.00
জুন	টা.	2700.00 (জুন মাসে টাকা ওঠানো হয়নি বা জমা দেয়নি)
জুলাই	টা.	2600.00
আগস্ট	টা.	2600.00 (আগস্টে সেই টাকা জমা আছে)
সেপ্টেম্বর	টা.	2600.00 (সেপ্টেম্বরের মধ্যে সেই জমা আছে)
	টা.	15800.00

15800.00-কে মূলধন হিসাবে এক মাসের জন্য বার্ষিক 3.5% হিসাবে সুদ হিসাব করা অর্থাৎ এখানে মূলধন =15800.00

সুদের হার = বার্ষিক 3.5% সময় T=1 মাস = $\frac{1}{12}$ বর্ষ

নির্ণেয় সুদ $= \frac{P \times R \times T}{100} = \frac{15800 \times 35 \times 1}{100 \times 12} = \frac{158 \times 35}{12} = 46.08$ টাকা

উদাহরণ-4 : সৌরভ স্টেট ব্যাঙ্কে 2000 টাকা দিয়ে 16.1.2007-এ একটি সঞ্চয় অ্যাকাউন্ট খুলেছিল। উক্ত বর্ষের জানুয়ারী থেকে মার্চ মাস পর্যন্ত সে নিচে প্রকারে খুলে থাকা অ্যাকাউন্টের সাথে সম্পর্ক রেখেছিল।

24.1.2007-এ 875 টাকা উঠিয়েছিল।
28.1.2007-এ 376 টাকা জমা রেখেছিল।
3.2.2007-এ 450 টাকা জমা রেখেছিল।
10.2.2007-এ 280 টাকা উঠিয়েছিল ও
5.3.2007-এ 788 টাকা জমা রেখেছিল।

উক্ত তথ্যগুলি একটি পাশ বইতে লিখে মার্চ মাসের শেষ পর্যন্ত শতকরা 4% হারে সুদের সুদ হিসাব করো।

সমাধান :

সৌরভের পাশবইয়ের একটি পৃষ্ঠা

তারিখ	বিবরণী	টাকা ওঠানো টা. প.	টাকা রাখা টা. প.	অবশেষে টা. প.	স্বাক্ষর
16.1.2007	টাকা জমা		2000.00	2000.00	
24.1.2007	নিজের জন্য	875.00		1125.00	
28.1.2007	টাকা জমা		376.00	1501.00	
3.2.2007	টাকা জমা		450.00	1951.00	
10.2.2007	চেকে	280.00		1671.00	
5.3.2007	টাকা জমা		788.00	2459.00	

জানুয়ারি মাসের জন্য সর্বনিম্ন অবশেষ টাকা	0.00	0.00
ফেব্রুয়ারি মাসের জন্য সর্বনিম্ন অবশেষ টাকা	1671.00	1670.00
মার্চ মাসের জন্য সর্বনিম্ন অবশেষে টাকা	2459.00	2460.00
সর্বনিম্ন অবশেষ টাকা (P)		4130.00

$\therefore$ মূলধন (P) = 4130.00

সময় T = 1 মাস $= \frac{1}{12}$ বর্ষ

শতকরা সুদের হার (R%) = 4% = $\frac{4}{100}$

$\therefore$ সুদ = $\frac{4130 \times 4 \times \frac{1}{12}}{100}$ টাকা $\frac{4130 \times 4}{12 \times 100} = 13.77$ টাকা

অনুশীলনী-8(e)

1 থেকে 3 পর্যন্ত প্রশ্নগুলি সমাধানের জন্য যেকোনো দুটি জাতীয়করণ ব্যাঙ্কের সাহায্য নেওয়া যাক।

1. সর্বনিম্ন কত টাকা দিয়ে ব্যাঙ্কে একটি অ্যাকাউন্ট খোলা যেতে পারবে?

2. চেক দিয়ে ব্যাঙ্ক থেকে টাকা উঠানোর পর অ্যাকাউন্টে অতি কমে কত টাকা থাকা দরকার?

3. বছরে কত বার সঞ্চয় ব্যাঙ্ক অ্যাকাউন্টে জন্য ব্যাঙ্ক সুদ হিসাব করে?

4 (a) একজন ব্যক্তি 500 টাকা দিয়ে এপ্রিল 11 তারিখে একটি অ্যাকাউন্ট খুলল। যদি জুন মাস শেষ পর্যন্ত সে ব্যাঙ্ক থেকে টাকা উঠিয়ে না থাকে বা টাকা জমা রেখে না থাকে, তবে 6% সুদ হিসাবে সে জুন মাসের শেষে কত সুদ পাবে?

(b) অরুণের সঞ্চয় ব্যাঙ্ক অ্যাকাউন্টে আগস্ট মাসের জন্য সর্বনিম্ন অবশেষে 5010 টাকা ছিল। মাত্র অরুণ আগস্ট মাস 30 তারিখ দিন অ্যাকাউন্ট বন্ধের জন্য দরখাস্ত করল। তবে অরুণ আগস্ট মাসের জন্য কত টাকার উপরে সুদ পাবে?

5. নম্রতার ব্যাঙ্কে একটি সঞ্চয় অ্যাকাউন্ট আছে। অ্যাকাউন্ট বইতে থাকা হিসাব বিশদ বিবরণী এরকম—

তারিখ	বিবরণী	চেক নং	টাকা উঠানো টা. প.	টাকা রাখা টা. প.	অবশেষে টা. প	স্বাক্ষর
ফেব্রুয়ারি-19	টাকা জমা			1000.00	1000.00	
ফেব্রুয়ারি-25	টাকা জমা			2000.00	3000.00	
মার্চ-1	দরমা টাকা			5000.00	8000.00	
মার্চ-10		201 জন্য	2000.00		6000.00	
মার্চ-27		202 জন্য	500.00		5500.00	
এপ্রিল-1	দরমা টাকা			5000.00	10500.00	

উপরোক্ত জমার জন্য বার্ষিক সুদের হার 5% হবে।

(i) ফেব্রুয়ারি মাসের জন্য নম্রতা কত সুদ পাবে?

(ii) মার্চ মাসের জন্য কত সুদ পাবে?

(iii) এপ্রিল 21 তারিখে অ্যাকাউন্ট বন্ধ করতে নম্রতা দরখাস্ত করলে, সমুদায় জমা টাকা জন্য সে কত সুদ পাবে?

6. হরির একটি সঞ্চয় ব্যাঙ্ক অ্যাকাউন্ট আছে। 1998 সালের জন্য পাশবইতে থাকা টাকার বিশদ বিবরণী নীচে দেওয়া গেছে। যদি ডিসেম্বর মাসের শেষ বর্ষকে একবার মাত্র 5% সুদে সুদ হিসাব করা যায় তবে হরি 1998 সালে জন্য কত সুদ পেল, হিসাব করো।

তারিখ	বিবরণী	চেক নং	টাকা ওঠানো টা. প.	টাকা রাখা টা. প.	অবশেষে টা. প.	স্বাক্ষর
1998 জানুয়ারি-1	অবশেষে				2300.00	
জানুয়ারি-25	টাকা আকারে			600.00	2900.00	
মার্চ-1	টাকা আকারে			200.00	3100.00	
জুন-10		302	400.00		2700.00	
সেপ্টেম্বর-8		303	600.00		2100.00	
ডিসেম্বর-23		304	600.00		10500.00	

7. তুমি ভারতীয় স্টেট ব্যাঙ্কে 500 টাকা দিয়ে জানুয়ারির 5 তারিখে একটি সঞ্চয় অ্যাকাউন্ট খুললে। জানুয়ারির 12 তারিখে আরও 1000 টাকা জমা দিলে। জানুয়ারির 27 তারিখে চেক দিয়ে 300 টাকা উঠালে। ফেব্রুয়ারির 10 তারিখে 700 টাকা জমা দিলে। মার্চের 5 তারিখে 200 টাকা ফর্ম দিয়ে টাকা উঠালে।

(i) উপরের বিশদ বিবরণী কেমন পাশবুকে লেখা যাবে দেখাও।

(ii) যদি বার্ষিক সুদের হার 5% হয়ে থাকে, তবে মাসের শেষে তুমি কত টাকা সুদ পাবে?

8. সলিমের একটি সঞ্চয় ব্যাঙ্ক অ্যাকাউন্ট আছে। পাশবুকের একটি পৃষ্ঠা নকল নীচে দেওয়া গেছে। যদি ডিসেম্বরের শেষ বর্ষে মাত্র 5% সুদে সুদ হিসাব করা যায়, তবে সলিম 2001 সালের জন্য কত সুদ পেয়ে থাকবে হিসাব করো।

তারিখ 2001	বিবরণী	টাকা ওঠানো টা. প.	টাকা রাখা টা. প.	অবশেষে টা. প	স্বাক্ষর
জানুয়ারি-2	অবশেষে			1250.00	
ফেব্রুয়ারি-2	চেক জন্য	550.00		700.00	
মার্চ-3	টাকা জমা		2000.00	2700.00	
মার্চ-10	টাকা জমা		575.00	3275.00	
নভেম্বর-4	চেক জন্য	1500.00		1775.00	
ডিসেম্বর-4	টাকা জমা		3000.00	4775.00	

9. একটি সঞ্চয় পাশবুকে একটি পৃষ্ঠার নকল দেওয়া গেছে। যদি ফেব্রুয়ারি মাস থেকে জুলাই মাসের মধ্যে ব্যক্তি জন 111.45 টাকা সুদ পেয়ে থাকে তবে শতকরা সুদের হার নির্ণয় করো।

তারিখ 2001	বিবরণী	টাকা ওঠানো টা. প.	টাকা রাখা টা. প.	অবশেষে টা. প	স্বাক্ষর
ফেব্রুয়ারি-8	অবশেষে			8500.00	
ফেব্রুয়ারি-12	নিজের জন্য	4000.00		4500.00	
এপ্রিল-12	টাকা জমা		2238.00	6378.00	
জুন-15	নিজের জন্য	5000.00		1738.00	
জুলাই-8	টাকা জমা		6000.00	7738.00	

10. কুলদীপের সঞ্চয় পাশবুকের একটি পৃষ্ঠা নকল নীচে দেওয়া গেছে। 16% হারে জানুয়ারি থেকে ডিসেম্বর 2000 পর্যন্ত সুদ হিসাব করো।

তারিখ 2000	বিবরণী	টাকা ওঠানো টা. প.	টাকা রাখা টা. প.	অবশেষে টা. প.	স্বাক্ষর
জানুয়ারি-1	অবশেষ			2000.00	
ফেব্রুয়ারি-3	চেক দ্বারা		1550.00	3550.00	
ফেব্রুয়ারি-10	টাকা জমা		2000.00	5500.00	
জুন-17	চেক জন্য	1000.0		4550.00	
নভেম্বর-5	টাকা জমা		2525.00	7075.00	
ডিসেম্বর-6	চেক জন্য	2500.00		4575.00	

11. মানসের সঞ্চয় পাশবুকের একটি পৃষ্ঠা নকল নীচে দেওয়া গেছে। 2007 সালে জানুয়ারি মাস থেকে 2007 জুন মাস পর্যন্ত 4% সুদ হারে সুদ হিসাব করো।

তারিখ 2007	বিবরণী	টাকা ওঠানো টা. প.	টাকা রাখা টা. প.	অবশেষ টা. প	স্বাক্ষর
3.1.2007	অবশেষ			2642.00	
16.1.2007	নিজের জন্য	640.00		2002.00	
5.3.2007	টাকা জমা		850.00	2852.00	
10.4.2007	নিজের জন্য	1130.00		1722.00	
25.4.2007	চেক দ্বারা		650.00	2372.00	
15.6.2007	টাকা জমা	577.00		1795.00	

12. সৌম্য রঞ্জন সঞ্চয় পাশবুকের একটি পৃষ্ঠার নকল নীচে দেওয়া গেছে। 25.7.2004-এ অ্যাকাউন্ট বন্ধ করে 6042.45 পেয়েছিল। তবে শতকরা সুদের হার কত ছিল স্থির করো।

তারিখ 2004	বিবরণী	টাকা ওঠানো টা. প.	টাকা রাখা টা. প.	অবশেষে টা. প	স্বাক্ষর
জানুয়ারি-1	অবশেষ			8026.15	
জানুয়ারি-5	টাকা জমা		650.00	8676.15	
ফেব্রুয়ারি-13	নিজের জন্য	2500.00		6176.15	
জুন-4	চেক দ্বারা		385.00	6561.15	
জুলাই-19	চেক মাধ্যমে	718.50		5842.65	

চলন (VARIATION)

অধ্যায়
৯

9.1 চলন (Variation) :

তুমি তোমার পরিবেশে নানা প্রকার পরিবর্তন লক্ষ করে থাকবে। উদাহরণস্বরূপ একটি দিনে বিভিন্ন সময়ে একটি নির্দিষ্ট গাছের ছায়ার দৈর্ঘ্য, একটি শহরের বিভিন্ন সময়ে জনসংখ্যার পরিবর্তন, একটি ছাত্রর বয়স সঙ্গে তার উচ্চতার পরিবর্তন ইত্যাদি। সেরকম আবশ্যকতা দৃষ্টি থেকে একটি পরিবারের খরচের পরিমাণ পরিবর্তন আদিও তোমাদের দৃষ্টিগোচর হয়ে থাকবে। এসো সেরকম কয়েকটি পরিস্থিতি সম্বন্ধে আলোচনা করব।

9.1.1 সলখ চলন (Direct Variation) :

পরিস্থিতি-1:

5 লিটার দুধের দাম 100 টাকা হলে দুই দিনে একটি পরিবারে খরচ হতে থাকা 4 লিটার ও 6 লিটার দুধের দাম কত হবে? ঐকিক ধারা প্রয়োগ করে তুমি বলতে পারবে 4 লিটার এবং 6 লিটার দুধের দাম যথাক্রমে 80 টাকা ও 120 টাকা হবে। অর্থাৎ কম লিটার দুধ কেনার জন্য কম মূল্য ও অধিক লিটার দুধ কেনার জন্য অধিক মূল্য দিতে হবে। নীচের সারণীতে লক্ষ করো। সারণীতে ভিন্ন ভিন্ন পরিমাণ জন্য দুধের দাম দেওয়া হয়েছে।

দুধের পরিমাণ লিটারে	2	3	4	5	6	7	8	9	10
দুধের দাম টাকাতে	40	60	80	100	120	140	160	180	200

এখানে আবশ্যকতা দৃষ্টিতে দুধের পরিমাণ বৃদ্ধি পেলে দুধের জন্য দিতে থাকা মূল্যের আনুপাতিকভাবে বৃদ্ধি হচ্ছে। সেরকম আবশ্যকতা অনুযায়ী দুধের পরিমাণ কমলে দুধের জন্য দিতে থাকা মূল্যে আনুপাতিকভাবে হ্রাস পাবে।

এখান থেকে স্পষ্ট যে আবশ্যক দুধের পরিমাণ উপরে দুধের জন্য দিতে টাকার পরিমাণ নির্ভর করে থাকায় উভয়কে এক একটি চলরাশি বলা যায় এবং একটির পরিবর্তন উপরে নির্ভর করে অন্যটির পরিবর্তন হচ্ছে। রাশিদ্বয়ের এরকম পরিবর্তনকে চলন বলা যায়।

পরিস্থিতি-2 :

সেরকম অন্য একটি পরিস্থিতি কথা আলোচনা করব। তুমি বাজারে নারকেল কিনতে গেলে। দোকানী 4টি নারকেলের মূল্য 32 টাকা বলল। সেই দামে যদি তুমি একপ্রকার নারকেল 2টি কিনবে তবে তোমাকে 16 টাকা দিতে হবে কিংবা 5টি নারকেল কিনলে মূল্য বাবদে দোকানীকে 40 টাকা দিতে হবে। অর্থাৎ কম সংখ্যক নারকেল জন্য কম মূল্য ও অধিক সংখ্যক নারকেল জন্য অধিক মূল্য দিতে হবে।

পরিস্থিতি-1 ও পরিস্থিতি-2-কে অনুধ্যান করলে জানব, দুটি রাশির মধ্যে একটির বৃদ্ধি ঘটলে অন্যটির বৃদ্ধি হয় বা একটির হ্রাস ঘটলে অন্যটির হ্রাস হয়। রাশিদের মধ্যে এ প্রকার সম্বন্ধকে সলখ চলন বলা যায়।

নীচের সারণীকে লক্ষ করো (পরিস্থিতি-2-কে লক্ষ করো।

নারকেলের পরিমাণ (x)	2	5	6	8	9	10
নারকেলের মূল্য (y)	16	40	48	64	72	80
$\frac{x}{y}$-র মান	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

এখানে x-এর মান বৃদ্ধি পেলে y-র মান বৃদ্ধি পাবে। কিংবা x-এর মান হ্রাস পেলে y-এর মান হ্রাস পাবে। কিন্তু প্রত্যেক স্থলে $\frac{x}{y}$-র মান সমান থাকবে, নারকেল পরিমাণ x_1 থেকে x_2-কে পরিবর্তিত হলে এর মূল্য যথাক্রমে y_1 থেকে y_2-কে পরিবর্তিত হয়, যেখানে $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = k$

সারণী থেকে স্পষ্ট যে, $k = \frac{1}{8}$

x ও y-র একপ্রকার চলনকে **প্রতক্ষ্য চলন (Direct Variation) :** বলে।

একে আমরা লিখব $x \propto y$ এবং পড়ব x varies directly as y

মনে রাখো: $x \propto y \to x = ky \to \frac{x}{y} = k$ এবং $\frac{x}{y} = \frac{x_1}{Y_1} = \frac{x_2}{y_2} = K$

নিজে করো

1. নীচের সারণীকে দেখে x ও y চলরাশিদ্বয়ের প্রতক্ষ্য চলন আছে কি না পরীক্ষা করে দেখো।

(a)

x	20	17	14	11	8	5	2
y	40	34	28	22	16	10	4

(b)

x	6	10	14	18	22	26	30
y	4	8	12	16	20	24	28

(c)

x	5	8	12	15	18	20
y	15	24	36	60	72	100

সূচনা- প্রত্যেক ক্ষেত্র $\frac{x}{y}$-র মান স্থির করো।

2. x ও y চলরাশিদ্বয়ে প্রতক্ষ্য চলনে থাকলে নিম্ন সারণী থেকে p ও q মান স্থির করো।

x	5	p	10
y	8	32	q

সূচনা- $\frac{x_1}{Y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}=K$ সূত্র সাহায্যে p ও q-র মান স্থির করো।

উদাহরণ-1 : চাল কিলোগ্রাম প্রতি 3 টাকা। পরিবারের লোকসংখ্যা অনুযায়ী পরিবারের মুখ্য এক সপ্তাহের জন্য চাল কিনল। চাল পরিমাণ 7 কিগ্রা, 14 কিগ্রা 21 কিগ্রাা ও 28 কিগ্রা কেনার জন্য কত কত মূল্য দিতে হবে?

সমাধান- এখানে এক কিলোগ্রাম চালের মূল্য 3 টাকা।

$\therefore$ $x_1=1$ ও $y_1=3$ পুনশ্চ x_2 ও y_2-র মূল্য স্থির করতে হবে।

সূত্র অনুযায়ী $\frac{x_1}{Y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ অর্থাৎ $x_1y_2= x_2y_1 \to y_2 = \frac{x_2 y_1}{x_1}=\frac{7\times3}{1}=21$

$\therefore$ 1 কিগ্রা চালের মূল্য 21 টাকা।

সূচনা- চলনের সূত্র প্রয়োগ করে কিলোগ্রাম প্রতি 3 টাকা দরে তুমি 14 কিগ্রা, 21 কিগ্রা ও 28 কিগ্রা চালের মূল্য স্থির করতে পারবে। নীচের সারণীর সাহায্য নাও?

চালের পরিমাণ (x) কিগ্রাতে	1	7	14	21	28
চালের মূল্য (y) টাকাতে	3	21	42	63	84
$\frac{x}{y}$-র মান	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

এখানে লক্ষ করো প্রত্যেক ক্ষেত্র $\frac{x}{y}=\frac{1}{3}$

উদাহরণ-2 : 3 মিটার শার্ট কাপড়ের দাম 63 টাকা হলে সেই কাপড় থেকে 4 মিটার, 6 মিটার কাপড় আনলে কাপড়ের জন্য কত টাকা দিতে হবে?

সমাধান-(i) : 3 মিটার কাপড়ের দাম 63 টাকা (x= কাপড়ের দৈর্ঘ্য y= কাপড়ের মূল্য)

$x_1=3$ ও $y_1=63$ এবং $x_2=4$ হলে y_2 নির্ণয় করো।

চলন সূত্র অনুযায়ী: $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ বা $y_2=\frac{x_2 y_1}{x_1}=\frac{4\times 63}{3}=84$

$\therefore$ 4 মিটার শার্ট কাপড়ের দাম 84 টাকা।

(ii) সেরকম $x_1=3$, $y_1=63$, $x_2=6$ হলে y_2 নির্ণয় করো।

চলন সূত্র অনুযায়ী: $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}\rightarrow y_2=\frac{x_2 y_1}{x_1}=\frac{6\times 63}{3}=126$

$\therefore$ 6 মিটার কাপড়ের দাম 126 টাকা।

(iii) $x_1=3$, $y_1=63$, $x_2=8$ হলে y_2 নির্ণয় করব,

চলন সূত্র অনুযায়ী $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}\rightarrow x_1 y_2=x_2 y_1$

$=y_2=\frac{x_2 y_1}{x_1}=\frac{8\times 63}{3}=168$

$\therefore$ 8 মিটার কাপড়ের দাম 168 টাকা হবে।

অনুশীলনী-9 (a)

1. শূন্যস্থান পূরণ করো যেমন $\frac{x}{y}=K$ এবং $K=\frac{1}{2}$

কমলার সংখ্যা (x)	5			9		7	
কমলার মূল্য টাকাতে (y)	10	16	8	36	20		26

2. চলন সূত্র প্রয়োগে নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও।

(a) 3টি কাঁচাকলার দাম 15 টাকা হলে

(i) 12টি কাঁচাকলার মূল্য কত? (ii) 25 টাকাতে কতগুলি কলা মিলবে?

(b) একজন শ্রমিকের দৈনিক মজুরি 140 টাকা হলে

(i) তবে 5 দিনের মজুরি কত?

(ii) 840 টাকা মজুরির জন্য সে কতদিন কাজ করবে?

