సరళ గణితము

జ్యామితి

8వ-తరగతి

ఉపాధ్యాయ విద్య నిర్దేశాలయం మరియు
రాష్ట్ర, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ
ఒడిస్సా, భువనేశ్వర్

ఒడిశా ప్రాథమిక అదికారము
భువనేశ్వరం

సరళ **గణితము**

జ్యామితి

8వ తరగతి

రచయిత బృందం :

డా. ప్రసన్నకుమార్ శథపతి (సమీక్షకులు)

డా. రజనివల్లభ దాస్

శ్రీ నగేంద్ర కుమార్ మిశ్ర

శ్రమతి కుముదుని జి

శ్ర కైలాస్ చంద్ర స్వయ్

సంపోధనము :

శ్రీ నగేంద్ర కుమార్ మిశ్ర

శ్రమతి కుముదుని జి

శ్ర కైలాస్ చంద్ర స్వయ్

సంజోజన :

డా.సబిత సాహు

అనువాదక బృందం

వై. ధార్మారావు

కె. రామారావు

యు.కె.డి.వి ప్రసాదరావు

కె.రామినాయుడు

ఆర్. మధు కుమార్.

పచురణ : విద్యాలయ మరియు గణశిక్షా విభాగము, ఒడిషా ప్రభుత్వం

ముద్రణ సంవత్సరము : 2023

ప్రస్తుతి : ఉపాధ్యాయ శిక్షా నిర్దేశాలయం మరియు రాష్ట్ర విద్య పరిశోధన మరియు శిక్షణ పరిషత్ ఒడిషా, భువనేశ్వర్ మరియు ఒడిషా రాష్ట్ర పాఠ్య పుస్తక తయారీ మరియు ముద్రణాలయ సంస్థ, భువనేశ్వర్

ముద్రణ : పాఠ్య పుస్తక ఉత్పాదన మరియు విక్రయం, ఒడిషా, భువనేశ్వర్.

ఈ పుస్తాకము విషయములు...

ఆధునిక యుగము ఒక విజ్ఞన సకేతిక యుగము. తాత్విక మరియు ప్రయోగాత్మక విషములో గణితశాస్త్రము చాలా ఆవసరము. గణిత శాస్త్రములో సరళ గణితము ఒక ముఖ్యమైన విషయము. కావున విద్యాలయ పాఠ్యక్రమములో దీని యొక్క అవసరము చాలా అధికము.

ప్రపంచములో గల వివిద ఉన్నత దేశాల వలే భరతదేశము కూడా ఈ గణిత రంగములో ఒక ప్రముఖ పాత్ర వాదాంబినది. మాధ్యమిక విద్య కొరకు National curriculum Frame Work-2005 బుక గణిత బోదనకు ఆధిక ప్రాముఖ్యత ఇబ్బునది. దాని ననుసరించి (NCERT) పైఠ్యపుస్తకాలను తయారు చేయుచున్నది. జాతీయ విద్యవ్యవస్తను దృష్టిలో పెట్టుకొని Board of Secondary Education, Odisha మరియు (NCERT) కలిసి ఈ పాఠ్యపుస్తకము సరళ జామితి పుస్తకాన్ని తయారు చోసితిరి. చాలా అనుభవము గల రచయితలచో ఈ పుస్తకాన్ని రచించ బడినది. సిలబిస్ కమిటిలో కూడా దీని విషయములో చర్చించబడినది.

రాష్ట్ర ఉపాధ్యాయ విద్యాపరిసోధన శక్షణ సంస్థ NCERT ఇందులో గల తప్పులను సవరించుటకై వివిద ఉపాద్యామ రంగులలో చర్చ జరిపి 2016 సంవత్సరము ఈ పుస్తకాన్నీ సవరించుటకు నిర్ణయము తీసుకొటెరి. ఏదైన తప్పులు మీ అవగహనకు వస్తే దయచేసి మమ్మల్నీ తెలియజేయు వలెను.

విషయ సూచిక

రేఖా గణిత మౌలిక అవగాహన
(FUNDAMENTAL CONCEPTS OF GEOMETRY)

1వ అధ్యాయం

1.1 పరిచయం (Introduction)

Geometry పదం గ్రీకు పదాల నుండి Geo (భూమి), Metron (కొలత) ల నుండి పుట్టింది. రెండు జ్యామితి పదంలో 'జ్యా' అంటే భూమి, 'మితి' అంటే అర్థం కొలత. భూమి కొలతలకు సంబంధించి రేఖా గణితం ఏర్పడింది. మానవ నాగరికత క్రమవికాసంతో పాటు రేఖా గణితం కూడా అభివృద్ధి చెందింది.

వైదిక యుగంలో భార తీయ ఋషులు యజ్ఞయాగాదులను, పూజా రయిలు వేదికల నిర్మాణం మొదలైన కార్యక్రమాలలో ఉన్నతమైన రేఖాగణిత విజ్ఞానాన్ని ప్రయోగించెడివారు. సుమారు క్రీ।।పూ।। 800 నుండి క్రీ।।పూ 500 మధ్యకాలంలో భారత దేశంలో వ్రాయబడిన 'సులభ సూత్రం' అన్నది ఒక రేఖా గణిత శాస్త్రంగా పరి గణింపబడుతున్నది. సులభ అనగా అర్థం తాడు సహాయంతో కొలతలకు సంబంధించిన వివిధ సూత్రాలను తీసుకుని ఈ శాస్త్రం అభివృద్ధి చెందింది. మొహెంజొదారో, హరప్పా నాగరికత అవశేషాలు, ఈజిప్టు నాగరికతలో రేఖాగణితం నమూనాలు అనేక రకాలుగా గలవు.

ప్రాథమిక దశలో రేఖాగణిత సిద్ధాంతాలు, సూత్రాలు ప్రయోగాత్మకంగా నిర్ణయించడం జరిగింది. గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త అయిన థాలెస్ (క్రీపూ. 640-546) మొదట రేఖా గణితంలో తర్క శాస్త్రమును ప్రవేశపెట్టి, అంతకు ముందుగల సూత్రాలను మరియు సిద్ధాంతాలను ప్రయోగాత్మకంగా రుజువు చేయుటకు ప్రయత్నించెను. తరువాత థాలెస్ యొక్క శిష్యుడు పైథాగరస్ (క్రీపూ. 580-500) మరియు అతని తరువాత సోక్రటిస్ (క్రీపూ. 468-390), ప్లాటో (క్రిపూ 430-339), జ్యామితి (క్రీపూ. 384-322) మొదలైన గ్రీకు మేథావులు దీన్ని మరింత ముందుకు తీసుకు వెళ్లారు.

కాని క్రీపూ. నాల్గవ శతాబ్దంలో అలెగ్జాండ్రియా (గ్రీస్) యొక్క గణిత శాస్త్రవేత్త యూక్లిడ్ (Euclid) రాసిన గ్రంథం Elements లో జ్యామితి అందు సిద్ధాంతాలు ఒక్కొక్కటి స్వతంత్రమైనవి కావు అని తక్కువగా కొన్ని అంశాలను స్వీకృత సిద్ధాంతాలు చేసినచో మిగిలిన అన్ని సిద్ధాంతాలు స్వీకృత సిద్ధాంతాలుగా పరిణామమగునని తాత్వికంగా ప్రతిపాదన చేయబడెను. మొదటినుండి తీసుకున్న స్వీకృత సిద్ధాంతాల సహాయంతో హేతుబద్ధంగా కొత్త సిద్ధాంతాలను ఉత్పత్తి చేయవచ్చని పేర్కొనెను. అందుచేత యూక్లిడ్‌ను యధార్థం గా రేఖా గణిత పితామహలడిగ స్వీకరించడమైనది. అతని పేరు మీద పాఠశాలలో బోధించే రేఖాగణితమును యూక్లిడియన్ జ్యామెట్రీ (Euclidean Geometry) అందురు.

తరువాతి కాలంలో భారతీయ గణిత శాస్త్రవేత్తలలో భాస్కరుడు (జనవరి 114 క్రీ.శ) అర్యభట్టు (క్రీ.శ 580) మొదలైనవారు రేఖాగణితమును మరింత అభివృద్ధి చేసారు.