3. সমান আকারে 3টি মোমবাতির দাম 24 টাকা হলে, 120 টাকায় সেই আকারে কতগুলি মোমবাতি পাওয়া যাবে?

4. 6টি খাতার মূল্য 90 টাকা। সেই আকারে 15টি খাতার মূল্য কত? 75 টাকায় কতগুলি খাতা পাওয়া যাবে?

5. বাজারে 2 কিগ্রা আলুর দাম 9 টাকা। তবে 5 কিগ্রা আলুর মূল্য কত? 27 টাকায় কত পরিমাণ আলু পাওয়া যাবে?

6. একটি স্কুটার 3 ঘণ্টায় 120 কিমি রাস্তা যেতে পারে। সেই বেগে 8 ঘণ্টায় কত পথ যাবে এবং এবং সেই বেগে 200 কিমি পথ যেতে কত সময় লাগবে?

7. মুরগির ডিমের ডজন 15 টাকা হলে, 6টি ডিমের দাম কত? 10 টাকায় কতগুলি ডিম পাওয়া যাবে?

8. 15 কিমি বাসে যাওয়ার জন্য 2 টাকা 25 পয়সা ভাড়া লাগে। সেই বাসে 80 কিমি পথ যেতে কত ভাড়া লাগবে?

9. একটি স্কুটার 45 কিমি পথ যেতে 1 লিটার পেট্রোল আবশ্যক করে। সেই স্কুটারে 225 কিমি পথ যেতে কত পেট্রোল আবশ্যক?

10. একটি পরিবারে এক সপ্তাহে খাওয়া খরচ 1050 টাকা। উক্ত পরিবারে সদস্য সংখ্যা অপরিবর্তিত হলে 2009 সালে ফেব্রুয়ারি মাসে খাওয়া খরচ কত হবে?

11. 5 লিটার খাওয়ার তেলের দাম 300 টাকা হলে মাসে 12 লিটার তেল খরচ করে থাকা ছাত্রাবাসের মাসিক তেল বাবদে কত খরচ দিতে হবে?

12. 50টি খবরের কাগজ বিক্রি করলে একজন বিক্রেতা 18 টাকা কমিশন পেয়ে থাকে। সে কতটি কাগজ বিক্রি করলে 54 টাকা কমিশন পাবে? 300টি খবরের কাগজ বিক্রি করলে তাতে কত কমিশন পাওয়া যাবে?

9.2 প্রতিলোমী চলন (Inverse Variation) :

যদি দুটি রাশি মধ্যে সলখ চলনের সম্বন্ধ থাকে, তবে একটির বৃদ্ধি হলে অন্যটির বৃদ্ধি হয়। বা একটির হ্রাস হলে অন্যটির হ্রাস হয়। কিন্তু এরকম কয়েকটি রাশি আছে, যেখানে একটির বৃদ্ধি অন্যটির হ্রাসের কারণ হয়ে থাকে বা একটির হ্রাস, অন্যটির বৃদ্ধির কারণ হয়ে থাকে। এইজন্য কেবল পরিস্থিতি সম্বন্ধে আলোচনা করব।

পরিস্থিতি-3 :

ঘণ্টাপ্রতি 60 কিমি বেগে গিয়ে থাকা একটি মোটর গাড়ি 1200 কিমি পথ অতিক্রম করার জন্য 20 ঘণ্টা সময় নেয়। তবে 40 কিমি প্রতি ঘণ্টা বেগে গিয়ে থাকা উক্ত গাড়িটি সেই পথ অতিক্রম করার জন্য কত সময় নেবে?

এখানে তুমি উত্তর নিশ্চিত ভাবে 30 ঘণ্টা হবে। এখান থেকে স্পষ্ট হবে যে, গাড়িটির ঘণ্টা প্রতি বেগ কমার জন্য নির্দিষ্ট পথ অতিক্রম করার জন্য বেশি সময় লাগবে। নীচের সারণীকে অনুধ্যান করো। মোটর গাড়ির ঘণ্টা প্রতি বেগে প্রতি কিমি নির্দিষ্ট পথ অতিক্রম করার জন্য লেগে থাকা সময়কে উক্ত সারণীতে দেখানো গেছে।

মোটরগাড়ির বেগ	60	50	40	30	20	10
1200 কিমি পথ অতিক্রম করার জন্য আবশ্যক সময় ঘণ্টায়	20	24	30	40	60	120

উক্ত সারণীতে স্পষ্ট যে গাড়ির বেগ বৃদ্ধি ঘটলে পথ অতিক্রম করার আবশ্যক সময়ের হ্রাস ঘটছে। এবং বেগের হ্রাস ঘটলে অতিক্রান্ত সময়ের বৃদ্ধি ঘটছে।

প্রদত্ত চলরাশিদ্বয়ের মধ্যে সম্বন্ধকে লক্ষ করো। প্রত্যেক ক্ষেত্রে চলরাশিদ্বয়কে দেখানো সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল সমান হচ্ছে। অর্থাৎ $60\times20 = 50\times24 = 40\times30 = ... = 1200$

পরিস্থিতি-4

অন্য একটি পরিস্থিতি সম্বন্ধে আলোচনা করব। একটি কাজকে 8 জন লোক 3 দিনে শেষ করে। সেই কাজকে 6 জন লোক, 4 জন লোক ও 2 জন লোক কত কত দিনে শেষ করতে পারবে? তোমার উত্তর হবে 6 জন, 4 জন, 2 জন লোক উক্ত কাজকে যথাক্রমে 4 দিন, 6 দিন ও 12 দিনে শেষ করতে পরবে।

এখানে চলরাশিদ্বয় (লোক সংখ্যা ও আবশ্যক দিনসংখ্যা) মধ্যে একটির বৃদ্ধি/ হ্রাস, অন্যটির হ্রাস/ বৃদ্ধি ঘটানোর কারণ হচ্ছে।

বর্তমান তথ্যগুলিতে সারণীতে উপস্থাপন করলে পাব।

লোকসংখ্যা (x)	8	6	3	2
নির্দিষ্ট কার্য স্থাপন জন্য আবশ্যক সময় দিনে (y)	3	4	8	12
x×y	24	24	24	24

রাশিদ্বয় x ও y হলে প্রত্যেক ক্ষেত্রে $xy=24$ অর্থাৎ $xy=k$।

উপরোক্ত দুটি ক্ষেত্রে একটি রাশির বৃদ্ধি ঘটলে অর্থাৎ রাশির হ্রাস ঘটে বা প্রথম রাশির হ্রাস হলে দ্বিতীয় রাশির বৃদ্ধি ঘটে। চলরাশিদের মধ্যে থাকা এই সম্বন্ধকে প্রতিলোমী চলন বলে। এমন অনেক উদাহরণ নেওয়া যায়।

যদি x ও y চলরাশি হয় এ সম্বন্ধে আমরা লিখি $x\propto\frac{1}{y}$ এবং আমরা পড়ি ‘x Varies inversely as y’

মনে রাখো: যদি $x\propto\frac{1}{y}$ হবে তবে $x=\frac{K}{Y}$ বা $xy=k$ হবে। x-এর মান x_1থেকে x_2-তে এবং y-র মান y_1 থেকে y_2-তে পরিবর্তিত হলে উপরোক্ত সম্বন্ধ অনুযায়ী

$xy=x_1y_1=x_2y_2=k$ অথবা $x_1y_1=x_2y_2$ হবে।

নিজে করো

1. নীচের সারণীকে দেখে x ও y চলরাশিদ্বয়ের বিপরীত চলনে আছে কী না পরীক্ষা করে দেখো।

(a)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(b)

x-	100	200	300	400
y-	60	30	20	15

(c)

x-	90	60	45	30	20	5
y-	10	15	20	25	30	35

সূচনা-প্রত্যেক ক্ষেত্রে xy-র মান নির্ণয় করো।

2. x ও y চলরাশিদ্বয় প্রতিলোমী চলনের অন্তর্ভুক্ত। নীচের সারণী থেকে p ও q-র মান স্থির করো।

x-	6	5	q
y-	80	p	24

সূচনা : $x_1y_1=x_2y_2=x_3y_3=k$ সূত্রের সাহায্যে p ও q-র মান স্থির করো।

উদাহরণ-3 : একটি ছাত্রাবাসে 20 জনের জন্য 15 দিনের খাদ্য ছিল। সেই খাদ্যে 30 জন ছাত্রের কতদিন চলবে?

সমাধান: এখানে $x_1 = 20$ জন $\quad y_1 = 15$ দিন

$x_2 = 30$ জন, $\quad y_2$ নির্ণয় করতে হবে।

এখানে চলরাশিদ্বয়ের প্রতিলোমী চলনের অন্তর্ভুক্ত। অর্থাৎ

এখানে $x \propto \frac{1}{y}$ তাই সুত্র অনুসারে $x_1y_1=x_2y_2 \rightarrow 2\times15=30y_2 \rightarrow y_2=\frac{20\times15}{30}=10$

অর্থাৎ উক্ত খাদ্যে 30 জন ছাত্রের 10 দিন চলে যাবে।

উদাহরণ-4 : একটি নর্দমা খুলতে 12 জন মজুর 10 দিন সময় নেয়। সেই নর্দমাকে 4 দিনে খুলতে কত মজুর আবশ্যক?

সমাধান:

এখানে $x_1=12$ জন ও $y_1=10$ দিন

$y_2=4$ দিন হলে x_2-র মান স্থির করো।

এখানে চলরাশিদ্বয়ে বিপরীত চলনের অন্তর্ভুক্ত।

অর্থাৎ $x \propto \frac{1}{y}$ সূত্র অনযায়ী $x_1y_1=x_2y_2 \rightarrow x_2 = \frac{x_1y_1}{y_2} = \frac{12\times10}{4} = 30$

$\therefore$ নর্দমাটিকে 4 দিনে খুলতে 30 জন মজুর লাগবে।

অনুশীলনী-9 (b)

1. নীচে চলরাশিদের মধ্যে কোনটি সলখ চলন ও কোনটি প্রতিলোমী চলন সম্বন্ধীয়?

(i) কমলা সংখ্যা x ও তার মূলা y টাকা।

(ii) পারিশ্রমিক x টাকা ও শ্রম সময় y দিন।

(iii) নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করার সময় x ঘণ্টা ও বেগ y কিমি প্রতি ঘণ্টা।

(iv) নির্দিষ্ট কাজ সম্পন্ন করে থাকা শ্রমিক সংখ্যা x ও শ্রম সময় y ঘণ্টা।

(v) সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x মিটার ও প্রস্থ y মিটার।

(vi) একটি ঘর রং করার জন্য শ্রমিক সংখ্যা x ও কার্য বেশি করার জন্য y দিন।

(vii) একটি মোমবাতি দৈনিক x ঘণ্টা জ্বালালে y দিন যাবে।

2. একটি নির্দিষ্ট কার্য সমাপ্ত করার জন্য নীচের সারণীতে শূন্যস্থানগুলি পূরণ করো।

শ্রমিক সংখ্যা (x)	20	15		30	
দিন সংখ্যা (y)	6		12		3
xy=k					

3. প্রদত্ত সারণীদের থেকে কোনগুলি প্রতিলোমী চলনের অন্তর্গত?

(i)

X-	12	8	32
Y-	16	24	6

(ii)

X-	5	10	15	20
Y-	8	16	24	32

(iii)

X-	7	9	11	13
Y-	56	72	88	104

(iv)

X-	30	40	20	24
Y-	12	9	18	15

4. একটি শ্রেণীগৃহে 30 জন ছাত্র বসলে জন পিছু 4 বর্গমিটার স্থান মিলে। যদি সেই শ্রেণীতে আর 15 জন ছাত্র নাম লিখিয়ে থাকলে, তবে জন পিছু কত বর্গমিটার স্থান কমে যাবে?

5. একটি স্কুল ঘর রঙ করার জন্য 6 জন শ্রমিক 15 দিন নেবে। তবে কাজটি 5 দিনে শেষ করার জন্য কত বেশি শ্রমিক আবশ্যক?

6. আংশুমানের জন্মদিনে তার 6 জন বন্ধু এসেছিল। প্রত্যেক বন্ধুর জন্য 10টি চকোলেটের ব্যবস্থা ছিল। কিন্তু তার আরও 4 জন বেশি বন্ধু এসে পৌঁছাল। তবে প্রত্যেকে কয়টি করে চকোলেট পাবে?

7. কটি কার্যের অর্ধেককে 12 জন শ্রমিক 15 দিনে শেষ করে। পুরো কাজটিকে 30 জন শ্রমিক কত দিনে শেষ করবে?

8. নির্দিষ্ট পরিমাণ বঁদেতে 50 পয়সা মূল্যে 100টি মিষ্টি তৈরি হয়। তবে সেই বঁদেতে দুটাকা মূল্যের কতটি মিষ্টি তৈরি হবে?

9. সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট তিনটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 24, 12 ও 8 মিটার হলে (i) তাদের অন্য বাহুর দৈর্ঘ্য স্থির করো। (ii) আয়তক্ষেত্রে তিনটি প্রস্থদের অনুপাত স্থির করো। প্রথম প্রশ্নর একাধিক উত্তর সম্ভব কি? যদি সম্ভব হয় কেন?

10. একটি বন্যা অশ্রয়স্থলে 120 জন লোকের জন্য 9 দিনের চিঁড়ে ও গুড়ের ব্যবস্থা ছিল। সেখানে আশ্রয় নেওয়ার জন্য 180 জন লোক আসল। সেই খাদ্য তাদের কত দিন যাবে?

11. রবি সাইকেলে 10 কিমি প্রতিঘণ্টা বেগে গিয়ে স্কুলে 12 মিনিটে পৌঁছায়। সে তার ঘণ্টাপ্রতি বেগ আর 2 কিমি বাড়ালে স্কুলে কত সময়ে পৌঁছাবে? ঘর থেকে তার স্কুল কত দূরে?

9.3 যৌথ চলন (Joint Variation) :

যৌথ চলন সংজ্ঞা দেখার আগে আমরা এক পরিস্থিতির কিছু অভিজ্ঞতা হাসিল করব।

পরিস্থিতি-5 :

মনে করো একটি আয়তচিত্রের দৈর্ঘ্য L একক প্রস্থ b একক ও ক্ষেত্রফল A বর্গএকক। ∴LB=A

(i) b-র মানকে স্থির রাখা যাক। এই পরিস্থিতিতে L-র মান বৃদ্ধি ঘটলে A-র মান বৃদ্ধি পায়। L-র মান হ্রাস হলে A-র মান হ্রাস ঘটে। তাই A (ক্ষেত্রফল) ও L (দৈর্ঘ্য) সলখ চলনে থাকছে, একে সংকেত মাধ্যমে প্রকাশ করলে আমরা লিখব $A \propto L$।

(ii) বর্তমান L-র মানকে স্থির রাখলে আমরা দেখব A-র মান বাড়বে যদি b-র মান বাড়ে এবং A-র মান কমবে যদি b-র মান কমবে তাই A ও b সলখ চলনে অন্তর্ভুক্ত।

(iii) যদি L ও b উভয়ে পরিবর্তিত হয় তবে A-র মধ্য পরিবর্তন ঘটবে। A, L ও b মধ্যে থাকা এই সম্পদকে যৌথ চলন বলে সংকেত মাধমে একে নীচে প্রকাশ করা যায়।

$\boxed{A \propto Lb}$ **(যখন L ও b পরিবর্তনশীল)**

নিজে করো : 15 সে. মি দৈর্ঘ্য ও 12 সে.মি প্রস্থ আয়তক্ষেত্রে উপরোক্ত চলনগুলির সত্যতা নিরূপণ করতে চেষ্টা করব।

এসো আমরা উপরোক্ত (i), (ii) ও (iii)-র উপস্থাপিত ধারণাকে আর এক দিকে বিশ্লেষণ করব।

(iv) A-র মূল্যকে স্থির রাখা যাক যেহেতু $L=\frac{A}{b}$ প্রস্থ (b)-কে বৃদ্ধি পেলে L দৈর্ঘ্য হ্রাস পাবে এবং প্রস্থ (b) হ্রাস পেলে দৈর্ঘ্য (L) বৃদ্ধি পায়। তাই L ও b প্রতিলোমী চলন অন্তর্ভুক্ত। একে সংকেতে মাধ্যমে লিখব $L \propto \frac{1}{b}$।

(v) পুনশ্চ প্রস্থ (b)-কে স্থির রাখলে দৈর্ঘ্য (L) হ্রাস বৃদ্ধি ক্ষেত্রফল (A) হ্রাস বৃদ্ধি উপরে নির্ভর করে।

এই পরিস্থিতিকে আমরা সংকেত মাধ্যমে লিখব $L \propto A$।

(vi) যদি ক্ষেত্রফল (A) ও প্রস্থ (b) উভয়ে পরিবর্তিত হয়, তবে দৈর্ঘ্য (l)-র মধ্য পরিবর্তন ঘটে। A-র মান বৃদ্ধি ও b-র মান হ্রাস হলে l-র মান বৃদ্ধি হয়। সেরকম A-র মান হ্রাস ও b-র মান বৃদ্ধি হলে l-র মান হ্রাস হয়।

এই পরিস্থিতিকে আমরা নিম্ন সংকেত মাধ্যমে প্রকাশ করে থাকি।

$L \propto \frac{A}{b}$ **(যখন A ও b উভয় পরিবর্তনশীল)**

L, A ও b এ এই সম্বন্ধে মধ্য একটি যৌথ চলন।

এই প্রকার যৌথ চলন সম্বন্ধে সবিশেষ বিবরণী পরবর্তী শ্রেণীতে পেতে পারবে।

সংজ্ঞা—তিন বা ততোধিক অনশূন্য চলরাশি মধ্যে একটি রাশি অন্য রাশিদের গুণফল সঙ্গে সলখ চলন থাকলে, প্রথম রাশিটি অন্য রাশিদের সঙ্গে যৌথ চলনে থাকবে।

মনে করো x, y ও z তিনটি অনশূন্য চলন রাশি।

(i) যদি $x \propto y$ (z অপরিবর্তিত) ও $x \propto z$ (y অপরিবর্তিত) তবে $x \propto y$ (y ও z উভয় পরিবর্তনশীল) এক্ষেত্রে x, y ও z সাথে যৌথ চলনে থাকছে বলে বলব।

(ii) যদি $x \propto y$ (z অপরিবর্তিত) এবং $x \propto \frac{1}{y}$ (y অপরিবর্তিত) তবে $x \propto \frac{y}{z}$ (y ও z উভয়ে পরিবর্তনশীল) এটি মধ্য x সাথে y ও z একটি যৌথ চলন।

মনে রাখো

যদি x_1 ও x_2-র দুটি নির্দিষ্ট মান y_1, y_2, y-র নির্দিষ্টমান এবং z_1, ও z_2, z-র দুটি নির্দিষ্ট মান হয়–

যৌথ চলন $x \propto y_2$ জন্য হবে $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \times \frac{z_1}{z_2}$ ....সূত্র (i)

যৌথ চলন $x \propto \frac{y}{2}$ জন্য $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \times \frac{z_2}{z_1}$ ....সূত্র (ii)

যৌথ চলনের প্রয়োগ

উদাহরণ-5 : 12 জন লোক 120 মিটার লম্বা একটি রাস্তা 36 দিনে শেষ করতে পারে। তবে 48 জন লোক 240 মিটার লম্বা রাস্তাকে কত দিনে শেষ করবে?

সমাধান :

লোকসংখ্যা (x)	রাস্তার দৈর্ঘ্য (y)	দিনসংখ্যা (z)
x_1=12	y_1=120 মি.	z_1=36 দিন
x_2=48	y_2=240 মি.	z_2=?

এখানে লোক সংখ্যা অধিক হলে নির্দিষ্ট কাজ অল্পদিনে শেষ হবে, যদি রাস্তার দৈর্ঘ্য (y) স্থির থাকবে।

x ও z প্রতিলোমী চলনে অন্তর্ভুক্ত হবে। $Z \propto \frac{1}{x}$ (y স্থির) (i)

লোকসংখ্যা স্থির থেকে রাস্তার দৈর্ঘ্য বেশি হবে রাস্তার কাজ শেষ করার জন্য বেশি সময় আবশ্যক।

∴ y ও z সলখ চলন অন্তর্ভুক্ত হবে। ∴ $Z \propto y$ (x) স্থির ..(ii)

(i) ও (ii) থেকে পাব $Z \propto \frac{y}{x}$ (x ও y উভয়ে পরিবর্তনশীল)

$\therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{y_1}{y_2} \times \frac{x_2}{x_1}$ হবে সূত্র (2)

$\rightarrow z_2 = \frac{x_1 \times y_2 \times z_1}{x_2 \times y_1} \rightarrow z_2 = \frac{12 \times 240 \times 36}{48 \times 120} = 18$

∴18 দিনে অবশিষ্ট কার্য শেষ হবে। (উত্তর)

উদাহরণ-6 : 6 জন পরীক্ষক 40 ঘণ্টাতে 750টি খাতা দেখতে পারে, তবে 4 জন পরীক্ষক কত ঘণ্টায় 800টি খাতা দেখতে পারবে?