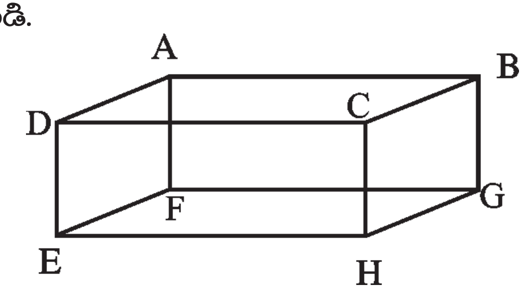
1.2 నిర్వచనం లేని పదాలు వాటికి సంబంధించిన స్వీకృత సిద్ధాంతాలు (Unidentified Terms and related postulates)

ప్రతివిషయంలో కొన్ని విశేషపదాలు నిర్దిష్టమైన అర్ధంలో వినియోగించబడును మరియు వాటికి ఆ విషయానికి సంబంధించ బడిన పదాలు (Terms) అని అందురు. బిందువు, రేఖ, సమతలం, రశ్మి, త్రిభుజం, వృత్తం మొదలైనవి జ్యామితి శాస్త్రంలో ఒక్కొక్క పదం.

బిందువు, రేఖా, మరియు సమతలం విషయం గూర్చి క్రింది తరగతిలో చదువుకున్నారు. ఈ మూడు పదాలను " మౌలిక పదాలు" లేక నిర్వచనం లేని పదాలు (Unidentified Terms) గా తీసుకుని ఈ పదాలు వాటికి సంబంధించిన స్వీకృత సిద్ధాంతాల సహాయంతో కొత్త పదాల యొక్క నిర్వచనాలను నిరూపించ వచ్చును.

ఇప్పుడు బిందువు రేఖ, సమతలం ఈ పదాల గూర్చి పునరాలోచన చేద్దాం.

బిందువు (Point) : మీరు ఒక ఇటుక ను తీసుకోండి. దానిపై ఒక బొమ్మనుగీసి క్రింది విధంగా పేర్లు పెట్టండి.



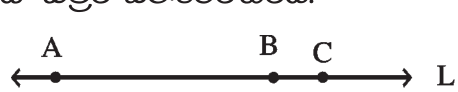
(చిత్రం 1.1)

ఒక ఇటుకకు 8 శీర్షములు A, B, C, D, E, F, G, H, ఒక్కొక్క బిందువు పేరు. అదేవిధంగా AB, BC, CD, DA, DE, EF, HC, HG, GB, AF, EH మరియు GF ఇటుయుక్క ఒక్కొక్క అంచులు.

ఇటుకకు ఎన్ని పార్శ్వములు గలవు ? మొత్తం 6 సమతల పార్శ్వములు గలవు. ఆ ఆరు సమతలములు ABCD, EFGH, ABGF, CDEH, ADEF & BCHG,

ఇప్పుడు చెప్పండి ఒక ఇటుకకు ఎన్ని శీర్షాలు, ఎన్ని అంచులు, ఎన్ని సమతలాలు ఉన్నాయి?

రేఖాఖ లేదా సరళ రేఖ (Line) : చిత్రం 1.1 లో ఇచ్చిన ఇటుకకు 12 అంచులు గలవు. ప్రతీ అంచు ఒక రేఖలో భాగం. మీ పుస్తకంలోని పేజీ అంచు, కాగితం పై పెన్సిల్‌తో గీసిన గీత ప్రతీది ఒక్కొక్క రేఖ లేదా సరళరేఖ యొక్క పరిమిత భాగానికి నమూనా. కానీ సరళరేఖ కు సరిహద్దు లేక పొడవుగా పోతునే ఉంటుంది. దీనికి ప్రారంభం గాని అంతం గాని లేవు. అందుచేత మరొక గీతను గీసి దాని రెండు చివరలయందు బాణం గుర్తులు పెట్టి దాని మధ్యలో మనం సరళరేఖ ను గుర్తుంచుకోవలెను. క్రింది చిత్రం పరిశీలించండి.



చిత్రం 1.2

ఇది ఒక సరళరేఖ యొక్క చిత్రము. సరళరేఖ కు పేరు "L" పెట్టండి. ఈ సరళరేఖ బొమ్మపై పెన్సిల్ మొనతో .... బిందువులను గురించండి ఉంచండి. దీనిని దృష్టిలో పెట్టుకుని సరళరేఖ బిందువుల యొక్క సంబంధం గూర్చి మనం ఒక స్వీకృత సిద్ధాంతాన్ని ప్రతిపాదిద్దాం.

స్వీకృత సిద్ధాంతం 1 : సరళరేఖ అనునది బిందువుల సమాహారం లేదా ఒక సెట్

కాగితంపై రెండు వేర్వేరు బిందువులను తీసుకొండి, స్కేల్ అంచునకు ఈ బిందువులను తిసుకొని మీ పెన్సిల్ సహాయంతో ఎన్ని తిన్నని గీతలు గీయగలరో పరీక్షించి చూడండి. ఒకే ఒక గీతను గీయగలరని తెలుసుకోగలరు. కనుక

స్వీకృత సిద్ధాంతం 2 : రెండు వేర్వేరు బిందువుల మధ్య ఒకే ఒక సరళరేఖను గీయగలము.

మరొక విధంగా చెప్పాలంటే రెండు వేర్వేరు బిందువులను కలుపుతూ ఒకే ఒక్క సరళరేఖను గీయగలుగుతాము.

A, మరియు B, L సరళరేఖపై రెండు వేరువేరు బిందువులు అయినచో, ఆ సరళరేఖను మనం $\overleftrightarrow{AB}$ గుర్తు ద్వారా పేరు పెట్టుకుంటాం (బొమ్మ 1.2) ను చూడండి. సెట్ భాషలో మనం చెప్పవచ్చు :

$$L = \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{CA} = \overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{CB}$$

మూడు గాని అంతకంటే ఎక్కువ గాని బిందువులు ఒకే సరళరేఖలో ఉన్నచో వాటిని సరళరేఖీయ బిందువులు (Collinear Point) అని అంటారు.

అన్ని బిందువులు ఒకే సరళరేఖలో అంతర్భాగం కానిచో వాటిని సరళరేఖలో లేని బిందువులు (non-collinear point) అని అంటారు.

సమతలం (Plane) : చిత్రం 1.1 లో ఇచ్చిన ఇటుక బొమ్మను చూడండి. దానికి ఆరు పార్శ్వములు గలవు. ప్రతీ పార్శ్వం ఒక సమతలంలో భాగం. పక్కా ఇంటి నేల, నల్లబల్లతలం, కాగితపుతలం మొదలగు వాటినుండి సమతలం అవగతమగును. మన ఆలోచనలలో అంతర్భాగంగా సమతలం ఎటువంటి సరిహద్దుద్వారా పరిమితం కాదు. సమతలానికి సంబంధించి ప్రారంభిక స్వీకృత సిద్ధాంతం :

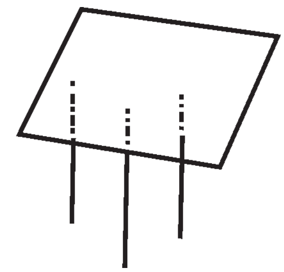
స్వీకృత సిద్ధాంతం- 3 : సమతలం బిందువుల యొక్క ఒక సమూహం అగును

సమతలాన్ని ఎలా గుర్తించగలుగుతాం ?

ఏ విధంగా అయితే ఒక రేఖను గుర్తించ డానికి కనీసం రెండు వేరువేరు బిందువులు అవసరమో, అదేవిధంగా ఒక సమతలాన్ని గుర్తించుటకై కనీసం అందులో గల మూడు బిందువులు అవసరమగును. రండిపరీక్షించిచూద్దాం.

పరీక్షాపద్ధతి - కొన సూదిగా ఉన్న రెండు పుల్లలు తీసుకుని భూమిపై లంబంగా పాతండి. ఆ రెండు పుల్లలపై పోస్టు కార్డు ఉంచడానికి ప్రయత్నించండి. పోస్టు కార్డును పట్టుకుంటే స్థిరంగా ఉండకపోవచ్చు కాని మనం వివిధ భాగాలలో పట్టి ఉంటే అది ఒకొక్క స్థితులలో రెండు కర్రపుల్లల చివరి భాగాలతో తగిలి యుండును. పోస్టుకార్డు యొక్క వేర్వేరు స్థితులు ఒక్కొక్క సమతలంను,

కర్రపుల్లల చివరిభాగాలు రెండు బిందువులను సూచించును. కాబట్టి రెండు బిందువుల ద్వారా ఒకటి కంటే అధికం సమతలాలు సూచించినట్టు అనిపించును. ప్రస్తుతం వాడి మొనగల మరొక కర్రపుల్లను తీసుకుని దాని సహాయంతో పోస్టుకార్డును ఎత్తి పట్టుకోనిండి. ఇపుడు పోస్టుకార్డు ఒక నిర్దిష్ట మైన స్థితిలో ఉన్నట్లు గమనిస్తారు. (చిత్రం 1.3) ఒకవేళ మూడు కర్రపుల్లలు ఒకే వరుసలో ఉన్నచో పోస్టుకార్డును స్థిరంగా నిలుపలేరు. పుల్లలు ఒకే వరుస లో లేనిచో పోస్టుకార్డు స్థిరంగా నిలబడును. ఈ పరీక్ష వలన లభించిన సూచనను సమతలం యొక్క ఒక ధర్మంగా తీసుకుందాం.