সমাধান : (x) পরীক্ষক সংখ্যা (y) সময় ঘণ্টাতে (z) খাতা সংখ্যা

$x_1=6$ $y_1=40$ $z_1=750$

$x_2=4$ $y_2=?$ $z_2=800$

এখানে খাতা সংখ্যা স্থির রাখতে খাতা দেখার সময় ও পরীক্ষক সংখ্যা প্রতিলোমী চলনে অন্তর্ভুক্ত হবে।

অর্থাৎ $y \propto \frac{1}{A}$ হবে (i)

পরীক্ষক সংখ্যা স্থির থাকলে খাতা দেখার সময় ও খাতা সংখ্যা সলখ চলন অন্তর্ভুক্ত হবে।

$\therefore y \propto z$ হবে (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাব x, y ও z মধ্যে থাকা চলন যৌথ চলন হয়ে থাকায় $y \propto \frac{z}{x}$ হবে।

$\frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \times \frac{x_2}{x_1} \to y_2 = \frac{x_1 y_1 z_2}{z_1 x_2} \to y_2 = \frac{6 \times 40 \times 800}{750 \times 4} = 64$ ঘণ্টা

$\therefore$ 4 জন পরীক্ষক 800 খাতা দেখার জন্য 64 ঘণ্টা সময় নেবে।

অনুশীলনী-9 (c)

1. 5 জন শ্রমিক 8 দিনে 1600 টাকা রোজগার করে তবে 8 জন শ্রমিক কত দিনে 2000 টাকা রোজগার করবে?
2. 10 জন শ্রমিক 6 দিনে একটি ঘর তৈরি করে। এরকম 4টি ঘরকে 12 জন শ্রমিক কত দিনে শেষ করবে?
3. 12 জন শ্রমিক 15 দিনে 150 মিটার রাস্তা তৈরি করতে পারে। তবে 18 জন শ্রমিক কতদিনে 300 মিটার রাস্তা তৈরি করবে?
4. 10 জন পরীক্ষক 8 দিনে 2000 খাতা দেখতে পারে। তবে 12 জন পরীক্ষক কতদিনে 3000 খাতা দেখতে পারবেন?
5. 6 জন তাঁতী 8 দিনে 144 মিটার কাপড় বুনতে পারবে। 12 জন তাঁতী 9 দিনে কত মিটার কাপড় বুনতে পারবে?
6. 8 জন দরজি 12 দিনে 360টি শার্ট তৈরি করতে পারে। 15 দিনে 450টি শার্ট তৈরির জন্য কতজন দরজি আবশ্যক?
7. 2টি জল পাম্প 5 ঘণ্টায় 3টি কূপের জল টানতে পারে, তবে 4টি জল পাম্প কত ঘণ্টায় সেই আকারে 12টি চৌবাচ্চায় জল টানতে পারবে?
8. একটি কাজকে 25 জন লোক দৈনিক 6 ঘণ্টা পরিশ্রম করে 18 দিনে শেষ করতে পারে। সেই কাজটিকে 20 জন লোক দৈনিক 5 ঘণ্টা পরিশ্রম করে কত দিনে শেষ করবে?

⌘⌘⌘⌘⌘

তথ্য পরিচালনা এবং লেখচিত্র (DATA HANDLING AND GRAPHS)

অধ্যায় ১০

10.1 উপক্রমণিকা (Introduction) :

দৈনন্দিন জীবনে তুমি বিভিন্ন ক্ষেত্রে যথা- কৃষি, শিল্প, স্বাস্থ্য, শিক্ষা, অর্থনীতি, বাণিজ্য, প্রতিরক্ষা আদিক্ষেত্রে কিছু সূচনা পেয়ে থাকো। প্রত্যেক দিন খবরের কাগজের পৃষ্ঠা এবং অন্যান্য গণমাধ্যমে মধ্য বিভিন্ন তথ্য বিষয়ে সূচনা পেয়ে থাকো। উক্ত তথ্যগত ধারণা থেকে আধার করে কয়েকটি সরকারি তথা বেসরকারি সংস্থাদের উপরোক্ত ক্ষেত্রগুলি কোনো সংস্কার তথা অভিবৃদ্ধি অনুশীলন করে থাকে। এর জন্য তথ্যাবলী সংগ্রহ করে এগুলি স্বতন্ত্র উপস্থাপনশৈলী মাধ্যমে ব্যাখ্যা এবং বিশ্লেষণ করে নির্দিষ্ট ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট সিদ্ধান্তে পৌঁছোতে প্রয়াস করে থাকে।

10.2 তথ্যাবলী (Data) :

কয়েকটি ক্ষেত্রে তথ্যাবলী মাধ্যমে আমরা উপরোক্ত ক্ষেত্র সম্বন্ধীয় সূচনা পেয়ে থাকি। নীচে দেওয়া কতকগুলি উদাহরণ দেখো।

(ক) তোমার শ্রেণীতে গত বছরে বার্ষিক পরীক্ষা গণিত উত্তীর্ণ হয়ে থাকা ছাত্র সংখ্যা এবং ছাত্রী সংখ্যা।

(খ) গতমাসে তোমার বন্ধুদের পড়ে থাকা গল্প বইয়ের সংখ্যা।

(গ) গত সপ্তাহে তোমার শ্রেণীতে প্রত্যেক দিনের বিদ্যার্থী উপস্থাপনা ইত্যাদি।

উপরোক্ত প্রত্যেক ক্ষেত্রে তথ্য বিভিন্ন মাধ্যমে হস্তগত হয়ে থাকে। এই প্রকার প্রত্যেক তথ্যকে **সাংখ্যক তথ্য (Numerical data)** বলে।

মনে রাখো : সংখ্যাক তথ্য মাধ্যমে কোনো বিষয়গত সূচনা পাওয়া যায়।

কোনো নির্দিষ্ট লক্ষকে চোখের আগে রেখে, কোনো ব্যক্তি সংস্থা বা প্রতিষ্ঠান থেকে তথ্য সংগ্রহকারী প্রত্যক্ষভাবে তথ্য সংগ্রহ করে থাকে। এই প্রকার তথ্যকে প্রাথমিক তথ্য (Primary data) বলে।

উদাহরণস্বরূপ তোমার স্কুলের প্রধান শিক্ষক শ্রেণী শিক্ষকের মাধ্যমে তোমার শ্রেণীতে প্রত্যেক ছাত্র কিংবা ছাত্রীদের গণিত বিষয়ে গত পরীক্ষা রেখে থাকা মার্কস জানতে পারবে। এখন প্রত্যক্ষভাবে শ্রেণী শিক্ষক মাধ্যমে তোমার শ্রেণীতে ছাত্রছাত্রীদের গণিত পরীক্ষা সম্বন্ধীয় সূচনা পেতে পারবে। এখানে গণিতে রেখে থাকা মার্কস এক সংখ্যিক তথ্য আছে।

মাত্র অন্য কয়েকটি ক্ষেত্রে সময়, সুবিধা বা অর্থাভাবকে তথ্য সংগ্রহকারীদের মাধ্যমে তথ্য সংগ্রহ না করে পুস্তকাগার, সরকারি কাগজপত্র, খবরের কাগজ ও টেলিভিশনে প্রচারিত খবরকেও বিভিন্ন তথ্য সংগ্রহ করা হয়ে থাকে। এই তথ্যগুলিকে পরোক্ষ তথ্য (Secondary data) বলে।

10.3 তথ্যাবলীর সজ্জীকরণ (Organisation of Data) :

আমরা প্রত্যক্ষ বা পরোক্ষ ভাবে সংগ্রহ করার পরে একে লিপিবদ্ধ করা বা নির্দিষ্ট লক্ষ্য সাধনের জন্য সাজিয়ে রাখার আবশ্যকতা পড়ে। নীচের উদাহরণকে লক্ষ করো।

মনে করো শ্রেণী শিক্ষক শ্রেণীতে 30 জন ছাত্রের জন্য পোশাক বরাত দিল। তার জন্য তাদের প্রত্যেক ছাত্রদের উচ্চতা জানা দরকার। তাই প্রত্যেক ছাত্রকে জন জন করে ডেকে তাদের উচ্চতা (সেমি) মাপ লিখে রাখলাম। সে মাপ সেমিগুলি হল

সারণী-1

148, 150, 152, 151, 152, 152, 149, 150, 148, 148, 150, 151, 151, 152, 148, 149, 148, 149, 150, 151, 150, 152, 152, 152, 149, 150, 149, 149, 150

(i) সব থেকে লম্বা পোশাকের সাইজ সেমি কত?

(ii) সব থেকে ছোট পোশাকের সাইজ সেমিতে কত?

মেরী এ সমস্ত প্রশ্নের উত্তর দেওয়ার জন্য প্রস্তত হল এবং উপরোক্ত তথ্যগুলি নীচে প্রকারে সাজিয়ে রাখল।

সারণী-2

148, 148, 148, 148, 148, 149, 149, 149, 149, 149, 149, 150, 150, 150, 150, 150, 150, 150, 150, 151, 151, 151, 151, 152, 152, 152, 152, 152, 152, 152

বর্তমান উপরোক্ত প্রশ্নদ্বয়ের উত্তর পেতে সুবিধা হল।

বলো দেখি- সব থেকে লম্বা পোশাক সাইজ এবং সব থেকে ছোট অর্থাৎ লম্বা ছোট পোশাকের সাইজ কত?

উত্তরে তুমি বলবে সব থেকে লম্বা পোশাকের সাইজ 152 সেমি হয়ে থাকার সময় সব থেকে ছোট পোশাকের সাইজ 148 সেমি হবে।

যদি তুমি বলবে সব থেকে লম্বা পোশাকের সাইজ 152 সেমি হয়ে থাকা সময় সব থেকে ছোট পোশাকের সাইজ 148 সেমি হবে। যদি তথ্যাবলী থাকা তথ্য সংখ্যা বেশি হয়ে থাকে তবে তথ্যাবলীর উপরোক্ত প্রণালী অবস্থান লেখার কষ্টসাধ্য হয়ে থাকে।

তাই শ্রেণী শিক্ষক নীচে প্রশ্নদ্বয়ের উত্তর পেতে অসুবিধা পড়লে। প্রশ্নদ্বয় হল—

(i) 148 সেমি সাইজের কয়েকটি পোশাক আবশ্যক।

(ii) 149 সেমি সাইজের কয়েকটি পোশাক আবশ্যক।

বর্তমান সোহন নিম্ন প্রকারে তথ্যাবলীর সমস্ত তথ্যকে সাজিয়ে রাখল—

সারণী-3

উচ্চতা সেমিতে	ছাত্র সংখ্যা
148	5
149	6
150	8
151	4
152	7

শ্রেণীতে ছাত্ররা বর্তমানে খুশি হলে এবং শিক্ষক করা প্রশ্নদ্বয়ের উত্তর দেওয়া তাদের জন্য সহজ হলো।

সারণী-3 থেকে জানা যায় যে, শ্রেণীতে 148 সেমি উচ্চতা বিশিষ্ট 5 জন ছাত্র ছিল সসম 149 সেমি উচ্চতা বিশিষ্ট 150 সেমি উচ্চতা বিশিষ্ট 151 সেমি উচ্চতা বিশিষ্ট এবং 152 সেমি উচ্চতা বিশিষ্ট ছাত্রদের সংখ্যা যথাক্রমে 6, 8, 4 ও 7।

এখানে 148, 149, 150, 151 এবং 152 তথ্যগুলি লবধাঙ্ক বলে এবং প্রদত্ত তথ্য সমন্বিত ছাত্র সংখ্যাকে উক্ত লবধাঙ্ক **বারম্বরতা (Frequency)** বলে।

লক্ষ্য করো 148 লবধাঙ্ক বারম্বরতা 5। সেরকম 149, 150, 151 এবং 152 লবধাঙ্কগুলি বারম্বারতা যথাক্রমে 6, 4, 8 এবং 7।

বল দেখি- সর্বধিক বারম্বরতা বিশিষ্ট এবং সর্বনিম্ন বারম্বরতা বিশিষ্ট লবধাঙ্কগুলি কী?

সারণী-3-কে অনুধ্যান করলে পাব সর্বাধিক বারম্বরতা বিশিষ্ট লবধাঙ্ক ও সর্বনিম্ন বারম্বরতা বিশিষ্ট সবধাঙ্কদ্বয়ে যথাক্রমে 149 সেমি ও 151 সেমি।

তথ্য সজ্জীকরণ নিমিত্ত নিম্ন সোপানগুলি মনে রাখো।

- প্রথম সংগৃহীত তথ্যগুলি লিখে তাকে ঊর্ধ্বক্রম ছোট থেকে বড়ো বা অধঃক্রম বড়ো থেকে ছোট লেখা যায়।
- অধিক সংখ্যক লবধাঙ্ক থাকলে সেগুলি ঊর্ধ্ব বা অধঃক্রমে লিখব। সময় সাপেক্ষ হয়ে থাকায় প্রত্যেক লবধাঙ্ক তথ্যাবলীর কতবার থাকছে তাকে বিচারকে নিয়ে লবধাঙ্ক বারম্বরতা নিরূপণ করা গিয়ে থাকে।
- লবধাঙ্ক সহিত বারম্বরতাকে নিয়ে একটি সারণী প্রস্তুত করা যায় যাকে বারম্বরতা **বিতরণ সারণী (Frequency- distribution Table)** বলে।

নিজে করো

(a) নীচে দিয়ে থাকা লবধাঙ্কগুলি ঊর্ধ্বক্রমে সাজাও।

74, 62, 64, 72, 67, 73, 80, 78, 65, 69, 73, 84, 83, 73, 93,
72, 62, 79, 88, 79, 61, 53, 87, 56, 87, 81, 42, 70, 45, 66

(b) প্রদত্ত লবধাঙ্কগুলিকে নিয়ে একটি বারম্বরতা বিতরণ সারণী প্রস্তুত করো।

(c) সারণীকে দেখে নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলি উত্তর দাও।

(i) সর্বনিম্ন লবধাঙ্ক কত?

(ii) সর্বোচ্চ লবধাঙ্ক কত?

(iii) কোন লবধাঙ্কার বারম্বরতা সর্বাধিক?

(iv) কোন লবধাঙ্কার বারম্বরতা সর্বনিম্ন?

(v) লবধাঙ্কদের সংখ্যা কত?

10.4 তথ্য উপস্থাপনা (Presentation of Data) :

এ পর্যন্ত আমরা তথ্য সংগ্রহ এবং তার সজ্জীকরণ সম্বন্ধে কিছু জানলাম। কেবল তথ্য সজ্জীকরণকে সারণীর মাধ্যমে প্রকাশ করলে আমরা তথ্যভিত্তিক সমস্ত প্রশ্নের উত্তর পাওয়ার জন্য সক্ষম হতে পারি না। তার জন্য তথ্য সজ্জীকরণ পরে আমরা এর সফল উপস্থাপন করা দরকার। সাধারণত আমরা তথ্যগুলি গ্রাফ অথবা তথ্যচিত্র মাধ্যমে প্রকাশ করলে তথ্য সম্বন্ধীয় প্রশ্নগুলির উত্তর দেওয়া সহজ এবং বোধগম্য হতে পারবে।

তিন প্রকার গ্রাফ দ্বারা তথ্য উপস্থাপনা হতে পারে। সেগুলি হল—

(i) চিত্রলেখ **(Pictograph / Picture graph)**

(ii) স্তম্ভ লেখ **(Bar graph)** এবং

(iii) বৃত্ত লেখ **(Circle graph / Pie chart)**

10.4.1 চিত্রলেখ (Pictograph) :

সংগৃহীত তথ্যকে চিত্র মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারলে আমরা তাকে চিত্র লেখ বলব।

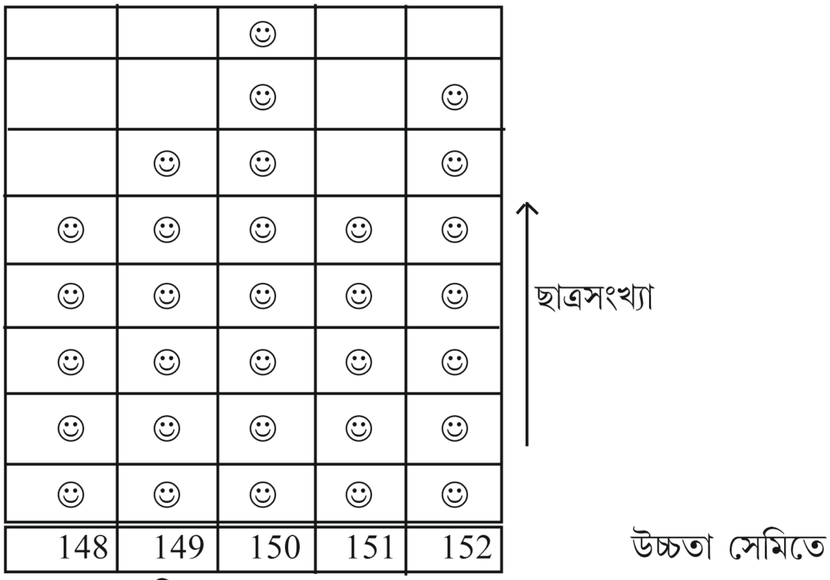
সারণী-3-র তথ্যাবলী থেকে চিত্র মাধ্যমে প্রকাশ করব।

উচ্চতা সেমিতে	ছাত্র সংখ্যা							
148	☺	☺	☺	☺				
149	☺	☺	☺	☺	☺	☺		
150	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
151	☺	☺	☺	☺				
152	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	

চিত্র (10.1)

এখানে একটি ☺ ছবিটি একজন ছাত্রকে বোঝায়।

উক্ত চিত্রলেখকে মধ্য নিম্ন প্রকারে মধ্য উপস্থাপনা করা যায়।



চিত্র-(10.2)

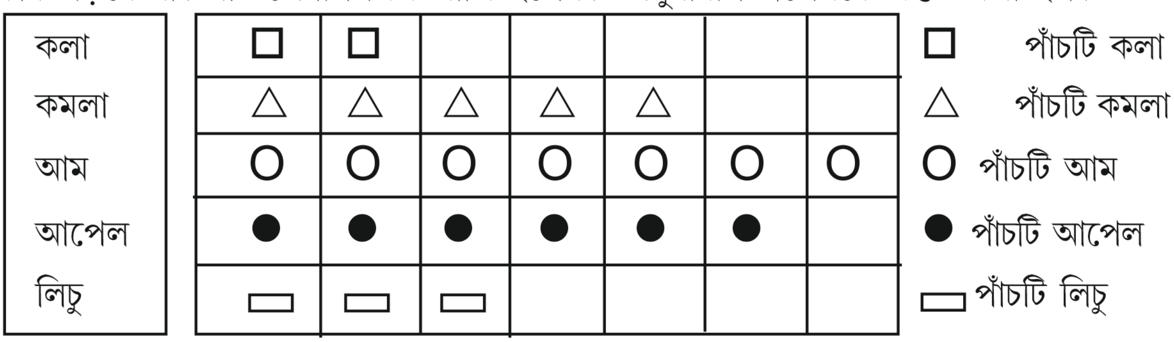
অন্য একটি পরিস্থিতিকে আলোচনা পরিসরে আনব। শ্রেণী শিক্ষক 115 জন ছেলেদের কতটি ফলগুলি প্রতি তাদের আগ্রহ বিষয়ে জিগ্যেস করাতে নিম্নপ্রকারে তাদের সম্মতি পেলাম এবং সেগুলি লিপিবদ্ধ করলাম।

সারণী-4

কলা	কমলা	আম	আপেল	লিচু
10	25	35	30	15

পরমুহূর্তে ছেলেদের উক্ত সারণীতে অন্তর্ভুক্ত তথ্যকে নিয়ে একটি ছবি লেখ করতে বলল। নিহার বলল, স্যার 35 সংখ্যক ফলের জন্য চিত্র করার জন্য একটি বড় কাগজের আবশ্যকতা আছে। আমি কেমন করতে পারব?

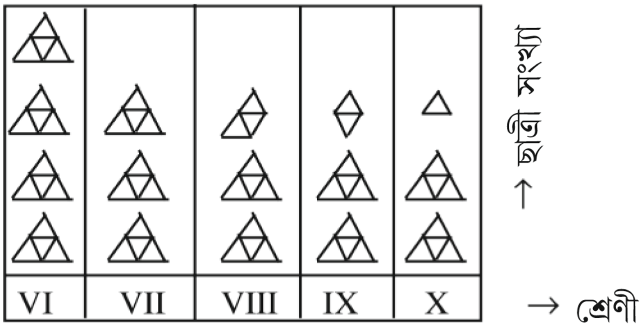
রহিম বলল, স্যার আমার মনে একপ্রকার উপায় এসেছে, যদি প্রত্যেক প্রকার ফলের জন্য থাকা একটি প্রকারের চিত্র সেই প্রকার 5টি ফলকে দেখাবে। তবে আমার চিত্রলেখর জন্য আরও বড় কাগজ দরকার পড়বে না। এটি শ্রেণী শিক্ষক রাজি হলেন। তদনুযায়ী চিত্রলেখকে প্রস্তুত করা হল।



ছাত্রসংখ্যা (10.3)

এসো নীচের চিত্রলেখকে দেখে কতগুলি প্রশ্নের উত্তর পেতে চেষ্টা করব।

এখানে  চিত্রটি চার জন ছাত্রীকে বোঝায়।



(a) কোনো শ্রেণীতে ছাত্রী সংখ্যা সর্বাধিক এবং শ্রেণীর ছাত্রী সংখ্যা কত?

(b) সর্বনিম্ন সংখ্যক ছাত্রী কোন শ্রেণীতে আছে?

(c) অষ্টম শ্রেণীতে কত সংখ্যক ছাত্রী আছে?

(d) সপ্তম এবং দশম শ্রেণীতে থাকা ছাত্রী সংখ্যার অনুপাত কত হবে?