చిత్రం: 1.3

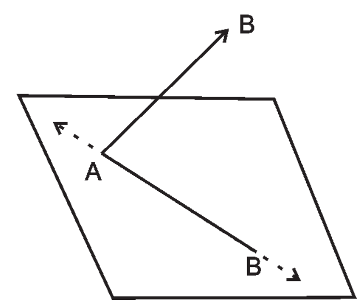
స్వీకృత సిద్ధాంతం- 4 : ఒకే వరుసలో లేని మూడు బిందువుల ద్వారా ఒకే ఒక సమతలం ఏర్పడును

మరొక విధంగా చెప్పాలంటే ఒక సమతలంలో ఒకే సరళరేఖలో లేని కనీసం మూడు బిందువులు ఉంటాయి.

ఒక సమతలం పేరు ఆ సమతలంలో ఒకే వరుసలో లేని ఏవైనా మూడు బిందువుల సహాయంపై ఆధారపడి ఉండును.

మరొక పరీక్ష చేద్దాం రండి.

ఒక దారపు ముక్కను తీసుకుని రెండు చేతులతో లాగి పట్టుకోండి. ఈ స్థితిలో దారం ఒక రేఖాభాగాన్ని సూచించును. అలా పట్టుకున్న దారం ఒక చివరను ఒక సమతల భాగం (ఉదా: నల్లబల్ల) మీద అదిమి పట్టండి. మిగిలిన చివరను మరొక చేతితో లాగి పట్టండి. (చిత్రం 1.4 లో చూపిన విధంగా) దారం యొక్క ఒక చివం **A** సమతల ఉ పరితలాన్ని తాకుతున్నది. మరొక చివర **B** పైకి లాగుచున్నది. ఈ స్థితిలో **A** ప్రాంతాన్ని విడిచినచో దారం యొక్క ఏ భాగం కూడా సమతలాన్ని తాకడం లేదు. ఇపుడు దారాన్ని అదే విధంగా లాగి పట్టుకుని మెల్ల మెల్ల గా **B** దిశగా తీసుకుని రండి. దారం యొక్క ప్రతీ స్థితిలోను **A** ప్రాంతం మినహా మరెక్కడా దారం యొక్క ఏ భాగం సమతల ఉపరితలాన్ని తాకుట లేదు. కానీ దారం **B** ప్రాంతాన్ని తాకి నంతనే దారం మొత్తం మునుపటి వలే తిన్నని స్థితిలో సమతల ఉపరితలాన్ని తాకుతున్నది.



చిత్రం : 1.4

సమతలం, ఉపరితలం తిన్నగా లాగి పట్టుకున్న దారం ఈ రెండూ సరిహద్దులు లేని వ్యాప్తి గా ఊహించుకుని మనం వరుసగా ఒక సమతలం, $\overleftrightarrow{AB}$ (**AB** సరళ రేఖ) ను అవగాహన చేసుకొనుచున్నాం. అందుచేత ఈ పరీక్ష ద్వారా మరొక విశిష్ట ధర్మాన్ని తెలుసుకున్నాము. దీనిని ఒక స్వీకృత సిద్ధాంతంగా తీసుకొవచ్చు.

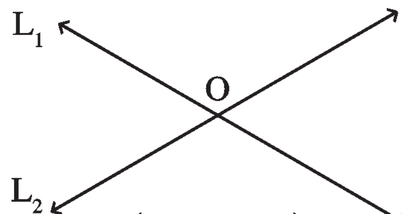
స్వీకృత సిద్ధాంతం-5 : ఒక సమతలం నందు గల రెండు వేర్వేరు బిందువులను అవగాహన కల్పించు సరళరేఖ ఆ సమతలంలోనే ఉండును.

సమతలం పేరు P అనుకుందాము. సమతలం లోని రెండు బిందువులు **A,B** అగును. స్వీకృత సిద్ధాంతం ప్రకారం $\overleftrightarrow{AB}$ సరళరేఖ, P సమతలంలో ఉన్నది. అనగా సరళరేఖ లోని అన్ని బిందువులు P సమతలంలో ఉన్నాయి. దీనిని సెట్ భాషలో $\overleftrightarrow{AB} \subset P$ అని వ్రాయవచ్చును..

1.3 సమాంతర రేఖలు (Paralled Lines) :

ఒకే సమతలంలో గల రెండు సరళరేఖల సాధారణ బిందువును ఖండన బిందువు (point of intersection) అందురు. చిత్రం 1.5 లో ఉన్న రెండు సరళరేఖలు L_1, L_2 ల ఖండన బిందువు '0'.

ఒక సమతలంలోని రెండు సరళరేఖలు పరస్పరంఖండించుకొననిచో ఆ రెండింటిని సమాంతర రేఖలు అందురు. (చిత్రం 1.6 లో) L_1, L_2 లు సమాంతర రేఖలు.



(చిత్రం 1.5)

(చిత్రం 1.6)

మీరు చెప్పండి.

(a) ఒక సమతలంలోని రెండు సరళరేఖలకు అతి తక్కువగా ఎన్ని ఖండనబిందువులు ఉండును?

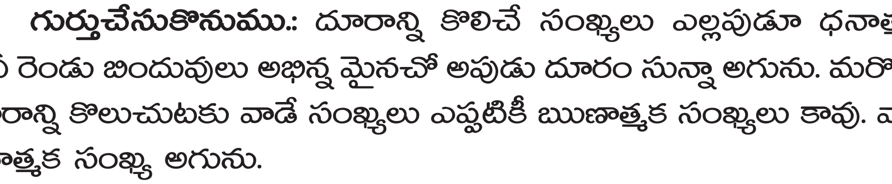
(b) ఒక సమతలంలోని మూడు సరళరేఖలకు అత్యధికముగా ఎన్ని ఖండన బిందువులు ఉండును?

(c) ఒక సమతలంలోని నాలుగు సరళరేఖలకు అతి తక్కువగా ఎన్ని ఖండన బిందువులు ఉండును?

1.4 రెండు బిందువుల మధ్య దూరం, సరళ రేఖలు, వాస్తవసంఖ్యల సెట్ మధ్య గల సంబంధము :

P, Q లు ఒకే సమతలం పైన ఉన్న రెండు వేర్వేరు బిందువులు అనుకొనుము. P, Q మీదుగా ఒకే ఒక్క సరళరేఖ సంభవము అవుతుంది. అది ఆ సమతలంలోనే ఉండును. P, Q ల మధ్య దూరాన్ని మనం సాధారణంగా స్కేలు సహాయంతో కొలుస్తాం. P, Q ల మధ్య ఒక యూనిట్ అనగా సెంటీ మీటర్లు ప్రమాణంలో తెలియజేస్తాం. స్కేలుతో కొలిచి P, Q ల మధ్య దూరం 5 సెం.మీ (అనుకొనుము) కానీ P, Q లు రెండు వేర్వేరు బిందువులు కానిచో వాటి మధ్య దూరం 0 సున్నా సెం.మీ. అగును. ఒక బిందువు దాని ఉనికి యొక్క దూరం ఏదైనా స్కేల్ లో సున్నా అగును.

గుర్తుచేసుకొనుము.: దూరాన్ని కొలిచే సంఖ్యలు ఎల్లపుడూ ధనాత్మకసంఖ్యలు అగును. కానీ రెండు బిందువులు అభిన్న మైనచో అపుడు దూరం సున్నా అగును. మరొక విధంగా చెప్పాలంటే దూరాన్ని కొలుచుటకు వాడే సంఖ్యలు ఎప్పటికీ ఋణాత్మక సంఖ్యలు కావు. వాటి విలువ సున్నా లేక ధనాత్మక సంఖ్య అగును.



(చిత్రం 1.7)

ఇపుడు మరో స్వీకృత సిద్ధాంతము చేద్దాము.

స్వీకృత సిద్ధాంతము - 6 రూలర్ స్వీకృత సిద్ధాంతము (**Ruler Postulate**) :

ఒక సమతలం లోగల బిందువుల జతలు ఒక్కొక్క ధనాత్మక వాస్తవ సంఖ్యలు. వాటిని రెండు బిందువుల మధ్యదూరం అందురు. రెండు బిందువుల మధ్యదూరం పై ఆధారపడి ఒక సరళరరేఖలోని

బిందువుల సమూహం మరియు వాస్తవ సంఖ్యల సెట్ మధ్య ఇక విశిష్టమైన సంపర్కం సంభవమగును.