সমাধান :

(a) প্রথম প্রশ্নর উত্তর দিতে গিয়ে সলিম বলল-ষষ্ঠ শ্রেণীতে চিত্র সংখ্যা সর্বাধিক (4) প্রত্যেক চিত্র চারজন ছাত্রীকে দেখাতে থাকার সমুদায় ছাত্রী সংখ্যা $4 \times 4 = 16$

(b) দ্বিতীয় প্রশ্নের উত্তর দিতে গিয়ে বলল ডাকো। বলল-দশম শ্রেণীতে দুটি পূর্ণচিত্র এবং একটি অসম্পূর্ণ চিত্র আছে। অর্থাৎ $4+4+1=9$ জন ছাত্রী আছে।

অন্য শ্রেণীর তুলনায় উক্ত শ্রেণীতে সর্বনিম্ন সংখ্যক ছাত্রী আছে।

(c) তৃতীয় প্রশ্নের উত্তর দিতে গিয়ে নেহা বলল, অষ্টম শ্রেণী দুটি পূর্ণচিত্র সমেত একটি অসম্পূর্ণ চিত্র আছে। অর্থাৎ উক্ত শ্রেণীতে $4+4+3=11$ জন ছাত্রী আছে।

(d) চতুর্থ প্রশ্নের উত্তর দিতে গিয়ে রোহন বলল-

সপ্তম শ্রেণীর ছাত্রী সংখ্যা $3 \times 4 = 12$ এবং দশম শ্রেণীর ছাত্রী সংখ্যা $2 \times 4 + 1 = 9$

অতএব সপ্তম ও দশম শ্রেণীর ছাত্রী সংখ্যার অনুপাত 12:9 অথবা 4:3

10.4.2 স্তম্ভ লেখ (Bar graph) :

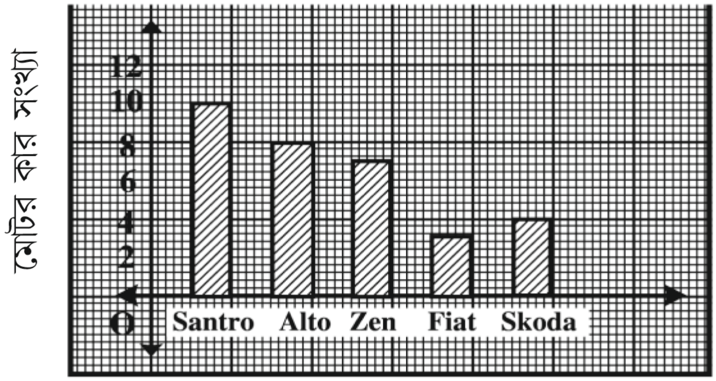
চিত্র লেখ জন্য বিভিন্ন চিত্র অঙ্কণ সময় সাপেক্ষ হয়ে থাকে। এর ব্যতীত চিত্র সংখ্যার আধিক্য মধ্য এক সময় সাপেক্ষ কার্য। এর জন্য স্তম্ভ লেখ মধ্যে তথ্য উপস্থাপন তথ্য অনুশীলন এবং তথ্যর ব্যাখ্যা আমাদের জন্য সহজ হতে পারবে। সম ?? (প্রস্থ) এবং স্তম্ভ স্তম্ভ মধ্যে ব্যবধান সমান থেকে স্তম্ভ লেখ সাধারণভাবে সকল তথ্য উপস্থাপনের জন্য আমার দৃষ্টি আকর্ষণ করে থাকে।

স্তম্ভ লেখ একটি একটি সংখ্যক তথ্যকে ভিত্তি করে অঙ্কিত হয়ে থাকে। যার উচ্চতা তথ্যের বারম্বরতা উপরে নির্ভর করে থাকে। স্তম্ভ লেখকে অনুভূমিক বা উলম্বভাবে অঙ্কন করা যেতে পারে। বর্তমান একটি উদাহরণ মাধমে স্তম্ভ লেখ অঙ্কন প্রণালীকে শেখার জন্য চেষ্টা করব।

উদাহরণ-1 : নীচের সারণী অন্তর্ভুক্ত তথ্যগুলি নিয়ে একটি স্তম্ভ লেখ অঙ্কন করব।

সারণী-5

বিভিন্ন প্রকার মোটরকার	Santro	Alto	Zen	Fiat	Skoda
মোটরকার সংখ্যা	10	8	7	3	4



বিভিন্ন প্রকার মোটর কার

চিত্র (10.5)

স্তম্ভ লেখ অঙ্কনের সোপান সমূহকে অনুসরণ করে নিজে করতে চেষ্টা করো।

- প্রথমে একটি লেখ কাগজ নিয়ে একটি আনুভূমিক এবং উলম্ব রেখা অঙ্কন করো যেমন তারা পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।
- আনুভূমিক রেখার নিম্নভাগে বিভিন্ন প্রকারে মোটরকার এবং উলম্ব রেখার বামদিকে মোটরকার সংখ্যাকে এক নির্দিষ্ট স্কেলকে ভিত্তি করে লেখ।
- আনুভূমিক রেখাতে সমান রেখা বিশিষ্ট স্তম্ভ ও দুটি কক্ষ স্তম্ভ মধ্যে ব্যবধানকে সমান রেখে স্কেল নির্দিষ্ট করে এবং বিভিন্ন কারকে দেখাও। উলম্ব রেখার প্রতি পাঁচটি কিংবা দশটি ছোট ঘরকে এক একক স্কেলে নিয়ে কার সংখ্যাকে দেখাও।
- তার উপরে স্তম্ভ লেখ অঙ্কন করো।

বি.দ্র লেখ বিনা সাহায্যে ঠিক মাপ বিশিষ্ট স্তম্ভ লেখ মধ্য অঙ্কন করা যেতে পারবে। এসো আমরা নিম্ন সারণীতে থাকা তথ্যকে আধার করে একটি আনুভূমিক স্তম্ভ অঙ্কন করব।

উদাহরণ-2 : 1998 থেকে 2002 বছরে ভারত সরকার বাজার থেকে গম কিনেছিল। একে নীচে সারণীতে দেওয়া গেছে।

সারণী-6

গমের পরিমাণ হাজার টাকায়	15	25	20	20	30
বছর সময়	1998	1999	2000	2001	2002

পূর্ব উদাহরণে বর্ণিত সোপানগুলি অনুসরণ করে আনুভূমিক স্তম্ভ লেখ অঙ্কন করো।

নিজে করো সারণী-6 এ দেওয়া তথ্যকে নিয়ে উলম্ব স্তম্ভ লেখ অঙ্কন করো।

স্কেল :
আনুভূমিক রেখাতে
1 একক = 5 হাজার টন

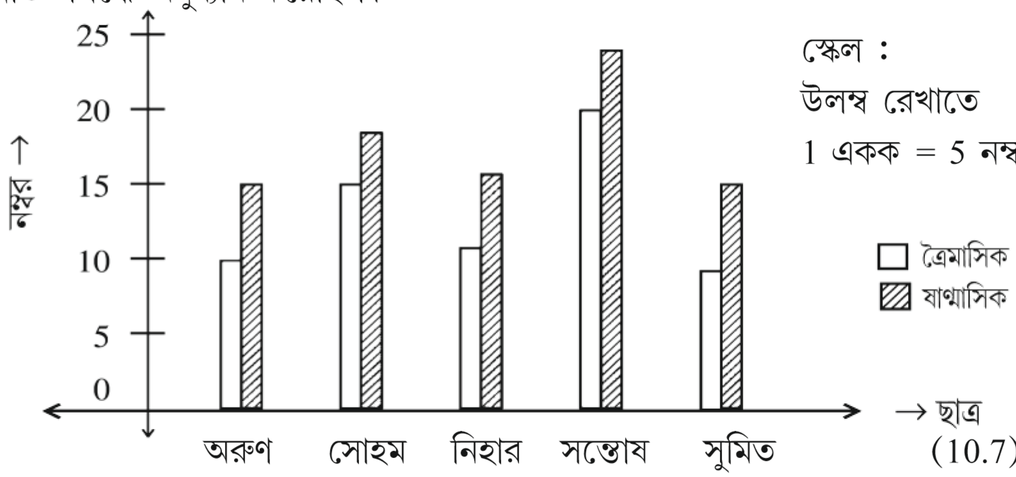
চিত্র (10.6)

উদাহরণ-3 : গণিত বিষয়ে পাঁচজন ছাত্রঙ্ক ক্ষেত্রে শ্রেণী শিক্ষক চলতি বছরের ত্রৈমাসিক এবং যাণ্মাসিক পরীক্ষা ছাত্রের দ্বারা রাখা থাকা মার্ককে নিম্নপ্রকারে লিপিবদ্ধ করে তাদের উন্নতি কিংবা অবনতি সম্বন্ধে অনুধ্যান করে ছিল।

সারণী-7

ছাত্র	অরুণ	সোহম	নিহার	সন্তোষ	সুমিত
ত্রৈমাসিক পরীক্ষা	10	15	12	20	09
যাণ্মাসিক পরীক্ষা	15	18	16	24	15

শ্রেণী শিক্ষক প্রথমে প্রত্যেক ছাত্রের জন্য দুটি কাছাকাছি স্তম্ভলেখ অঙ্কন করে দুটি পরীক্ষাতে তাদের উন্নতি সম্বন্ধে অনুধ্যান করেছিল।



(10.7)

মনে রাখো-দুটি স্তম্ভকে লেগে থাকা তথ্য উপস্থাপন করে থাকলে সে স্তম্ভ লেখকে **দ্বিস্তম্ভ লেখ (Double Bar graph)** বলে।

নিজে করো : একটি ছাত্রের 2008-09 এবং 2009-10 দুই শিক্ষাবর্ষের তার পাঠ বিষয়ে রেখে থাকা মার্কসকে সারণীতে দেওয়া গেছে। একে আধার করে একটি দ্বি-স্তম্ভ লেখ অঙ্কন করো।

বিষয়		ওড়িয়া	গণিত	বিজ্ঞান	সামাজিক বিজ্ঞান	ইংরাজী
বিষয়ে পাওয়া নম্বর	2008-09	55	30	50	35	50
	2009-10	40	60	55	50	30

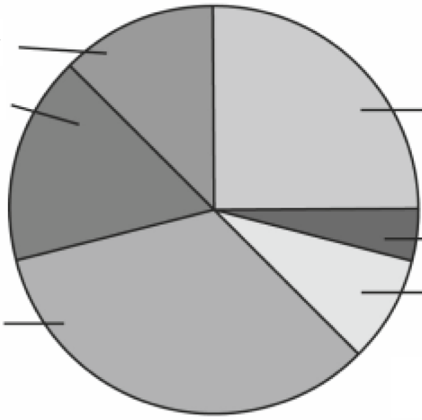
10.4.3 বৃত্ত লেখ (Circle graph / pie chart) :

নিহার সপ্তম শ্রেণীতে তার গ্রামের স্কুলে পড়ার সময়ে স্কুলের দেওয়ালে একটি বৃত্ত মধ্যে আমাদের প্রদেশের সমস্ত জেলা সমষ্টিকে সুন্দরভাবে সাজিয়ে লিখে থাকা দেখেছিল। চিত্র লেখ এবং স্তম্ভ লেখ পড়ার পরে সে হঠাৎ শ্রেণীতে বলেছিল একটি বৃত্ত মধ্যে আমাদের স্কুলের দেওয়ালে লেখা যাওয়ার মতো বিভিন্ন তথ্যকে সাজিয়ে উপস্থাপন করা যেতে পারত তবে কীভাবে হবে? শ্রেণী শিক্ষক নিহার এই কথাকে গ্রহণ করে রমেশকে ডেকে বলল তুমি একটি দিনের সময়কে সাধারণভাবে কীভাবে কাটিয়েছো? রমেশ যা সব বলল শিক্ষক সে সবের তথ্যকে নীচে সারণীতে লিপিবদ্ধ করে রাখলেন।

সারণী-9

দৈনন্দিন কার্যের বিবরণী	স্কুলে উপস্থাপন	নিত্যকর্ম	খেলা	বিশ্রাম	ঘরে পড়া	অন্যান্য কার্য
সময় ঘণ্টাতে	6	1	2	8	4	3

নিহারের বলা অনুসারে শিক্ষক বত্তটি অঙ্কণ করে প্রদত্ত তথ্যকে নিম্ন প্রকারে সাজিয়ে লিখলেন।



চিত্র (10.8)

বৃত্ত মধ্যে প্রত্যেক কার্য বিবরণী সম্বন্ধীয় তথ্যকে উপস্থাপনা করা গিয়ে থাকায় উক্ত চিত্রটিকে বৃত্ত লেখ বলব।

বৃত্ত লেখ কেবল পূর্ণ অংশ প্রত্যেক প্রদত্ত অংশদের এক সম্পর্ককে নিয়ে অঙ্কন করা গেছে। অর্থাৎ দৈনিক বিশ্রাম সময় (8 ঘণ্টা) হচ্ছে। 24 ঘণ্টার এক তৃতীয়াংশ, স্কুলের থাকার সময় (6 ঘণ্টা) হচ্ছে 24 ঘণ্টার এক চতুর্থাংশ, ঘরে পাঠ পড়ার জন্য (4 ঘণ্টা) হচ্ছে 24 ঘণ্টা $\frac{1}{6}$ অংশ এবং খেলার জন্য সময় (2 ঘণ্টা) হচ্ছে 24 ঘণ্টার $\frac{1}{12}$ অংশ ও অন্যান্য কার্যের জন্য সময় (3 ঘণ্টা) হচ্ছে 24 ঘণ্টায় $\frac{1}{8}$ অংশ। মাত্র এখানে বৃত্তটি ছয়টি বৃত্তাকারে বিভক্ত হয়েছে। বৃত্তকলায় আবদ্ধ ক্ষেত্রে পরিমাণ রমেশের দৈনিক কার্য পরিমাণ সঙ্গে সমানুপাতী হয়ে থাকে। নীচের বিশ্লেষণকে দেখো।

(a) স্কুল জন্য সূচিত অংশের পরিমাণ $\frac{6\text{ঘণ্টা}}{24\text{ঘণ্টা}}=\frac{1}{4}$

(b) নিত্য কার্যের জন্য সূচিত অংশের পরিমাণ $\frac{1\text{ঘণ্টা}}{24\text{ঘণ্টা}}=\frac{1}{24}$

(c) খেলার জন্য সূচিত অংশের পরিমাণ $\frac{2\text{ঘণ্টা}}{24\text{ঘণ্টা}}=\frac{1}{12}$

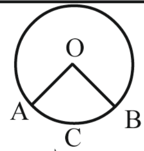
(d) বিশ্রামের জন্য সূচিত অংশের পরিমাণ $\frac{8\text{ঘণ্টা}}{24\text{ঘণ্টা}} = \frac{1}{3}$

(e) ঘরে পাঠ পড়ার জন্য সূচিত অংশের পরিমাণ $\frac{4\text{ঘণ্টা}}{24\text{ঘণ্টা}} = \frac{1}{6}$

(f) অন্যান্য কার্যের জন্য সূচিত অংশের পরিমাণ $\frac{3\text{ঘণ্টা}}{24\text{ঘণ্টা}} = \frac{1}{8}$

মনে রাখো :

- বৃত্তের যেকোনো দুটি ব্যাসার্ধ এবং চাপকে নিয়ে গঠিত চিত্রকে বৃত্তকলা বলে।
- পার্শ্বস্থ চিত্রের OACB এক বৃত্ত কলা চিত্র বসবে OACB
- বৃত্ত কলার সম্পৃক্ত চাপের ডিগ্রি পরিমাণ হচ্ছে 360^0-এর একটি ভগ্নাংশ সাথে সমান।
- একটি বৃত্তে সমস্ত বৃত্তকলা সহিত সম্পৃক্ত চাপদের ডিগ্রি পরিমাপের সমষ্টি 300^0 হবে।



মোহিত শিক্ষককে জিজ্ঞেস করল বৃত্তের ছয়টি বৃত্তকলা সে কেমন করে অঙ্কন করতে পারবে। শিক্ষক বলল যদি বৃত্তকলাকে কেন্দ্রীয় কোণের পরিমাপ জানতে পারব তবে অতি সহজে আমরা বৃত্তকলাগুলি পেতে পারব। (এসো দেখবো বৃত্তাকার কোণদের পরিমাণ পাব কেমন)

সারণী-10

রমেশের একটি দিনের কার্যাবলী	সময় ঘণ্টায়	আনুপাতিক অংশ (ভগ্ন সংখ্যায়)	360^0 আনুপাতিক অংশ (ডিগ্রিতে)
বিশ্রাম	8	$\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$	360^0 র $\frac{1}{3}$ $=120^0$
নিত্যকর্ম	1	$\frac{1}{24}$	360^0 র $\frac{1}{24}$ $=15^0$
স্কুল উপস্থাপন	6	$\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$	360^0 র $\frac{1}{4} = 90^0$
ঘরে পাঠ পড়া	4	$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$	360^0 র $\frac{1}{6} = 60^0$
খেলা	2	$\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$	360^0 র $\frac{1}{12} = 30^0$
অন্যান্য কার্য	3	$\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$	360^0 র $\frac{1}{8} = 45^0$
সমুদায়	24 ঘণ্টা		কোণদের পরিমাণের সমষ্টি 360^0

শিক্ষক বর্তমান মোহিতকে ডেকে বৃত্ত লেখ অঙ্কন সমস্ত সোপানগুলি বুঝিয়ে লেখ।

সোপান :

- এক নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্ত অঙ্কন করো।
- বৃত্তর কেন্দ্রে প্রত্যেক কার্য বা সূচনা অনুযায়ী আবশ্যক বৃত্তকলার কেন্দ্রীয় কোণের পরিমাণ স্থির করো।
- প্রোটেক্টর সাহায্যে কেন্দ্রে কোণদের অঙ্কন করে বৃত্তকলাগুলিকে কার্য বা সূচনা অনুযায়ী সাজাও।

নিজে করো : একটি ছাত্রাবাসে থাকা ছাত্রদের বলতে পারা ভাষাদের নিয়ে একটি সারণী প্রস্তুত করা গিয়েছে। উক্ত তথ্যগুলি আধার করে একটি বৃত্ত লেখ অঙ্কন করো।

সারণী-11

ভাষা	ওড়িয়া	হিন্দি	ইংরাজী	সংস্কৃত
ছাত্রসংখ্যা	18	9	6	3

10.5 ভাগ বিভক্ত বারম্বরতা বিতরণ (Groupped Frequency Distribution) :

মনে করো একটি শ্রেণীতে পড়ে থাকা 30 জন ছেলেদের গণিত বিষয়ে পরীক্ষা করা হল। পূর্ণসংখ্যা 50 থেকে তাদের প্রাপ্তঙ্ক নীচে দেওয়া গেছে।

19, 14, 10, 12, 24, 29, 34, 10, 14, 12, 19, 24, 38, 34, 24,
5, 7, 19, 12, 14, 24, 19, 38, 22, 29, 24, 19, 19, 14, 25

উপরোক্ত তথ্যগুলি নিয়ে পূর্ব অনুচ্ছেদ 10.3 অনুসরণ করে বারম্বরতা বিতরণ সারণী প্রস্তুত করো তা নিম্নে প্রকাশ করো।

সারণী-12

লবধাঙ্ক (Score)	বারম্বরতা(Frequency)
5	1
7	1
10	2
12	3
14	4
19	6
22	1
24	5
25	1
29	2
34	2
38	2

এখানে ছেলেদের সংখ্যা বহুৎ বেশি হলে এবং পূর্ণসংখ্যা 50 না হয়ে 100 হয় থাকলে এই সারণী অধিক দীর্ঘ হয়ে থাকত। এখন স্থলে উপরোক্ত সারণীর এক অনুরূপ সারণী প্রস্তুত করা বিরক্তকর। সময়সাপেক্ষ এবং কষ্টকর হবে। এরকম একটি সারণী থেকে নির্দিষ্ট সূচনা পাওয়া কষ্টকর হয়ে পড়বে।

এরকম স্থলে প্রত্যেক লবধাঙ্ক জন্য বারম্বরতা নির্ণয় না করে লবধাঙ্কগুলি কত শ্রেণী বা সংভাগে **(Class or Group)** বিভক্ত করে প্রত্যেক সংভাগের জন্য বারম্বরতা নির্ণয় করা যায়। এই প্রক্রিয়াকে **সংভাগীকরণ (Classification)** বলে। বর্তমান এসো প্রদত্ত সারণীর থাকা লবধাঙ্ক সমূহকে নিয়ে কিছু তথ্যাবলী **বিস্তার** Range = (38-5) = 33

তথ্যাবলী সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন লবধাঙ্কদ্বয়ের মধ্যে দূরত্বকে তথ্যাবলী বিস্তার (Range) বলে।

সাধারণত তথ্যাবলী বিস্তার অধিক হয়ে থাকা তথ্যাবলীকে বিভিন্ন সংভাগে বিভক্ত করা যায়। প্রদত্ত তথ্যাবলীর সংভাগীকরণ নিম্ন মতে করা যেতে পারে।

0-10, 10-20, 20-30, 30-40

এখানে সমস্ত তথ্যকে 4টি ভাগে বিভক্ত করা গেছে। প্রত্যেক ভাগকে একটি করে সংভাগ বলে। নিম্ন সারণীকে অনুধ্যান করো।

সারণী - 13

সংভাগ	0-10	10-20	20-30	30-40
বারম্বরতা	2	15	9	4

এখানে লক্ষ্য করো (0-10) এবং (10-20) সংভাগদ্বয়ের '10' উভয়ে সংভাগ আছে। সেরকম 20 (10-20) এবং (20-30) সংভাগদ্বয়ে আছে এর জন্য আমরা ধরে নেব যে '10' প্রথম সংভাগে না থেকে দ্বিতীয় সংভাগে এবং '20' দ্বিতীয় সংভাগে না থেকে তৃতীয় সংভাগে থাকবে।

'30' লবধাঙ্ক প্রদত্ত চারটি সংভাগ মধ্যে (30-40) সংভাগে থাকবে।

মনে রাখো :

- 10-20 সংভাগের 10-কে সংভাগটির **নিম্নসীমা (Lower Limit)** এবং 20- কে সংভাগে **উচ্চসীমা (Upper Limit)**বলে।
- সেরকম (20-30) ক্ষেত্রে 30 এবং 30কে যথাক্রমে উক্ত সংভাগের নিম্নসীমা এবং উচ্চসীমা বলা যায়।
- সংভাগের উচ্চসীমা ও নিম্নসীমাদ্বয়ের অন্তর ফলকে সংভাগে বিস্তার বলা যায়।

  0-5, 5-10, 10-15 ইত্যাদি সংভাগীকরণ সংভাগ বিস্তার হবে 5।

  কারণ 5-0=10-5=...=5

উপরোক্ত ভাগ বিভক্ত তথ্যাবলী আমরা নীচে কতটি সিদ্ধান্তে সহজে পৌঁছাব।

(i) 30 জন ছাত্রের মধ্যে সর্বাধিক 15 জন ছাত্র 10 এবং 10 থেকে 20 মধ্যে মার্কস রেখেছে।

(ii) 20 কিংবা 20 থেকে বেশি মার্কস রেখে থাকা ছাত্রঙ্ক সংখ্যা 13।

(iii) 20 থেকে কম মার্কস রেখে থাকা ছাত্রসংখ্যা 17 ইত্যাদি।

নিজে করো :

1. 20 জন ছাত্রদের ওজন একভাগ বিভক্ত বারম্বরতা বিতরণ সারণী প্রস্তুত করো যার বিস্তার 5 হবে। প্রদত্ত তথ্যগুলি হল 40, 38, 33, 48, 60, 53, 31, 46, 34, 36, 49, 41, 55, 49, 65, 42, 44, 47, 38, 39

2. নীচে দিয়ে যাওয়া লবধাঙ্কগুলি নিয়ে একটি বারম্বরতা বিতরণ সারণী প্রস্তুত করো যায় সংভাগ বিস্তার 10 হবে।

21, 10, 30, 22, 33, 5, 37, 12, 25, 42, 15, 39, 26, 32, 18, 27, 28, 19, 29, 35, 31, 24, 36, 18, 20, 38, 22, 44, 16, 24, 10, 27, 39, 28, 49, 29, 32, 23, 31, 21, 34, 22, 23, 36, 24, 36, 33, 47, 48, 50, 39, 20, 7, 16, 36, 45, 47, 30, 22, 17

উদাহরণ-4 : নিম্ন ভাগ বিভক্ত তথ্যাবলীকে অনুধ্যান করে প্রদত্ত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও।

একটি কারখানাতে 550 জন্য কর্মচারীঙ্ক আয়কে ভাগবিভক্ত বারম্বরতা বিতরণ সারণীতে দেওয়া গেছে।

সারণী - 14

সংভাগ	বারম্বরতা
100-125	45
125-150	25
150-175	55
175-200	125
200-225	140
225-250	53
250-275	35
275-300	50
300-325	20

(i) প্রদত্ত সংভাগদের বিস্তার কত?

(ii) কোন সংভাগ বারম্বারতা সর্বাধিক?

(iii) কোন সংভাগে বারম্বারতা সর্বনিম্ন?

(iv) (200-275) সংভাগে উচ্চসীমা কত?

(v) কোন দুই সংভাগের বারম্বারতা সমান?

(vi) 150 টাকা থেকে কম আয় বিশিষ্ট কর্মচারীঙ্ক সংখ্যা কত?

সমুদায় কর্মচারী সংখ্যা-550

উত্তর (i) সংভাগে বিস্তার (25)

(ii) (200-225) সংভাগের বারম্বরতা সর্বাধিক (140)

(iii) (300-325) সংভাগের বারম্বরতা সর্বনিম্ন (20)

(iv) (200-275) সংভাগের উচ্চসীমা 275

(v) (150-175) এবং (225-250) সংভাগদ্বয়ের বারম্বরতা সমান (55)

(vi) 45+25=70 জন ব্যক্তিদের আয় 150 টাকা থেকে কম।

10.6 হিস্টোগ্রাম (Histogram) :

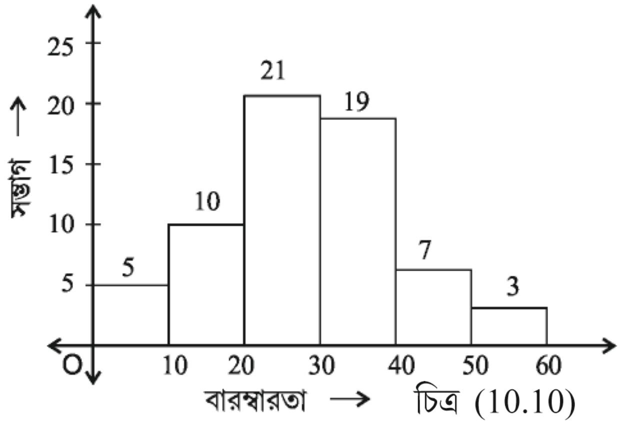
ভাগবিভক্ত বারম্বরতা বিতরণকে লেখচিত্র মাধ্যমেও প্রকাশ করা যেতে পারে। 10.4.2 বিভাগে তোমরা স্তম্ভলেখ দ্বারা তথ্য উপস্থাপনা কীভাবে হয় তা জেনেছ। স্তম্ভলেখতে স্তম্ভদের বিস্তার সমান থাকার সময় তাদের মধ্যে ব্যবধান সমান থাকে। হিস্টোগ্রাম প্রস্তুতি সময় অনুরূপভাবে স্তম্ভলেখ মধ্য অঙ্কন করা গিয়ে থাকে। কিন্তু তাদের মধ্যে ব্যবধান কিছু থাকে না। হিস্টোগ্রাম স্তম্ভের চওড়া সংভাগ বিস্তার উপরে নির্ভর করে থাকে এবং স্তম্ভের উচ্চতা অনুরূপ সংভাগের বারম্বরতা হয়ে থাকে। সংভাগ মধ্যে ব্যবধান কিছু না থাকায় স্তম্ভ অঙ্কন সময় ব্যবধান মধ্য কিছু থাকে না। এখানে মনে রাখা উচিত হবে যে, প্রত্যেক হিস্টোগ্রাম মধ্য এক একটি স্তম্ভলেখা।

লবধাঙ্কগুলির সংভাগীকরণ ব্যবস্থায় অঙ্কিত স্তম্ভলেখকে হিস্টোগ্রাম বলে।

উদাহরণ-5 : প্রদত্ত ভাগবিভক্ত বারম্বরতা বিতরণ সারণীকে নিয়ে বর্তমান হিস্টোগ্রাম অঙ্কন করব।

সারণী-15

সংভাগ	বারম্বরতা
0-10	5
10-20	10
20-30	21
30-40	19
40-50	7
50-60	3

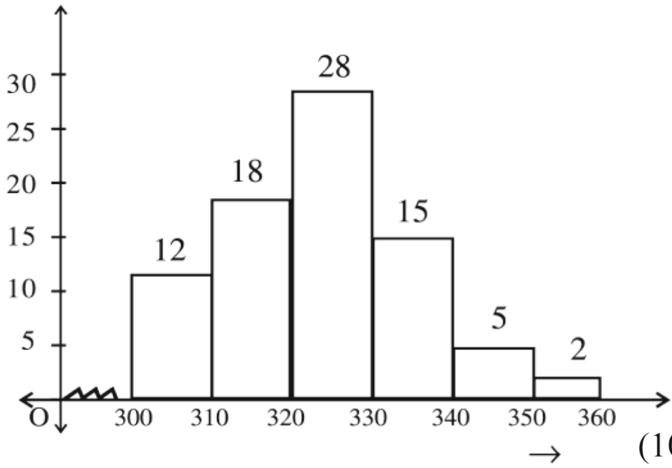


চিত্র (10.10)

অঙ্কিত লেখচিত্রকে হিস্টোগ্রাম বলে। স্তম্ভলেখ অঙ্কন সোপানে অনুসরণ করে উক্ত হিস্টোগ্রাম অঙ্কিত হয়েছে।

উদাহরণ-6

নিম্ন হিস্টোগ্রামটি একটি কারখানায় 80 জন শ্রমিক দৈনিক রোজগার সঙ্গে সম্পৃক্ত এক ভাগবিভক্ত তথ্যাবলীকে ভিত্তি করে অঙ্কিত হয়েছে।



(10.11)

হিস্টোগ্রামকে অনুধ্যান করলে নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও।

(i) সর্বাধিক রোজগার দেখানো সংভাগে থাকা ব্যক্তিদের সংখ্যা লেখ।

(ii) কোনো সংভাগে সর্বাধিক সংখ্যক ব্যক্তি অন্তর্ভুক্ত?

(iii) প্রদত্ত সংভাগগুলি বিস্তার কত?

(iv) কত জন ব্যক্তি 330 টাকা থেকে কম রোজগার করে?

(v) 340 টাকা কিংবা এর থেকে বেশি টাকা রোজগার করে থাকা ব্যক্তিদের সংখ্যা কত?

সমাধান :

(i) (350-360) সংভাগের বারম্বরতা 2। তাই বেশি রোজগার করে থাকা ব্যক্তি সংখ্যা 2।

(ii) (320-330)

(iii) 10

(iv) 330 টাকা থেকে কম রোজগার করে থাকা ব্যক্তি সংখ্যা=12+18+28=58

(v) 340 টাকা কিংবা এর থেকে অধিক রোজগার করে থাকা ব্যক্তিদের সংখ্যা=5+2=7

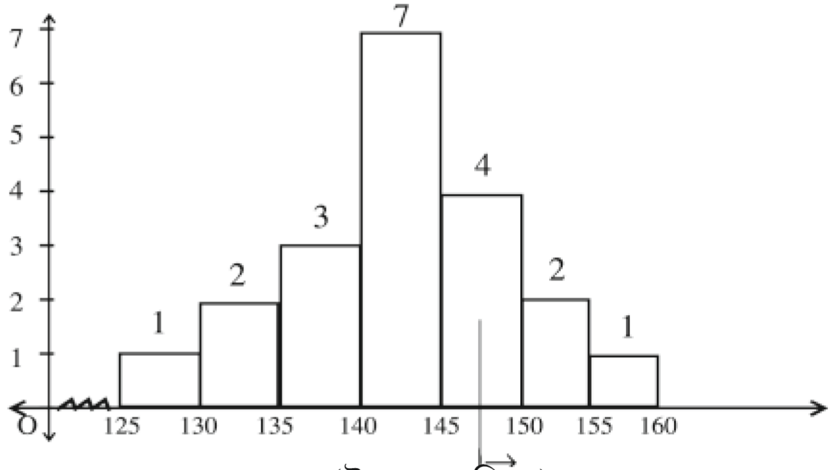
নিজে করো

1. তোমার স্কুলে 25 জন শিক্ষকের বয়স নীচে জনবিভক্ত বারম্বরতা বিতরণ সারণীতে প্রকাশ করা হয়েছে। একে ব্যবহার করে হিস্টোগ্রাম অঙ্কন করো।

সারণী-16

সংভাগ	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
বারম্বারতা	4	5	6	3	2	5

প্রস্তুত হিস্টোগ্রামকে লক্ষ্য করে নিম্ন প্রশ্নদের উত্তর দিতে চেষ্টা করো।



(উচ্চতা সেমিতে) (10.12)

(i) প্রদত্ত হিস্টোগ্রাম থেকে কোন সূচনা পাওয়া যাচ্ছে?

(ii) কোন সংভাগে সর্বাধিক সংখ্যার ছাত্রী আছে?

(iii) 145 সেমি এবং তা থেকে অধিক উচ্চতাবিশিষ্ট ছাত্রী সংখ্যা কত?

(iv) 140 সেমি থেকে কম উচ্চতাবিশিষ্ট ছাত্রী সংখ্যা কত?

(v) উচ্চতা 140 সেমি ও 145 সেমির মধ্যে থাকা ছাত্রী সংখ্যা কত?

অনুশীলনী-10 (a)

1. একজন ডাক্তার দ্বারা সপ্তাহের বিভিন্ন দিনের পরীক্ষা করে থাকা রোগীর সংখ্যাকে একটি সারণীতে দেওয়া গেছে। সারণী প্রদত্ত তথ্যকে নিয়ে একটি স্তম্ভলেখ অঙ্কন করো।

সারণী-17

বারসমূহ	সোম	মঙ্গল	বুধ	বৃহস্পতি	শুক্র	শনি
রোগী সংখ্যা	16	20	26	13	25	28

2. একজন ব্যক্তির মাসিক বেতন 6400 টাকা। সে নিম্নলিখিত উপায়ে মাসিক খরচাকে ??? করতে চাইল। তথ্যকে নীচের সারণীতে দেওয়া গেছে। উক্ত তথ্যসমূহকে ব্যবহার করে একটি স্তম্ভলেখ অঙ্কন করো।

3. একটি গ্রামে বিভিন্ন উপায় অবলম্বনে স্কুল যাওয়া ছেলে ও মেয়ে সংখ্যাকে নিম্ন সারণীতে দেওয়া গেছে। একে ব্যবহার করে একটি দ্বিস্তম্ভলেখ অঙ্কন করো।

সারণী 18

মাধ্যম সমূহ	স্কুল বাস	হেঁটে	সাইকেলে	অন্যান্য
ছেলে সংখ্যা	75	120	240	150
মেয়ে সংখ্যা	135	60	180	90

4. পার্শ্বস্থ স্তম্ভলেখ দ্বারা একটি শহরের বিভিন্ন সময়ের তাপমাত্রা কত ছিল দেখানো গেছে।

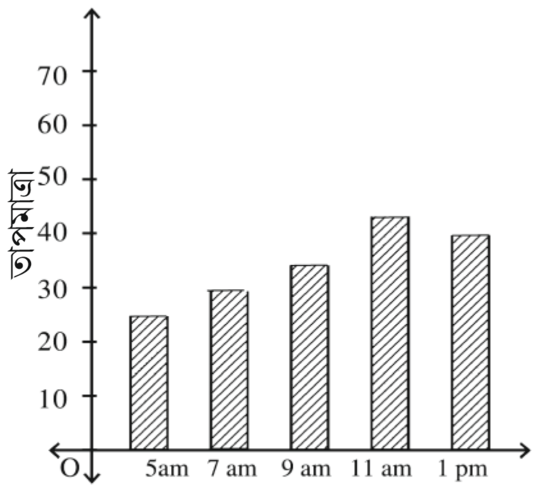
(a) দিনে কোন সময়ে তাপমাত্রা সর্বাধিক ছিল?

(b) দিনে কোন সময়ে তাপমাত্রা সর্বনিম্ন ছিল?

(c) 45^0 তাপমাত্রা দিনের কোন সময়ে ছিল?

(d) সর্বাধিক তাপমাত্রা এবং সর্বনিম্ন তাপমাত্রার মধ্যে অন্তর কত?

(e) অপরাহ্ণ একটার সময় দিনের তাপমাত্রা কত ছিল?



চিত্র (10.13)

5. নিম্ন বারম্বরতা বিতরণ সারণীকে অনুধ্যান করে নিম্ন প্রশ্নগুলির উত্তর দাও। উক্ত সারণীতে 40 জন ব্যক্তির ওজন (কিলোগ্রাম) দেওয়া গেছে।

ওজন (কিগ্রাতে)	40-48	45-50	50-55	55-60	60-65
ব্যক্তি সংখ্যা	4	12	13	6	5

(a) প্রথম সংভাগে নিম্নসীমা এবং উচ্চসীমা কত?

(b) কোনো সংভাগে অন্তর্ভুক্ত ব্যক্তিদের সংখ্যা সর্বাধিক?

(c) 50 কিগ্রা থেকে কম ওজন বিশিষ্ট ব্যক্তিদের সংখ্যা কত?

(d) কোনো সংভাগের অন্তর্ভুক্ত ব্যক্তিদের সংখ্যা সর্বনিম্ন?

(e) প্রদত্ত সংভাগীকরণে তথ্যাবলীর বিস্তার কত?

প্রদত্ত তথ্যাবলীর এক হিস্টোগ্রাম অঙ্কন করো। এখানে 25 জন ছেলেদের একটি পরীক্ষাতে রেখে থাকা নম্বরকে সারণীতে দেওয়া গেছে।

সংভাগ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ছাত্রসংখ্যা	1	4	6	8	4	2

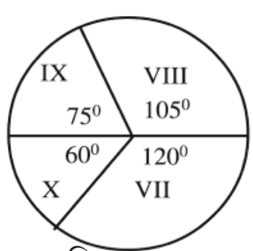
7. একটি স্কুলের Vii থেকে x শ্রেণী পর্যন্ত শ্রেণীতে ছাত্রসংখ্যার সমষ্টি 720। পার্শ্বস্থ বৃত্তলেখকে অনুধ্যান করে নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও।

(a) x শ্রেণীতে ছাত্র সংখ্যা কত?

(b) x শ্রেণীতে ছাত্র সংখ্যা viii শ্রেণীর ছাত্র সংখ্যা থেকে কত কম?

(c) ix এবং x শ্রেণীতে ছাত্র সংখ্যার অনুপাত কত?

(d) vii শ্রেণীতে ছাত্র সংখ্যা ix শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা থেকে কত বেশি?



চিত্র (10.14)

8. সমুদায় 1080 জন ব্যক্তিদের মধ্যে তাদের খাদ্যরুচিকে দৃষ্টিতে রেখে একটি বৃত্তলেখ অঙ্কন করা গিয়েছে। পার্শ্বস্থ বৃত্তলেখকে অনুধ্যান করে নিচের প্রশ্নগুলির উত্তর প্রদান করো।

(a) কতজন ব্যক্তি পরোটা এবং কতজন ব্যক্তি রুটিকে পছন্দ করে?

(b) কতজন ব্যক্তি চাউমিন এবং পিজাকে পছন্দ করে?

(c) বেশি কতজন ব্যক্তি ধোসা অপেক্ষা রুটিকে পছন্দ করে?

(d) পরোটাকে পছন্দ করে থাকা ব্যক্তি সংখ্যা পিজাকে পছন্দ করে থাকা ব্যক্তি সংখ্যা থেকে কত বেশি?

চিত্র (10.15)

9. একটি স্কুলে নিম্নলিখিত ভাষাকে প্রথম ভাষারূপে গ্রহণ করে থাকা ছাত্র সংখ্যা দেওয়া গেছে। উক্ত তথ্যাবলীকে ব্যবহার করে একটি বৃত্তলেখ অঙ্কন করো।

সারণী-21

ভাষা	ইংরাজী	হিন্দি	ওড়িয়া	বাংলা	তেলেগু
ছাত্রসংখ্যা	50	20	80	18	12

10. সারণীতে থাকা তথ্যাবলীকে নিয়ে একটি হিস্টোগ্রাম অঙ্কন করো।

সারণী-22

সংভাগ	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
বারম্বারতা	5	10	19	24	18	6

11. 40টি ঘরের ইলেকট্রিক বিল এসেছে। বিলে লিপিবদ্ধ টাকাকে নীচে দেখানো গেছে। উক্ত তথ্যাবলীর আধারে একটি বিভক্ত বারম্বরতা বণ্টন সারণী প্রস্তুত করো। (আবশ্যক হলে টিক চিহ্ন ব্যবহার করতে পারো)

78, 87, 81, 52, 59, 65, 101, 108, 11, 5, 95, 98, 65, 62, 121, 128, 63, 76, 84, 89, 91, 65, 101, 95, 8, 1, 87, 105, 129, 92, 75, 105, 78, 72, 107, 116, 127, 100, 80, 82, 61, 118

12. **প্রদত্ত তথ্যাবলী 0-5, 5-10... প্রভৃতি সংভাগীকরণ থেকে একটি বারম্বরতা বন্টন সারণী প্রস্তুত করো। তৎপূর্বে একে নিয়ে একটি হিস্টোগ্রাম অঙ্কন করো।**

13, 6, 12, 9, 11, 14, 2, 8, 18, 16, 9, 13, 17, 11, 19,
6, 7, 12, 22, 21, 18, 1, 8, 12, 18, 13, 5, 10, 12, 4

10.7 লেখচিত্র সম্বন্ধীয় প্রারম্ভিক ধারণা (Introduction to Graphs) :

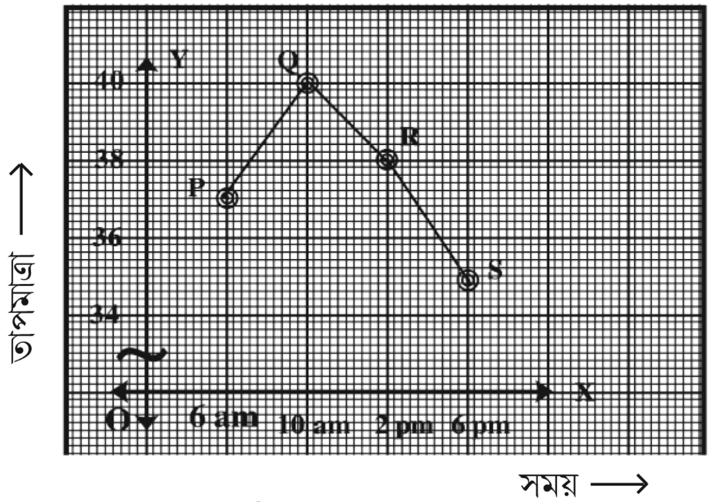
সাধারণত তথ্যর পরিবেষণ বা উপস্থাপন বিভিন্ন গ্রাফ মাধ্যমে করা হয়ে থাকে। সংগৃহীত তথ্যের উপস্থাপনা চিত্র বা লেখ মাধ্যমে করা গিয়ে পর্যবেক্ষণ বা গবেষণাবলী দৃষ্টি আকর্ষণ করে থাকে। প্রথমে তথ্যগুলি সারণীতে লিপিবদ্ধ করে আবশ্যকতা অনুযায়ী বিভিন্ন চিত্র মাধ্যমে এর উপস্থাপনা করা যায়। যা নেওয়া তথ্য সম্বন্ধীয় বিভিন্ন সূচনার মধ্যে তুলনা করা সম্ভবপর হয়ে থাকে।

তোমরা পূর্বে চিত্রলেখ (Pictograph), স্তম্ভলেখ (Bar graph) ও ভাগবিভক্ত তথ্যাবলীর জন্য ব্যবহৃত হিস্টোগ্রাম মাধ্যমে সংগৃহীত তথ্যর উপস্থাপনা কেমন করা যায় তা জেনেছ। পূর্বে অনুচ্ছেদে আলোচিত সমস্ত লেখ তথ্যাবলীর উপস্থাপনা নিমিত্ত উদ্দিষ্ট। এতদ্ব্যতীত অন্য একটি লেখচিত্র সম্বন্ধে আলোচনা করব। নিম্নে উদাহরণকে দেখো।

উদাহরণ-7 : রেণুর শরীরে তাপমাত্রা দিনে প্রতি 4 ঘণ্টা অন্তর থার্মোমিটারের সাহায্যে মেপে একটি সারণী লিপিবদ্ধ করা গেছে। প্রদত্ত তথ্যকে ভিত্তি করে একটি লেখচিত্র অঙ্কন করা গেছে।

সারণী-23

সময়	6 am	10 am	2 pm	6 pm
তাপমাত্রা 0^0C	37	40	38	35



মনে রাখো :-অনুভূমিক রেখাকে সাধারণত X-axixs বা X অক্ষ বলে। ভূলম্ব রেখাকে Y-axixs বা Y - অক্ষ বলা হয়।

চিত্র (10.16)

(1) সময় অনুযায়ী নির্দিষ্ট তাপমাত্রাকে ভিত্তি করে তথ্যকে বিন্দুদ্বারা (P, Q, R, S) দেখানো গেছে।

(2) সেই বিন্দুগুলিকে ক্রমান্বয়ে পরমুহূর্তে রেখাখণ্ড $\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RS}$ দ্বারা সংযোগ করা গেছে।

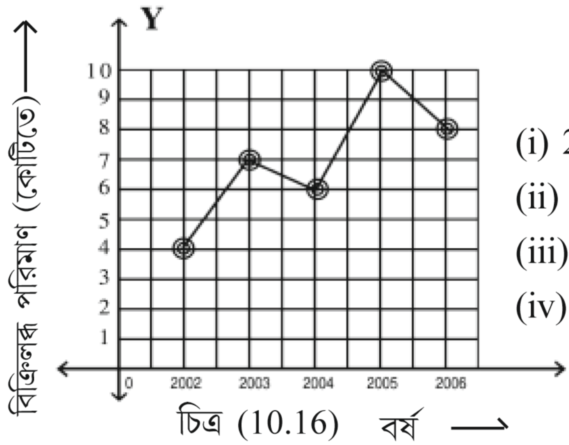
উক্ত এ প্রকার লেখচিত্রকে সময় তাপমাত্রারেখা লেখ বলে। উক্ত লেখ সময় সাথে ক্রমাগতভাবে তাপমাত্রার পরিবর্তন ঘটছে। বর্তমান বল উক্ত লেখচিত্র থেকে কোন কোন সূচনা পেয়েছ?

সমীর বলল - দিন দশটা সময় তাপমাত্রা সর্বাধিক ছিল।

রমেশ বলল - দিন দশটা থেকে ক্রমাগত তাপমাত্রা কমে সন্ধ্যা 6-তে সর্বনিম্ন হল।

রেখালেখ সম্বন্ধে অন্য এক উদাহরণকে লক্ষ করো।

উদাহরণ-8 : একটি যন্ত্রাংশ উৎপাদনকারী সংস্থার বিভিন্ন বছরের বিক্রিলব্ধ টাকার পরিমাণ নেওয়া যা একটি রেখা লেখ প্রস্তুত করা গেছে। রেখাচিত্রকে অনুধ্যান করে নিম্ন প্রশ্নগুলির উত্তর দাও।



চিত্র (10.16)

(i) 2002 এবং 2004-এ বিক্রিলব্ধ টাকার পরিমাণ কত ছিল?

(ii) 2003 এবং 2005-এ বিক্রিলব্ধ টাকার পরিমাণ কত ছিল?

(iii) 2002 ও 2006-এ বিক্রিলব্ধ টাকার পরিমাণের তফাৎ কত?

(iv) কোন বছরে সংস্থাটির বিক্রিলব্ধ টাকার পরিমাণ সর্বাধিক ছিল?

সমাধান :

(i) 2002 বছরে বিক্রিলব্ধ টাকার পরিমাণ : চার কোটি
2004 বছরে বিক্রিলব্ধ টাকার পরিমাণ : ছয় কোটি।

(ii) 2003 বছরে বিক্রিলব্ধ টাকার পরিমাণ : সাত কোটি
2006 বর্ষে বিক্রিলব্ধ টাকার পরিমাণ : আট কোটি।

(iii) 2002 ও 2006 বছরদ্বয়ে মধ্যে বিক্রিলব্ধ টাকার পরিমাণের অন্তর : চার কোটি।

(iv) 2005-এ বিক্রিলব্ধ টাকার পরিমাণ সর্বাধিক ছিল তা হচ্ছে : দশ কোটি।

10.8 সরলরেখীয় লেখচিত্র (Linear Graph) :

পূর্বোক্ত উদাহরণদ্বয়ের কয়েকটি রেখাখণ্ডগুলি একটি ক্রমে সংযোগ করে এক একটি লেখচিত্র অঙ্কন করা যেতে পারে। কয়েকটি ক্ষেত্রে লেখচিত্রটি একটি সরলরেখার রূপ নিয়ে থাকে। এ প্রকার লেখচিত্রটিকে **সরলরেখীয় লেখচিত্র (Linear Graph)** বলে। এরকম লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য লেখকাগজ উপরে কতকগুলি বিন্দু চিহ্নিত করতে পারে।

বর্তমান লেখকাগজ উপরে কেমন সহজে বিন্দুকে চিহ্নিত করতে পারব তার উপরে আলোচনা করব। বিন্দু চিহ্নটি করার অর্থ লে কাগজ উপরে বিন্দুর অবস্থানকে জানব।

10.8.1 বিন্দুর অবস্থিতি নিরূপণ (Location of Point) :

শিক্ষক শ্রেণীতে পাঠ পড়ানোর সময় তুমি শ্রেণীতে থাকা black board-এর উপরে একটি বিন্দুকে চক দ্বারা দেখালে সে জিজ্ঞেস করল,

ছেলেরা বলত দেখি চক দ্বারা চিহ্নিত বিন্দুটি black board-এর কোথায় আছে? উক্ত প্রশ্নের ভিন্ন ভিন্ন উত্তর শিক্ষক পেলেন। সেগুলি হল-

বিন্দুটি black board-এর উপরে অর্ধাংশে চিহ্নিত হয়েছে।

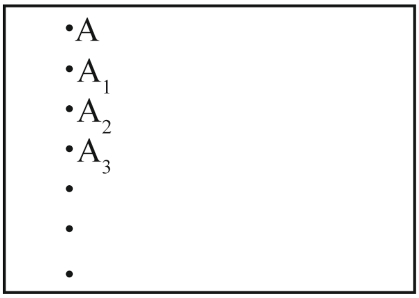
বিন্দুটি black board-এর বামদিকে ধারের দিকে চিহ্নিত হয়েছে।

বিন্দুটি black board-এর বামপাশের উপরে কোণের দিকে চিহ্নিত হয়েছে।

এ সমস্ত উত্তর থেকে চকদ্বারা চিহ্নিত বিন্দুটির অবস্থান ঠিকরূপে জানা গেল কি? বোধ হয় না। কেননা, ভাবো দেখি। সঙ্গে সঙ্গে জন black board-এর কাছে গিয়ে black board-এর বামপার্শ্বে ধার থেকে বিন্দুটি কত দূরে চিহ্নিত হয়েছে স্কেল দ্বারা মেপে বলল-

স্যার ‘A’ চিহ্নিত বিন্দুটি বামপার্শ্ব থেকে মাত্র 90 সেমি দূরে থাকছে।

নিম্ন চিত্র 10.18 কে দেখ।



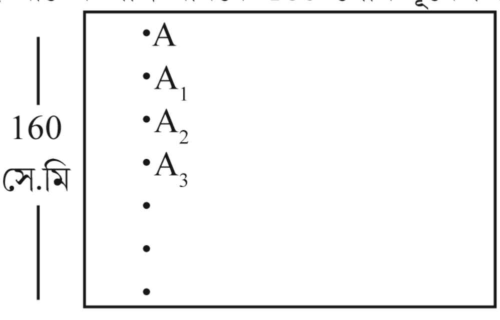
90 সে.মি. চিত্র (10.18)

শিক্ষক আবার ছেলেদের উদ্দেশ্যে বলল-ছেলেরা বল দেখি জন দিয়ে থাকা উত্তরটি ‘A’ বিন্দুর অবস্থান ঠিকরূপে দেখাতে পারবে তো?

লক্ষদের Black board-এর বামপার্শ্বে ধার থেকে 90 সেমি দূরে A-র মতন অনেক বিন্দু দেখানো গেছে।

সংগীতা সঙ্গে সঙ্গে Black board-এর কাছে গিয়ে ‘A’ বিন্দুটিকে ধার থেকে কত দূরে আছে মেপে জন বলেছিল উত্তরে কিছু মেপে জুড়ে বলল।

স্যার Black board-এর ‘A’ চিহ্নিত বিন্দুটি Black board-এর বামপার্শ্বের ধারকে 90 সেমি এবং নীচের পার্শ্ব ধারকে 160 সেমি দূরে চিহ্নিত হয়েছে। নিম্ন চিত্র 10.19-কে দেখো।



90 সে.মি. চিত্র (10.19)

লক্ষ করো বর্তমান A বিন্দু Black board-এর প্রকৃত অবস্থানটি নিরূপিত হতে পারল।

সংগীতা উত্তর দিয়ে থাকা উক্তিকে শিক্ষক সংক্ষিপ্তভাবে ‘A’ বিন্দু অবস্থানকে নিম্ন প্রকারে লিখল। তা হল A (90) (160)

বলো দেখি Black board-এর B বিন্দুর অবস্থানকে কেমন লিখব যদি বামপার্শ্ব 20 সেমি এবং নীচে পাশে 100 সেমি দূরত্বে বিন্দুটি থাকে। তোমার উত্তরটি হবে-B (20) (100)

(নিজে করো) নিম্ন বিন্দুগুলি অবস্থানগুলিকে সংক্ষিপ্ত দেখানো গেছে। এগুলিকে বিস্তৃত ব্যাখ্যা করো। (a) M (16, 80) b (N) (100) 30, C R (80, 80)

সপ্তদশ শতাব্দীতে ফরাসী গণিতজ্ঞ **রেনে ডেসকোর্ট (Rene Descartes)** একটি ছাতে একজন একটি পোকার চল প্রচলনকে লক্ষ করছিল। একটি নির্দিষ্ট সময়ে পোকাটির অবস্থানটি জানার জন্য চেষ্টা করছিলেন। এখানে সে একটি সমতলে একটি বিন্দু চিহ্নিতকরণ করিবার উপায় উদ্ভাবন করেছিল। তাদের উদ্ভাবন দুটি মাপাঙ্ক দ্বারা কেমন একটি বিন্দুতে চিহ্নিত সম্ভব তা দেখানো গেছে। মাপাঙ্কদ্বয়ের মধ্যে একটি **আনুভূমিক (Horizontal)** মাপাঙ্ক থাকার সময় অন্যটি **উলম্ব (Vertical)** মাপাঙ্ক ছিল। তাদের নামানুসারে উক্ত বিন্দুর চিহ্নিতকরণ পদ্ধতিকে **কার্টেজীয় পদ্ধতি (Cartesian system)** বলে।

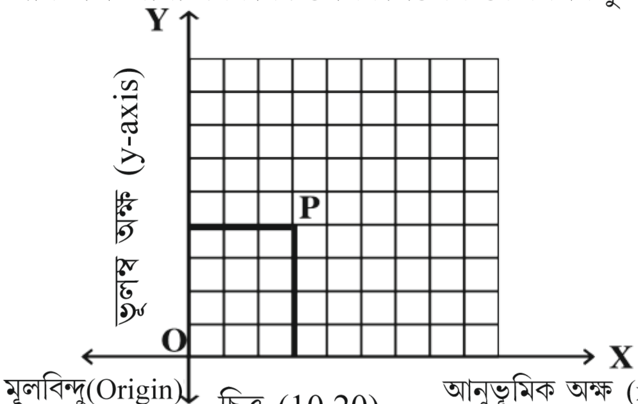
10.8.3 স্থানাঙ্ক (Coordinates) :

মনে করো তুমি একটি প্রেক্ষালয়ে গিয়ে আগে টিকিট করা গিয়ে থাকা আসনের কাছে যাবে। তবে তোমাকে তোমার ঠিক আসন পেতে হলে দুটি সংখ্যার সহায়তা নেবে। যথা-লাইন সংখ্যা এবং উক্ত লাইনের আসন সংখ্যা। সমতলে একটি **বিন্দু সংস্থাপন (Plotting of a Points)** এটা একটি মৌলিক তথ্য।

(বোর্ডে **'A'** বিন্দুর অবস্থানের জন্য যেদুটি সংখ্যর সহায়তা নিয়েছিলে সেগুলি হল 90 এবং 160)

10.9 সমতলে বিন্দুর সংস্থাপন (Plotting of Points on a Plane) :

সমতলে বিন্দু সংস্থাপন উপায় জানতে হলে প্রথমে একটি লেখকাগজে বিন্দু সংস্থাপনের উপায়গুলি জানা দরকার। লেখকাগজের কেমন বিন্দু P (3, 4) সংস্থাপন করতে পারব এসো দেখব।



চিত্র (10.20)

পূর্ব অনুচ্ছেদে জান P (3, 4) মধ্যে প্রথম সংখ্যা '3'। মূল বিন্দু থেকে ডানদিকে কত একক থেকে বোঝানো থাকার সময়ে দ্বিতীয় সংখ্যা '4' মূল বিন্দু থেকে উপরদিকে কত একক যেতে হবে বোঝাও।

সূচনা:- x অক্ষ ও y অক্ষ এক একটি সংখ্যা রেখা। সংখ্যারেখাদ্বয়ের কেবল 0 থেকে আরম্ভ করে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা অংশকে দেখানো গেছে।

x অক্ষতে 3 একক মূল বিন্দু থেকে ডানদিকে নিয়ে যাওয়া হয়েছে 3-কে x স্থানাঙ্ক বা ভূজ এবং y অক্ষতে 4 একক মূল বিন্দু থেকে উপবদিকে নিয়ে যাওয়া হয়েছে 4 কে y স্থানাঙ্ক বা কোটি বলে।

x অক্ষতে 3 ও y অক্ষতে 4 চিহ্নিত বিন্দু থেকে অঙ্কিত সরলরেখাদ্বয়ে ছেদবিন্দু হচ্ছে P যাকে P (3, 4) দ্বারা দেখানো গেছে। এখানে P বিন্দু স্থানাঙ্ক (3, 4)।

বর্তমান পরীক্ষা করে দেখো (3, 4) স্থানাঙ্ক এবং (4, 3) স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট বিন্দুদ্বয় এক ও অভিন্ন কি?

উদাহরণ-9 : পার্শ্বস্থ লেখচিত্রকে দেখে নির্ণয় করো যে কোনো বিন্দু/ বিন্দুগুলি প্রদত্ত স্থানাঙ্কগুলি সূচীত করে। স্থানাঙ্ক (i) (2, 1), (ii) (0, 5) (iii) (2, 0), (iv) (3, 5) এবং A, H, F ও D বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক লেখ।

সমাধান : (i) E বিন্দুকে সূচীত করে (2, 1)। (ii) B বিন্দুকে সূচীত করে (0, 5)।
(iii) G বিন্দুকে সূচীত কবে (2, 0)। (iv) C বিন্দুকে সূচীত করে (3, 5)

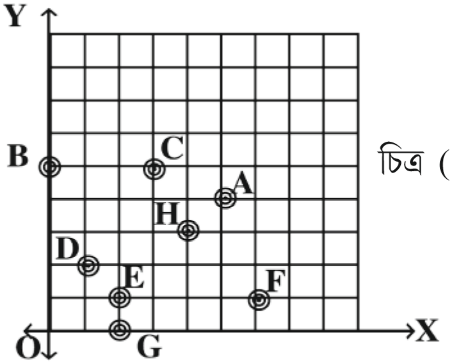
এবং

(a) A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (5, 4)

(b) H বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 3)

(c) F বিন্দুর স্থানাঙ্ক (6, 1)

(d) D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 2)



চিত্র (10.21)

উদাহরণ-10 : লেখকাগজে নিম্নলিখিত স্থানাঙ্কর মাধ্যমে বিন্দুগুলি চিহ্নিত করো। যদি বিন্দুগুলি একটি সরলরেখাতে অবস্থান করে তবে সরলরেখার নাম লেখ।

(i) J (0, 2), K (0, 5), L (0, 4), M (0, 6)

(ii) A (1, 1), B (1, 2), C (1, 3), D (1, 6)

(iii) K (1, 3), L (2, 3), M (3, 3), N (4, 3)

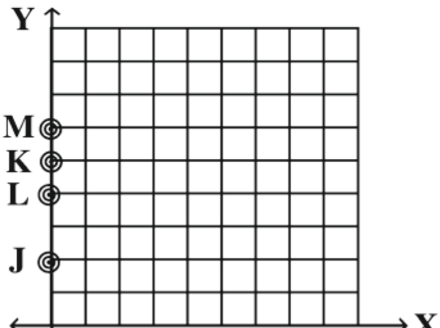
(iv) S (2, 0), T (5, 0), U (4, 0), V (6, 0)

(v) P (2, 6), Q (3, 5), R (5, 3), S (6, 2)

(vi) E (1, 1), F (2, 2), G (3, 3), H (4, 4)

সমাধান : যেমন উভয় অক্ষরপ্রতি এক সেট ঘর=1একক

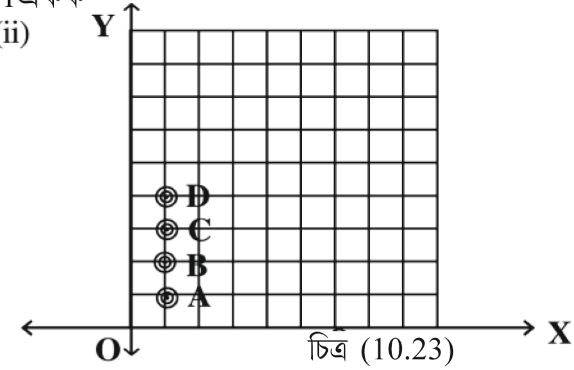
(i)



চিত্র (10.22)

বিন্দু সমূহ একটি সরলরেখা
y অক্ষ উপরে অবস্থান করে।

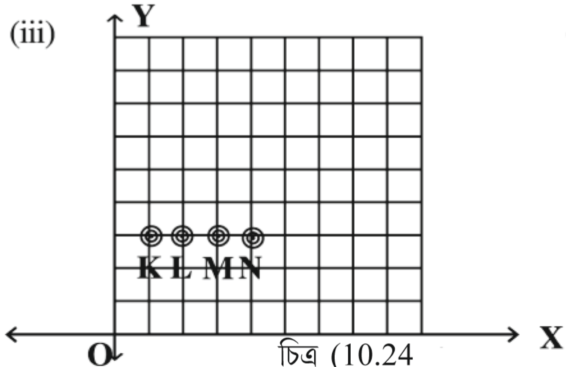
(ii)



চিত্র (10.23)

বিন্দু সমূহ AD উপরে অবস্থান করছে।
Y অক্ষ সাথে সমান্তর।

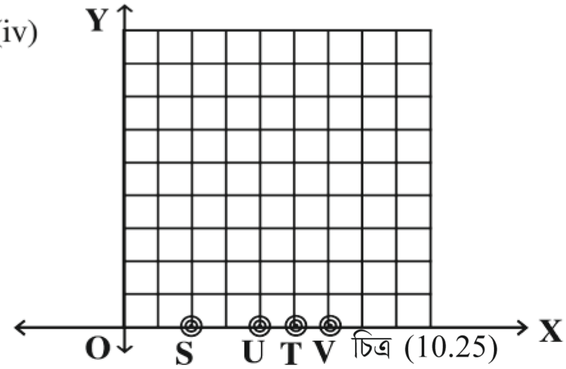
(iii)



চিত্র (10.24

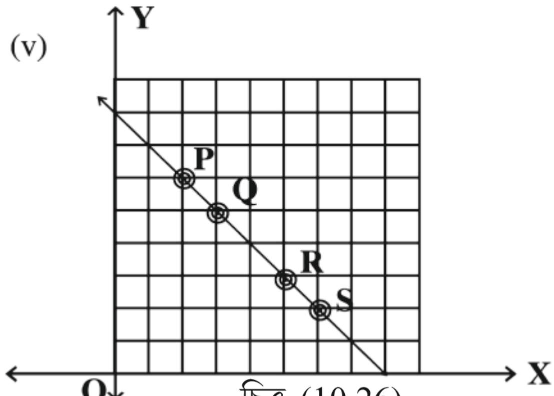
বিন্দু সমূহ $\overline{KN}$ উপরে অবস্থান করছে।
উক্ত সরলরেখা x অক্ষ সাথে সম।

(iv)



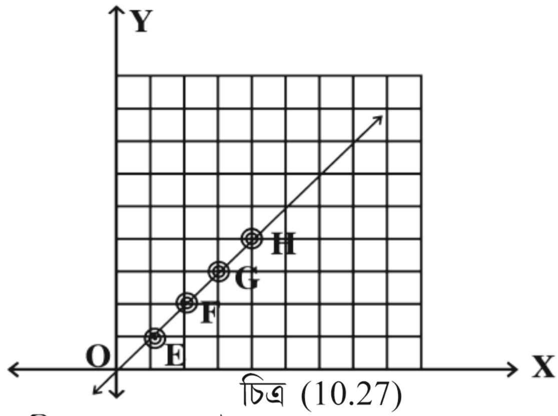
চিত্র (10.25)

বিন্দুসমূহ একটি সরলরেখাতে x অক্ষ উপরে অবস্থান করছে।



চিত্র (10.26)

বিন্দুসমূহ $\overline{PS}$ উপরে অবস্থান করছে।



চিত্র (10.27)

বিন্দুসমূহ $\overline{EH}$ উপরে অবস্থান করছে।

দ্রষ্টব্য (a) বিন্দুগুলি x স্থানাঙ্ক 0 হলে y বিন্দুগুলি y অক্ষ উপরিস্থ হবে এবং y অক্ষ উপরিস্থ প্রত্যেক বিন্দুর x স্থানাঙ্ক 0 হবে। লেখচিত্র-(1)

(b) বিন্দুগুলি y স্থানাঙ্ক 0 হলে বিন্দুগুলি x অক্ষ উপরিস্থ হবে এবং x অক্ষ উপরিস্থ প্রত্যেক বিন্দুর y স্থানাঙ্ক 0। লেখচিত্র-(iv)

(c) বিন্দুগুলির x স্থানাঙ্ক সমান হলে বিন্দুগুলি y অক্ষর সাথে সমান্তর হয়ে থাকা এক সরলরেখা উপরিস্থ হবে। এবং y অক্ষর সাথে সমান্তর হয়ে থাকা এক সরলরেখা উপরিস্থ সমস্ত বিন্দুর x স্থানাঙ্ক সমান (0 ছাড়া) হবে [লেখচিত্র (ii)]

(d) বিন্দুগুলির y স্থানাঙ্ক সমান (0 ছাড়া) হলে বিন্দুগুলি x অক্ষর সাথে সমান্তর হয়ে থাকা সরলরেখা উপরিস্থ হবে। এবং x অক্ষর সাথে সমান্তর হওয়া সরলরেখা উপরিস্থ প্রত্যেক বিন্দুর y স্থানাঙ্ক সমান (0 ছাড়া) হবে। [লেখচিত্র (iii)]

দেখানো প্রত্যেক লেখচিত্র এক একটি সরলরেখা জন্য প্রত্যেক একটি সরলরেখীয় লেখচিত্র **(Linear Graph)**

10.10 প্রয়োগ (Application) :

দৈনন্দিন জীবনে আমরা প্রত্যেকে কত ব্যবহার্য জিনিস কেনা-বেচা করে থাকি। এতদ্ব্যতীত জীবনশৈলী পরিবর্তনের জন্য আমরা কত ক্ষেত্রে কিছু বিনিয়োগ করে ভিন্ন ভিন্ন সুবিধা হাসিল করে থাকি। উদাহরণস্বরূপ ঘরে ব্যবহৃত বৈদ্যুতিক শক্তি, মোটরকারের জন্য আবশ্যক পেট্রোল ইত্যাদি। ঘরে ব্যবহৃত বিদ্যুৎ শক্তির পরিমাণ উপরে বিনিয়োগ অর্থের পরিমাণ নির্ভর করে থাকে। সেরকম পেট্রোলের ব্যবহার অনুযায়ী পেট্রোল খরচের পরিমাণ মধ্য নির্ভর করে থাকে। অর্থাৎ অধিক পেট্রোল ব্যবহারের জন্য বেশি খরচ এবং কম পরিমাণ পেট্রোল ব্যবহারের জন্য কম খরচ পড়ে থাকে।

এখানে পেট্রোলের পরিমাণের উপরে নির্ভর করে থাকায় পেট্রোল পরিমাণকে **স্বাধীন চল (Independent Variable)** এবং পেট্রোলের জন্য খরচের পরিমাণকে **সাপেক্ষ চল (Dependent Variable)** বলে। উক্ত চলদ্বয়ের মধ্যে থাকা সম্পর্ককে লেখচিত্র মাধ্যমে মধ্য দেখানো যেতে পারে। সেরকম বৈদ্যুতিক শক্তির ব্যয় পরিমাণকে স্বাধীন চল এবং বৈদ্যুতিক শক্তির জন্য আবশ্যক খরচের পরিমাণকে সাপেক্ষ চল বলে। নিম্ন উদাহরণ মাধ্যমে উপরোক্ত চলদের মধ্যে থাকা সম্পর্ক লেখচিত্রের মাধ্যমে কেমন প্রকাশ করা গিয়েছে লক্ষ করো।

উদাহরণ-11: নীচের সারণীতে মোটরকারের জন্য ব্যবহৃত পেট্রোল এবং তার আনুষঙ্গিক খরচের পরিমাণ দেওয়া গেছে। একে ব্যবহার করে লেখচিত্র অঙ্কন করো। তারপর 12 লিটার পেট্রোলের মূল্য কত?

সারণী -24

পেট্রোলের পরিমাণ (লিটারে)	5	10	15	20
পেট্রোলের জন্য খরচের পরিমাণ (টাকাতে)	250	500	750	1000

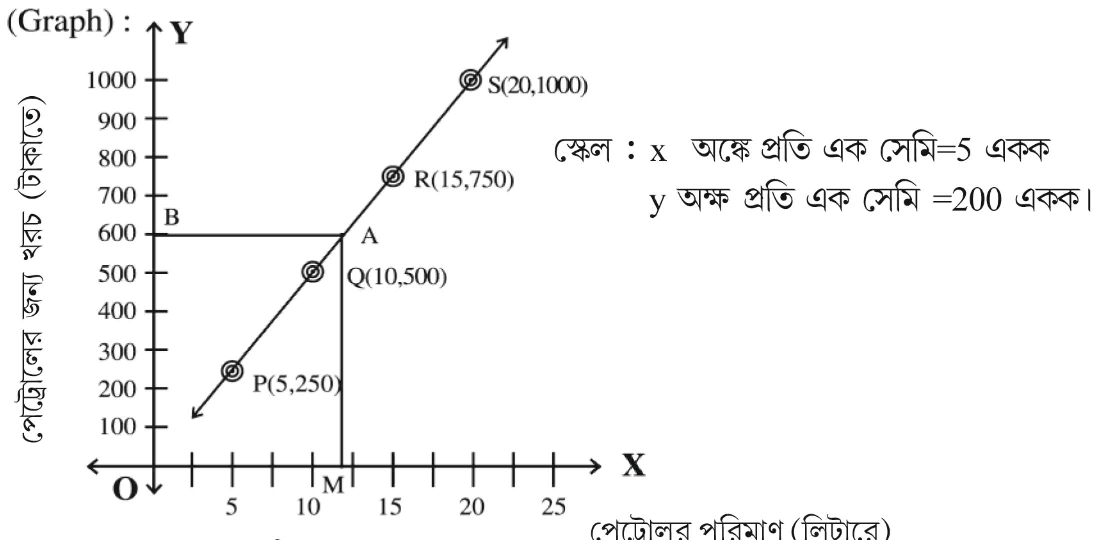
সমাধান: লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য সূচনা

(i) লেখকাগজ অক্ষদ্বয় চিহ্নিত করে আবশ্যকতা অনুযায়ী স্কেল চয়ন করো।

(ii) x অক্ষে পেট্রোল পরিমাণ এবং y অক্ষে পেট্রোল জন্য খরচের পরিমাণকে নাও।

(iii) (5,250), (10,500), (15,750), (201000) স্থানাঙ্ক নিয়ে লেখকাগজে বিন্দুগুলি চিহিত করো।

(iv) বিন্দুগুলিকে স্কেল সাহায্যে সংযোগ করে লেখচিত্র অঙ্কন করো।



চিত্র (10.21)

বিদ্রঃ- এখানে লক্ষ করো লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা। লেখচিত্র অঙ্কনে ব্যবহৃত দুটি রাশি সলখ চলন অন্তর্ভুক্ত। অন্য কথাতে দুটি চলরাশি সলখ চলন অন্তর্ভুক্ত হলে সে রাশিদ্বয়কে নিয়ে অঙ্কিত গ্রাফ একটি সরলরেখা হবে।

12 লিটার জন্য x অক্ষে বিন্দু M চিহ্নটি করো। উক্ত বিন্দুতে অঙ্কিত ভূলম্ব রেখা লেখচিত্রকে A বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুতে অঙ্কিত ভূখণ্ডর রেখা y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করবে। B বিন্দুটি 600 সংখ্যাকে দেখাতে থাকায় 12 লিটার পেট্রোলের কেনা মূল্য 600 টাকা বলে জানতে পারব।

উদাহরণ-12 :

অজিত ঘণ্টাপ্রতি 30 কিমি বেগে একটি স্কুটার নিরবচ্ছিন্নভাবে চালাতে পারত। সময় এবং দূরত্বকে নিয়ে একটি লেখচিত্র অঙ্কন করো। লেখচিত্রকে ব্যবহার করে নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর প্রদান করো।

(i) অজিতকে স্কুটারে 75 কিমি পথ অতিক্রম করার জন্য কত সময় লাগবে?

(ii) অজিত 3 ঘণ্টা 30 মিনিট সময়ে কত পথ অতিক্রম করবে?

সমাধান :

সময় (ঘণ্টায়)	অতিক্রম্য দূরত্ব (কি.মি.তে)
1	30
2	2×3=60
3	3×30=90
4	4×30=120

সময় এবং দূরত্ব চলরাশিদ্বয়ের মধ্যে থাকা সম্পর্ককে লেখচিত্র মাধ্যমে প্রকাশ করতে হবে।

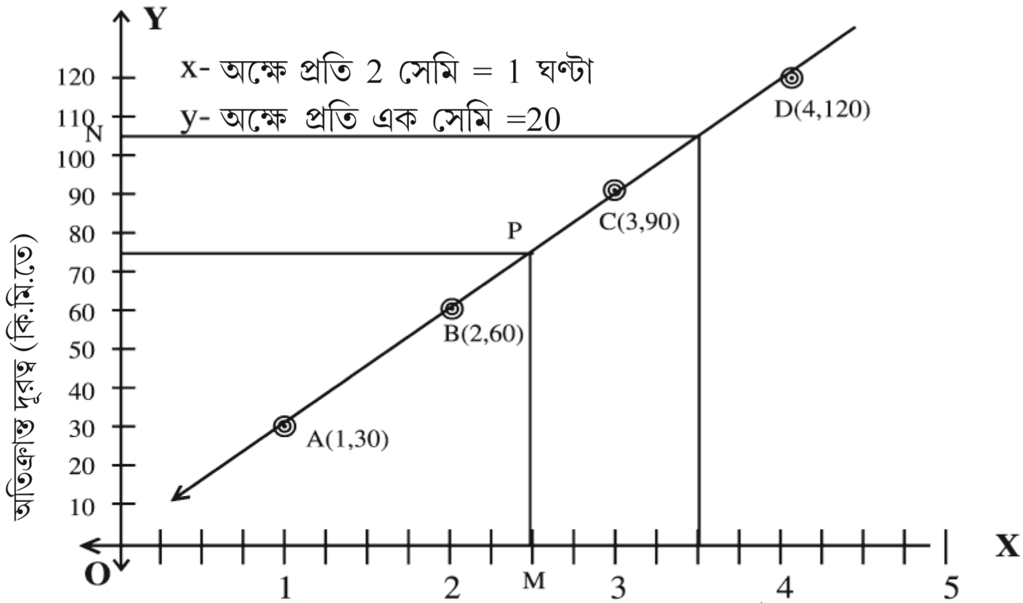
লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য সূচনা

(i) লেখকাগজে অক্ষদ্বয় চিহ্নটি করে আবশ্যকতা অনুযায়ী স্কেল চয়ন করো।

(ii) x অক্ষ সময় ঘণ্টায় এবং y অক্ষে অতিক্রম করে থাকা দূরত্ব (কিমিতে) নাও।

(iii) (1, 30), (2, 60), (3, 90) এবং (4, 120) স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট বিন্দুগুলি লেখকাগজে চিহ্নিত করো।

বিন্দুগুলি সংযোগ করে লেখচিত্র অঙ্কন করো।



চিত্র (10.29)

(iv) (a) y অক্ষে 75 কিমির জন্য x অক্ষে একটি অনুরূপ বিন্দু (M) চিহ্নিত করো যা সূচক সংখ্যা 2.5 হবে। এখানে স্পষ্ট জানা গেল যে 75 কিমি পথ অতিক্রম করার জন্য 2 ঘণ্টা 30 মিনিট লাগবে।

(b) x অক্ষে 3.30 ঘণ্টা জন্য y অক্ষে এক অনুরূপ বিন্দু (N) চিহ্নিত করা যার সূচক সংখ্যা 105 হবে। এখানে স্পষ্ট জানা গেল যে 3.30 ঘণ্টায় অজিত 105 কিমি পথ অতিক্রম করতে পারব।

নিজে করো

1. উদাহরণ-11-তে অঙ্কিত লেখচিত্রকে অনুধ্যান করে নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও।

(প্রয়োজনে লেখচিত্র অঙ্কন কর)

(i) 18 লিটার পেট্রোলের দাম কত?

(ii) 850 টাকাতে কত লিটার পেট্রোল কেনা যেতে পারে?

2. উদাহরণ-12-তে অঙ্কিত লেখচিত্রকে অনুধ্যান করে নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও।

(প্রয়োজনে লেখচিত্র অঙ্কন কর)

(i) 1 ঘণ্টা 36 মিনিট সময়ে অজিত অতিক্রম করা দূরত্বকে কিমিতে প্রকাশ করো।

(ii) 50 কিমি অতিক্রম করতে অজিতকে কত সময় লাগবে?

অনুশীলনী-10 (b)

1. নিম্নস্থ শূন্যস্থানগুলি পূরণ করো।

(a) লেখচিত্রের আনুভূমিক অক্ষকে — বলা যায়।

(b) লেখচিত্রের ভূলম্ব অক্ষকে — বলা যায়।

(c) মূল বিন্দুর স্থানাঙ্ক —।

(d) (0, 5) স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট বিন্দুটি — অক্ষ উপরে অবস্থান করবে।

(e) (3, 0) স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট বিন্দুটি — অক্ষ উপরে অবস্থান করবে।

(f) x অক্ষে অবস্থান করে থাকা একটি বিন্দুর y স্থানাঙ্ক —।

(g) y অক্ষে অবস্থান করে থাকা একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক —।

(h) (3, 4) স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট বিন্দুর ভুজ —।

(i) (9, 1) স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট বিন্দুর কোটি —।

(j) A (3, 2), B (0, 2) C (3, 0) স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট বিন্দুদের মধ্যে — x অবস্থান করবে।

2. প্রদত্ত স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট বিন্দুদের একলেখ কাগজের চিহ্নটি করো।

A (3, 0), B (5, 2), C (1, 4) D (0, 6) এবং E (2, 2)

3. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে প্রদত্ত স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট বিন্দুদের লেখকাগজের চিহ্নিত করো। এবং বিন্দুগুলিকে রুলার সাহায্যে যোগ করো।

(a) (1, 1) (2, 2) (3, 3) এবং (4,4)

(b) (2, 0) (5, 0) (1, 0) এবং (3,0)

(c) (0, 2) (0, 4) (0, 3) এবং (0,5)

4. (a) x অক্ষ সাথে সমান্তর করে এক রেখা অঙ্কন করো এবং এটা উপরিস্থ যে কোনো পাঁচটি বিন্দু চিহ্নিত করে সেগুলির স্থানাঙ্ক লেখো। সে স্থানাঙ্কগুলি কোন সাধারণ ধর্ম পরিলক্ষিত হচ্ছে লেখো।

(b) y অক্ষ সাথে সমান্তর করে এক রেখা অঙ্কন করো এবং এটা উপরিস্থ যে কোনো পাঁচটি বিন্দু চিহ্নিত করে সেগুলির স্থানাঙ্ক লেখো। সে স্থানাঙ্কগুলি কোন সাধারণ ধর্ম পরিলক্ষিত হচ্ছে লেখো।

5. নীচে কতকগুলি বর্গচিত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া গেছে সেগুলির পরিসীমা স্থির করো। বর্গচিত্রর বাহুর দৈর্ঘ্য ও সংপৃক্ত পরিসীমাকে যথাক্রমে x স্থানাঙ্ক ও y স্থানাঙ্করূপে নিয়ে লেখকাগজে বিন্দুগুলি সংস্থাপন করো এবং সেগুলিকে রুলার সাহায্যে যোগ করে দেখ যে বিন্দুগুলি একটি রেখা উপরে অবস্থান করবে।

বাহুর দৈর্ঘ্য=2 সেমি, 3 সেমি, 4 সেমি এবং 5 সেমি।

6. নিম্ন সারণীটি 3-র গুণিতকদের দেখাও।

সারণী - 26

x	1	2	3	4	5
y	3	6	9	12	15

(1, 3) (2, 6) (3, 9) স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট বিন্দুগুলি লেখকাগজে চিহ্নিত করে সেগুলিকে রুলার সাহায্যে যোগ করে দেখাও যে চিহ্নিত প্রত্যেক বিন্দু একটি রৈখিক হবে।

7. একটি লোহাকে উত্তপ্ত করা হল। নীচের সারণীতে সমস্ত ব্যবধান এবং তাপমাত্রাকে লিপিবদ্ধ করা গেছে (সময় তাপমাত্রা) আধারের বিন্দুগুলি লেখকাগজে চিহ্নিত করে দেখাও যে এটা একটি সরলরৈখিক লেখচিত্র।

সারণী -27

সময় (t) (সেকেণ্ডে)	2	5	7	12
তাপমাত্রা (T) (সেন্টিগ্রেডে)	10	25	29	39

লেখচিত্রটি অঙ্কন করে নিম্ন প্রশ্নগুলির উত্তর দাও।

(a) t=0 সময়ে তাপমাত্রা কত ছিল?

(b) T=6 সময়ে তাপমাত্রা কত ছিল?

⌘⌘⌘⌘⌘

উত্তরমালা

অনুশীলনী-1

1. ঠিক উক্তি (i), (iv), (vi), (ix) এবং (xi) অবশিষ্ট ভুল উক্তি।
2. (i) E, (ii) $\subset$ (iii) $\subset$ বা = (iv) $\not\in$ (v) $\subset$ (vi) $\supset$ 3. (i) {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} (ii) {2, 4, 6, 8} (iii) (2) (iv) 2, 4, 6, 8 (v) (-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3) (vi) সোম, মঙ্গল, বুধ, বৃহস্পতি, শুক্র, শনি, রবি (vii) ( ) (viii) 8, 16
4. (i) (x/x) একটি অযুগ্ম গণন সংখ্যা ও x<12 (ii) x/x ইংরাজি বর্ণমালার একটি স্বরবর্ণ (iii) x/x একটি পূর্ণ সংখ্যা (iv) x/ একটি মৌলিক সংখ্যা x<1+1
(v) 2n/n E N) (vi) 3n/nE N এবং n$\leq$5 (vii) (x=5^nnEN এবং $m \leq 4$
(viii) x/x ইংরেজি বর্ণমালার একটি অক্ষর (ix) x/x=2^n nEN
5. (i) (m, a, t, n, c, i, c, s) (ii) (a, r, i, t, h, m, c, e) (iii) (p, r, o, g, a, m, c) (iv) (c, o, m, i, t, e)
6. AuB= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8), A$\cap$B= {2, 4, 6} 7. A$\cup$B =2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 A $\cap$B={5, 6} 8. (i) (1, 2, 3, 4, 5) (ii) (2, 4) (iii) (2) (iv) (1, 2, 3, 4, 6) (v) {2, 3, 4,} 5, 6 (vi) {2, 3} 9. (i) A=1, 3, 4, 5 B=2, 4, 5, 6, 7 (ii) (4, 5) (iii) 1, 2, 3, 4, 5, 6) (iv) 1, 3 (v) {2, 6, 7} 10. (i) A=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 B=3, 4, 5 (ii) A$\cap$B= 3, 4, 5 (iii) A$\cup$B =1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (iv) A$\cup\phi$ =(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) (v) A$\cap\phi$ =() বা ϕ
11. (a) (a, b), (c, f), (b) (a, b, c, f) (C) ϕ বা {}

অনুশীলনী-2(a)

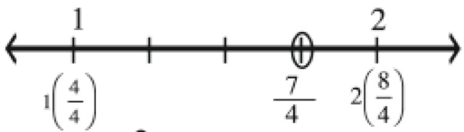
1. (i) $-\frac{2}{8}$ (ii) $\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{5}$ (iv) $\frac{2}{9}$ (v) $\frac{19}{6}$ 2. (i) $-\frac{1}{13}$ (ii) $\frac{19}{13}$ (iii) 5 (iv) $\frac{56}{15}$ (v) $\frac{5}{2}$ (vi) (-1)

3. (i) (গুণনাত্মক) অভেদ নিয়ম (ii) গুণনাত্মক ক্রমবিনিময়ী নিয়ম (iii) বিলোমী নিয়ম (iv) গুণনের সহযোগী নিয়ম 4. $\frac{-96}{91}$ 5. ব্যতিক্রম 6. ব্যতিক্রম 7. (i) 0 (ii) 1 ও -1 (iii) 0

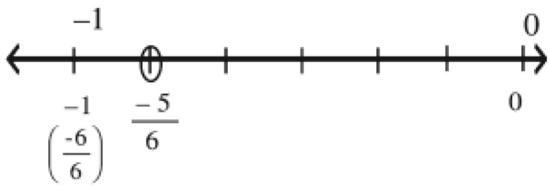
8. (i) না (ii) 1 ও -1 (iii) $-\frac{1}{5}$ (iv) x (v) পরিমেয় সংখ্যা (vi) ঋণাত্মক পরিমেয় সংখ্যা

অনুশীলনী-2 (b)

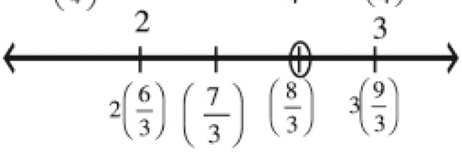
1.(i)



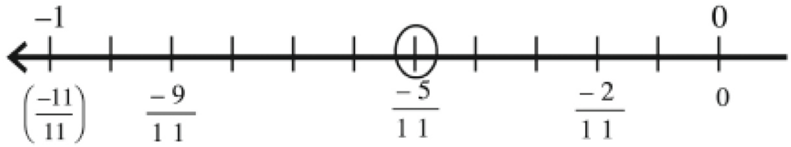
(ii)



(iii)



2.



3.(i) 1, $\frac{1}{2}$, 0, –1, $-\frac{1}{2}$, (ii) $-\frac{3}{2}$, –1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$ (অন্য উত্তরও সম্ভব) **6.** (i) $\frac{5}{7}$ (ii) $\frac{7}{9}$ (iii) $\frac{3}{7}$

অনুশীলনী-2 (c)

1. (a) $1234\times9+4=1110$
$12345\times9+5=111110$

(b) $1234\times8+4=9876$
$12345\times8+5=98765$

(c) $1537\times10001=15371537$
$24631\times100001=2463124631$

(d) $16+17+18+19+20=21+22+23+24$
$25+26+27+28+29+30=31+32+33+34+35$

(e) 1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

(f) $7^2-6^2=7+6=13$
$8^2-7^2=8+7=15$

2. (i)

	29	
83	23	17
	71	

(ii)

		23		
		37		
13	47	17	73	11
		41		
		43		

3. (i) x=2, y=4, (ii) x=2, y=3, z=6, (ii) A=3, C=7, (iv) A=1, B=0, C=8, D=9, (v) A=3, B=7, P+11, (vi) A=7, B=3, P=9, vii ও viii A, B, C-র মান যে কোনো এক অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা হতে পারে।

4. (a) 24, 210, 86 (b) 5 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা 105, 420, 235, 930, 715 5 ও 2 উভয় দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা 420, 930 (c) 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা 78, 504, 216, 774, 804, (d) 501, 213, 102, 462 ও 2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা 420, 930. 5. (a) 0, 6, (b) 1, 4 (c) 2, 2 (d) 1, 4, (e) 2, 5
6. (i) (iv) (v) ঠিক উক্তি 7 (ii) (iv) (v) ঠিক উক্তি।

অনুশীলনী-3 (a)

1. (i) 2, 5x (ii) 5, 12x (iii) -6, 4, -2x (iv) -4, -3, -5x (v) 1, -2, -x
2. (i) 7x (ii) $-x_2$ (iii) $-5x^3$ (iv) $-3x^2$ (v) 4x-4 (vi) $3x^2+2$ (vii) x^2+x (viii) x^2+3x+4
3. (i) 5x, (ii) 7x, (iii) 4x, (iv) 3x, (v) 5x.7x (vi) 2x+5y. 5y
4. (i) 10x, (ii) $9x^2$ (iii) $9x^3$ (iv) $4x^2+5x$ (v) x^3-x^2+x+7 (vi) $2x^2+2x$ (vii) $2x^2$ (viii) $2x^2+6x-4$ (ix) $6x^2-x+4$ (x) 0.

অনুশীলনী-3 (b)

1. (i) -3x, 5, -3, 2x (ii) 2x, 3, 2, 5x, (iii) -3x, -2, -3, -5x (iv) -3+2x, 2x-1, 5x, (v) 3x-2, -4 -2, 4x-6
2. (i) 3x (ii) 8x (iii) -5x (iv) 2x (v) -2x (vi) $2-x^2-x$ (vii) x^2-4x-6
3. (i) 2x (ii) $4x^2$ (iii) 0 (iv) $2x^2+4$ (v) x^2-10x (vi) 6x+8 (vii) $x^3-30x-8$

অনুশীলনী-3 (c)

1. (i) 15x, (ii) $6x^4$ (iii) 0 (iv) $3x^3$ 2. (i) -7 (ii) 1 (iii) -x, -6 (iv) $-3x^3$, 4
3. (i) x^2-1 (ii) x^3-1 (iii) x^3+1 (iv) $2x^2-3x-2$ (v) $2x^3-x^2+4x+15$ (vi) $-x^3+2x^2+17x+16$ (vii) x^4-1 (viii) $2x^4-x^3-3x^2-x+1$ (ix) x^4-x^3-x-1

অনুশীলনী-3 (d)

1. (i) 4x (ii) 6x (iii) $-4x^2$ (iv) -5x 2. (i) 2x (ii) -2x (iii) -2x (iv) 2x 3. (i) $7x^2$, (ii) -7x, (iii) -3x (iv) 7, (v) -7, 4 4. (i) $3x^2+2$, (ii) $4x^2-3$ (iii) $6x^2-2x+3$ (iv) 4x+3, (v) 6x+5 (vi) -12x+11

অনুশীলনী-3 (e)

1. (i) $6x^2+3x$, (ii) x, (iii) $3x^2+2$ (iv) 1 (v) $12x^2+8x+2$ 2. (i) x-7 (ii) x-4, (iii) x+5 (iv) x-1 (v) x^3-x+1, (vi) x^3+x+1 (vii) x^2-x+1, (viii) $-x^2-5x-6$ (ix) x^2-x-2 (x) $2x^2+3x+2$

3. (i) (x+14).42 (ii) (x-11).19, (iii) (2x-2)1-9 (iv) $(9x^2+2)$ 3 (v) $4x^2-2x+1$, -2 (vi) -x^2+x-1, -2 4. (i) -14, (ii) 2 (iii) -2

অনুশীলনী-3 (f)

1. (i) 4, (ii) 2y (iii) -4y (iv) 4xy (v) a - b 2. (i) b+2bc+c (ii) 16+8b+b, (iii) r-20r+100, (iv) 9n+12n+4 (v) 4m+4mn+n, (vi) 49p-14pq+q (vii) 4x+12xy+9y, (viii) 4m+9n+p - 12mn+6mp - 4mp (ix) x^2+y n+16= $-2xy-8y^2+8x^2$ (x) a+9p+9c+4ab+12bc+bac 3. (i) 10404 (ii) 92416, (iii) 1006009 (iv) 16008001, 4. (i) 9801, (ii) 996004, (iii) 89991 (iv) 3696 (v) 79.21 (vi) 9.975 (vii) 200 (viii) 0.08 (ix) 1800 5. (i) 10712, (ii) 26.52, (iii) 10094 (iv) 95.06 6. (i) x+6x+9 (ii) 4y+20y+25 (iii) 4a - 28a+49 (iv) 4.21m, -0.16 (v) b - a (vi) 36x-49 (vii) p-25, (viii) 9y-4x (ix) x-1 (x) 16y - 81 7. (i) x+10x+21 (ii) 16x+24x-5, (iii) 16x-24x+5, (iv) 16x+16x-5 (v) 4a+28a+45, (vi) xy^2-6xy^2+8. 8. (i) 2a+2b, (ii) 40x, (iii) 98m+128n, (iv) 41m+80mm+41n, (v) 4p-4q (vi) ab+bc, (vii) m+mn, (viii) 2a+2b+2c - 4ca (ix) 8a+10b+26c - 16ab - 4bc+16ac (x) 8x+12y - 20xy - 12yz+ 8xz. 9. (i) (2x+3y), (ii) (8m-3n), (iii) (2x-1) (iv) (x+2y+z), (v) (2x - y - z) (vi) 3x - 2y+z.

অনুশীলনী-4 (a)

1. (i) 12(x+3) 2. 4 (2a+b) 3. 11 (2y-3z) 4. 7pq (2+5r) 5. 5a (2ab +1) 6. 5abc (3a - 2b), 7. 2a $(4a^2+2a+1)$ 8. $5a^3b^3c^3$ $(6+5a^2c^3-3a^3b^3c^3)$ 9. 10 (2x+5) 10. (2x+3y) (5a-2b) 11. 4 (5x+9y) (10x+18y+3) 12. 3a (6a-5b) (3- 4a) 13. (x-2y) (5x-10y+3) 14. 2 (a+2b) (3-2a-4b) 15. (a-1) (a+b) 16. (x-y) (x-y+1) 17. (x-y) (a+2b+c) 18. (b-c) (a+b+c) 19. $x^2(a-2b)$ (x+1) 20. 2 (x+y) (4b-3a) 21. 5(a+b) (x-y) 22. (x+y) $(a^2+b^2+x^2)$

অনুশীলনী-4 (b)

1. (i) (x+y) (x+8) 2. (q+r) (p+q) 3. (a+d) (b+c) 4. (p+r) (q+r) 5. (5y - z) (3x+1) 6. (a+b) (x-y), 7. (5p+3) (3q+5) 8. (a+3b) (2-3a-9b) 9. (a+2) (a+b) 10. (x-z) (x+y) 11. (a-b) (a-c) 12. (2p-q) (p- r) 13. (x-3) (a+2) 14. (2x-5) (x+2) 15. (x+1) $(x-y^2)$ 16. $(lm-n^2)$ (m-l) 17. (x-2y) (x^2+3y^2) 18. (6a-b) (b-2c) 19. (x-11y) (x-1)

অনুশীলনী-4 (c)

1. (i) (a+3) (a+5) (ii) (x+2) (x+3) (iii) (x+6) (x+1) (iv) (x+6) (x+2) (v) (x+3) (x+8) (vi) (x+1) (x+1) 2. (i) (p-4) (p-6) (ii) (x-2) (x-6), (iii) (x-2) (x-5), (iv) (x-2) (x-7) (v) (x+7) (x-3) (vi) (x-2) (x-1) 3. (i) (a+1) (a-5) (ii) (x+3) (x-14) (iii) (x+3) (x-7) (iv) (x+9) (x-10) (v) (x+7) (x- 9) (vi) (x-2) (x-1) 4. (i) (a+7) (a+11) (ii) (a-6) (a-2) (iii) (x+2) (x-4) 5. (a-9) (a+6) 6. (x-2y-3) (x-2y-2)

অনুশীলনী-4 (d)

1. (i) (2x+1) (2x+1) (ii) (3b+2c) (3b+2c) (iii) (4a+5b) (4a+5b) (iv) (7x+8y) (7x+8y) (v) (a^2+3b^2) (a^2+3b^2)

2. (i) (3x-1) (3x-1) (ii) (4x-5y) (4x-5y) (iii) (7a-9b) (7a+9b) (iv) (8a-1) (8a-1) (v) $(10a^2-b)$ $(10a^2-b)$

3. (i) (4x+3y+5z) (4x+3y+5z) (ii) (7x+5y+z) (7x+5y+z) (iii) (2a+3b-c) (2a+3b-c) (iv) (10a-9b-7c) (10a-9b-7c) (v) (x^2-y-z) (x^2-y-z)

4. (i) (4a+3b) (4a-3b) (ii) (5a+6b) (5a-6b) (iii) (9a+10b) (9a-10b) (iv) (4a+7b) (4a-7b) (v) (12a+15b) (12a-15b) Or, 9 (4a+5b) (4a-5b) (vi) (16a+17b) (16a-17b) (vii) (20a+15b) (20-15b) Or, 25 (4a+3b) (4a-3b) (viii) (21a+30b) (21a-30b) Or, 9 (7a+10b) (7a-10b) (ix) (11a+17b) (11a-17b) (x) (9a+19b) (9a-19b) (xi) (a+b+c) (a+b-c) (xii) (a+b-c) (a-b+c)

5. (i) (a^2+1+a) (a^2+11-a) (ii) (x^2+x+1) (x^2-x+1) (iii) (x^2+3y^2+6xy) (x^2+3y^2-6xy) (iv) $(x^2+3xy+9y^2)$ $(x^2-3xy+9y^2)$ (v) $(x^2+4x+16)$ $(x^2-4x+16)$
6. (i) (a+3+b) (a+3-b) (ii) (a-2+c) (a-2-c) (iii) (2a-1-3b) (2a+1-3b) (iv) (a-3b+4c) (a-3b-4c) (v) (4a-3b+5c) (4a-3b-5c)
7. (i) (x+13) (x-15) (ii) (x+21) (x-17) (iii) (x+14) (x-8) (iv) (x+31) (x-29) (v) (x-27) (x+23) (vi) (x-19) (x+9) (vii) (x-33) (x+27) (viii) (x+16) (x-12)

অনুশীলনী-5 (a)

1. (i) 2^4, (ii) $(-2)^5$ (iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ (iv) $\left(\frac{1}{7}\right)^4$ (v) $\left(\frac{5}{3}\right)^3$ (vi) y^5 (vii) $(-p)^3$ (viii) $(a-b)^4$ (ix) $(a+b)^3$ (x) $\left(\frac{a}{b}\right)^5$

2.

ক্রমিক নম্বর	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(x)
আধার	1	-1	-1	9	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	10	10	-10
ঘাত	15	11	18	5	5	6	5	4	7	5
মান	1	-1	1	59049	-32	$\frac{1}{64}$	$\frac{32}{243}$	10000	10000000	-100000

3.

স্তম্ভ	প্রথম	দ্বিতীয়	তৃতীয়	চতুর্থ	পঞ্চম	ষষ্ঠ	সপ্তম	অষ্টম
উত্তর	64	729	2	5	4	5	$-\frac{1}{128}$	$-\frac{1}{3}$

4. (i) 10000 (ii) চতুর্থ (iii) তৃতীয় (iv) $-\frac{3}{2}$ (v) $\frac{1}{125}$
5. (i) তৃতীয় (ii) 25 (iii) 64

অনুশীলনী-5(b)

1. (i) 3^{10} (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{11}$ (iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ (iv) $(-4)^9$ (v) $\frac{3}{2}$ (vi) $(4)^9$ (vii) $(3)^{18}$ (viii) $(2)^{17}$ (ix) $(-7)^{13}$ (x) $(2)^7$ (xi) $(5)^{12}$ (xii) $(-2)^{12}$ or 2^{12} (xiii) $\left(\frac{7}{3}\right)^4$ (xxiv) $\left(\frac{3}{4}\right)^9$ (xv) $\left(\frac{a}{b}\right)^{10}$ (xvi) $\left(\frac{-a}{b}\right)^7$
2. (i) 9 (ii) 972 (iii) 8 (iv) 64 (v) $\frac{6651}{256}$ 3. (i) 5^{12} (ii) a^8b^7 (iii) a^7b^4 (iv) 1 (v) 1
4. (i) 2^{18} (ii) 3^{14} (iii) $5^{(3m-3)}$ (iv) $(-2)^{33}$ 5. (i) F (ii) T (iii) F (iv) T (v) T (vi) F (vii) T (viii) F (ix) F (x) T 6. (i) (iv) (v) (vii) (viii) ও (x)

অনুশীলনী-5(c)

1. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{1}{16}$ (iii) $\frac{1}{27}$ (iv) $\frac{1}{243}$ (v) $\frac{1}{10000}$ (vi) $\frac{1}{125}$ (vii) $\frac{1}{8000}$ (viii) $\frac{1}{125000}$ (ix) $\frac{1}{100}$ (x) $\frac{1}{100000}$ (xi) -1 (xii) -1
2. (i) 9, (ii) $\frac{125}{8}$ (iii) 10000 (iv) 0.008 বা $\frac{1}{125}$ (v) $\frac{125}{27}$ (vi) $\frac{1000}{27}$ (vii) -1, (viii) 1
3. (i) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}$ (ii) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$ (iii) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$ (iv) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$ (v) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}$ (vi) 8^{-3} (vii) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-6}$

অনুশীলনী-5(d)

1. (i) 16 (ii) 32 (iii) 3125 (iv) $\frac{3}{5}$ (v) 36 (vi) 243 2. (i) 2 (ii) 4 (iii) 81 (iv) $\frac{1}{2}$ (v) 625 (vi) $\frac{7}{2}$
3. (i) 1 (ii) 1 4. (i) a-b (ii) x-y

অনুশীলনী-6(a)

1. 729.1369, 2116, 13924, 50625

3. 28, 278, 314, 23872... বর্গ যুগ্ম সংখ্যা
113, 4315... বর্গ অযুগ্ম সংখ্যা

5. 10^2-9^2, 14^2-13^2, 16^2-15^2, 21^2-20^2, 27^2-26^2 6. (7, 24, 25) (11, 60, 61) (15, 112, 113) (12, 35, 37) (16, 63, 65) 8. 35, 49, 223, 341 9. (a), (b), (d), (f), (g) ভুল (c), (e) ঠিক

অনুশীলনী-6(b)

1. 2025, 3025, 7225, 11025, 24025, 65025. 2. 729, 1369, 2116, 6084, 9604. 3. 361, 10404, 11449. 4. 8649, 9025, 9604. 5. 2601, 2916, 3136, 3364, 3481. 6. 1225.5626, 9025, 13225, 42025, 7. 0.0144, 1.2321, 0.000009, 8. 121, 65.61, 0.36

অনুশীলনী-6(c)

1. (a) 0.6, (b) 1.1, (c) $1\frac{1}{3}$, (d) 0.03, (e) $2\frac{1}{2}$, 2. 17, 19, 28, 2.5, 3, 6, 4.4, 3.2, 3. 305, 316, 329, 273, 1502, 1371, 231, 4. 7.29, 6.03, 2.098, 0.99, 2.34, 5. (i) 2.236, (ii) 2.645, (iii) 3.162 (iv) 1.581, (v) 1.897, 6. 1.117, 1.666, 2.015, 1.811, 2.136 7. (i) 3.535, (ii) 1.539, (iii) 3.732, (iv) 0.102, (v) 9.898

অনুশীলনী-6(d)

1. 961 এবং 1024, 2. 50, 3. 35, 4. 3, 5. 48, 6. 744 মিটার, 7. 150 মিটার, 8. 580 টাকা 9. 120 জন, 10. 40, 11. 25, 12. 46.24 মিটার।

অনুশীলনী-6(e)

1. 1331, 1728, 2197, 2744, 3375, 4096, 4913, 5832, 6859, 8000, 2. (i) 12, (ii) 55, (iii) 60, (iv) 3, (v) 3, 3. 216, 4. 5, 5. 5.6, 6. 3375 ঘনসেমি 7. 8, 8. 43200 টাকা।

অনুশীলনী-6(f)

1. (i) 7, (ii) 10, (iii) 42, (iv) 54, (v) 200, 2. 1, 14, 3. 2,14, 4. 64 , 5. 5, 25.

অনুশীলনী-6(g)

1. -1, -5, -18, -26, -140, 2. 8, 3. -72, 4. -56, 5. 75, 6. 22. 7. -77, 8. 60, 9. 14, 10. -9, 11. 12, 12. পূর্ণ ঘনরাশি -64, -17, -2197 এবং ঘনমূল -4, -12, -13
13 (i) -30, (ii) -72, (iii) -300, (iv) -80

অনুশীলনী-6(h)

1. (i) $\frac{343}{729}$, (ii) $\frac{-512}{1331}$, (iii) $\frac{1728}{343}$, (iv) $\frac{-2197}{512}$, (v) $17\frac{72}{125}$, (vi) $34\frac{21}{64}$ (vii) $-\frac{125}{27}$, (viii) 0.008, (ix) 2.197, (x) 0.000027, 2. (i) $\frac{2}{5}$, (ii) $-\frac{4}{11}$ (iii) $\frac{-3}{16}$ (iv) $\frac{13}{21}$, (v) (0,1) (vi) 0.2, (vii) 1.2, (viii) 0.05, 3 (i), (iii), (iv), (vi)

অনুশীলনী-7(a)

1. (i) 9, (ii) 7, (iii) 4, (iv) 21, (v) 5, (vi) 5, (vii) 5, (viii) 2.4, (ix) -11, (x) 2.1, 2. (i) 4, (ii) 16, (iii) -5, (iv) 17, (v) 9, (vi) 2, (vii) $\frac{9}{25}$, (viii) 2, (ix) 2, (x) -10

3. (i) 10, (ii) -1, (iii) -26, (iv) $-12\frac{2}{3}$, (v) -24.

4. (i) $12\frac{1}{6}$, (ii) $\frac{2}{5}$ (iii) -26, (iv) $2\frac{1}{4}$, (v) -10

অনুশীলনী-7(b)

1. 80, 2. 72, 3. 8, 4. 11, 5. 15, 16, 6. 14, 7. 2 মিদের 200 টাকা ও রহিমের 150 টাকা। 8. 36, 9. 37, 10. 150, 11. 20, 50, 12. ছেলে 21 ও মেয়ে 18, 13. 40, 50, 14. 5 টাকা 50টি ও 10 টাকা 25টি 15. প্রস্থ 25 মি. ও দৈর্ঘ্য 50 মি. 16. $\frac{9}{12}$, 17. 70^0 18. 4 কিমি।

অনুশীলনী-7(c)

1. (i) 0 ও 3 (ii) $\frac{5}{2}$ও $\frac{5}{2}$, (iii) -2 ও 2, (iv) $\frac{4}{3}$ও $\frac{4}{3}$, (v) $\frac{5}{2}$ ও 0, (vi) 0 ও $\frac{b}{a}$, (vii) -9 ও 9, (viii) -27 ও 27. 2. (i) 3 ও -1, (ii) 5 ও -1, (iii) 5 ও -4, (iv) -3 ও -4, (v) -7 ও 5, (vi) 5 ও 1, (vii) -1 ও $\frac{3}{2}$, (viii) 1 ও $\frac{5}{3}$, (ix) a ও b, (x) -a ও b.

অনুশীলনী-8(a)

1. 500 টাকা, 2. 16%, 3. 25%, 4. $56\frac{1}{4}$%, 5. $33\frac{1}{3}$%, 6. $5\frac{5}{8}$ টাকা, 7. 650 টাকা, 8. $6\frac{2}{3}$%, 9. 600 টাকা ও 400 টাকা, 10. 500 টাকা, 11. 405 টাকা, 12. 500 টাকা, 13. প্রথম দোকান থেকে কিনলে লাভজনক। 14. 400 টাকা, 15. 817.60 টাকা, 16. 40 %, 17. 733.33 টাকা।

অনুশীলনী-8(b)

1. (i) 36%, (ii) .8 পয়সা, (iii) 12.50%, (iv) $\frac{25}{4}$%, 2. 11.480 টাকা, 3. 8700 টাকা, 4. 1500 টাকা, 5. 1620 টাকা, 6. $P\frac{(97+25)}{25}$ টাকা, 7. 10 বছর, 8. 10,000 টাকা, 9. 10% 10. $6\frac{1}{4}$% 11. 2000 টাকা, 12. $22\frac{1}{2}$ বছর, 13. 16 বছর। 14. 8% , 15. 12.958 টাকা, 16. 8%

অনুশীলনী-8(c)

1. টা. 133.12 প. 2. টা. 1717.35 প., 3. 1655 টাকা, 4. 1261 টাকা, 5. 6655 টাকা, 6. টা. 36.659 প., 7. 2 বছর, 8. টা. 367.45 প., 9. 3000 টাকা, 10. $3070\frac{5}{8}$ 11. টা. 1125.21 প., 12. টা. 103.37 প. , 13. টা. 166116.80 প., 14. 22898 , 15. 38640 টাকা।

অনুশীলনী-8(d)

1.10624 টাকা, 2. 50 টাকা, 3. 9000 টাকা, 4. 147.90, 5. 129.01, 6. 400, 20, 7. 144.07, 8. 120.26, 9. 122.65, 10. 14.

অনুশীলনী-8(e)

1. 100 টাকা 2. 1000 টাকা, 3. দুইবার, 4. (a) 5 টাকা, (b) কিছু সুদ পাবে না 5. (1) nil, (2) 22.92, 6. 127 টাকা, 7. 10.09 টাকা, 8. 144.58 টাকা , 9. 4.5%, 10. 229.00 11. 42, 43 টাকা, 12. 6%.

অনুশীলনী-9(a): 1.

x (কমলার সংখ্যা):	8	4 .	18	10	13
y (কমলার সংখ্যা):	18,	14,			

2. (a) (i) 60 টাকা, (ii) 5টি, (b) (i) 700 টাকা, (ii) 6 দিন, 3. 15টি , 4. 225 টাকা, 5টি 5. 22.50 টাকা, 6 কিগ্রা 6. 320 কিমি 5 ঘন্টা, 7. 7.50 টাকা, 8টি, 8. 12 টাকা, 9. 5 লিটার 10. 4200 টাকা, 11. 720 টাকা 12. 150টি, 108 টাকা।

অনুশীলনী-9(b): 1. (i) সলখ চলন (ii) সলখ চলন অবশিষ্ট প্রতিলোমী চলন 2. x:10, 40, y: 8, 4.k 120, 120, 120, 120, 120, 120, 3. (i) প্রতিলোমী, (ii) সলখ, (iii) সলখ, (iv) প্রতিলোমী, 4. 1 বর্গ. মি , 5. 12 জন, 6. 6টি, 7. 12 দিন, 8. 25টি, 9. 1:2:3, 10. 6 দিন, 11. 20 একর, 12. 10 মিনিট 2 কিমি।

অনুশীলনী-9(c): 1. 6 দিন 2. 20 দিন, 3. 20 দিন, 4. 10 দিন, 5. 324 মিটার, 6. 8 জন, 7. 10 ঘন্টা, 8. 27 দিন

অনুশীলনী-10(a): 4. (a) 11am, (b) 5 am, (c) 11 am, (d) 20^0c, (e) 40^0c 5. (a) 40, 45, (b) 50-55, (c) 16, (d) 40-45 (e) 5 7. (a) 120 (b) 90 (c) 5.4 (d) 90 8. (a) 270, 360, (b) 135, 135, (c) 180, (d) 135

অনুশীলনী-10(b): 1. (a) x-অক্ষ (b) y-অক্ষ (c) 0, 0 (d) y-অক্ষ (e) x-অক্ষ (f) 0, (g) 0, (h) 3, (i) 1 (j) c (3, 0)