పరిణామ స్వరూపం :

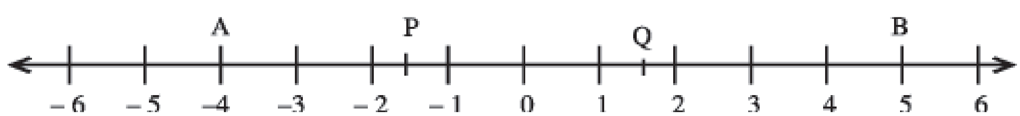
(i) ఒక సరళరేఖ యొక్క బిందువులు ప్రతీదీ ఒక్కొక్క నిర్దిష్ట వాస్తవ సంఖ్యలతో సంపూర్ణమగును. పరోక్షంగా వాస్తవ సంఖ్యలు కూడా ప్రతీది ఈ రేఖ పైగల ఒక్కొక్క బిందువుతో సంపూర్ణమగును.

(ii) సరళరేఖ పైగల ఏవైనా రెండు బిందువుల దూరం వాటిలో సంపూర్ణ మయ్యే రెండు వాస్తవ సంఖ్యల భేదం యొక్క పరిమాణంతో సమానమగును.

వ్యాఖ్య : P,Q రెండుబిందువుల మధ్య దూరం PQ లేదా QP సంకేతం ద్వారా సూచించబడును. వాడుకలో ఉన్న ఒక ప్రమాణం ద్వారా దీనిని సూచించ వచ్చును. ఉదాహరణకు PQ=5 సెంమీ. లేక 0.05 మీ., P,Q బిందువుల మధ్యదూరం PQ మధ్య దూరం కూడా అంతే. కాబట్టి PQ = QP

1.4.1 స్వీకృత సిద్ధాంతము యొక్క వ్యాఖ్యానం :

దూరాన్ని కొలుచుటకై ఒక నిర్దిష్ట ప్రమాణం (మిల్లీమీటరు, సెంటీమీటరు, మీటరు, కిలోమీటరు) ఎంచుకోవలసి ఉంటుంది. జ్యామెట్రీ పాఠాలలో మనం సాధారణంగా సెం.మీ ను ప్రమాణంగా తీసుకుంటాం. దానికొరకు ఒక స్కేలు సహాయం అవసరం స్కేలు అంచు పరిమిత పొడవు కలదైవుంటుంది అపడు ఉంటుంది. కాని ఒకవేళ ఒక అపరిమిత పొడవు గల స్కేలును కల్పితం చేసుకొనవచ్చు. దాన్ని రుణాత్మక సంఖ్యలతో పాటు అన్ని వాస్తవ సంఖ్యల బిందువులను గుర్తించుటకు ఉపయోగించుకోవచ్చు. అపుడు ఆ స్కేలు కింది విధంగా ఉంటుంది.



(చిత్రం 1.8)

చిత్రంలో చూపిన సరళరేఖలో పూర్ణసంఖ్యల ద్వారా గుర్తించిన కొన్ని బిందువులను గీతల ద్వారా చూపించడమయ్యింది. మిగిలిన బిందువులు ఇతర వాస్తవ సంఖ్యల ద్వారా గుర్తించబడును. P బిందువు వాస్తవ సంఖ్య -1, -2 మధ్యన -1. 5. మొత్తం పై చెప్పాలంటే ఏదైనా సరళరేఖలో బిందువులకు వాస్తవ సంఖ్యలు, వాస్తవ సంఖ్యలకు బిందువులు ఉండుట సంభవమగును.

దీనివలన సరళరేఖ ఒక అపరిమిత పొడవు గల స్కేలుగా మారింది. మనం వాడుతున్న స్కేలు దీనిలో ఒక అపరిమిత భాగం ఒక సరళరేఖ లోని బిందువుల సమూహం, వాస్తవ సంఖ్యల సెట్ లో గల సంబంధమును "ఒకదాని కొకటి సంబంధం" అందురు.

1.4.2 రెండు బిందువుల మధ్యదూరం -

అనుకొనుము చిత్రం 1.8 లో P, Q లు రెండు బిందువులు. ఈ రెండు బిందువులతో సంపూర్ణం అయ్యే వాస్తవ సంఖ్యలు వరుసగా P,Q అందుచేత స్వీకృత సిద్ధాంతం-6 ను అనుసరించి P, Q మధ్య దూరం PQ= P-Q యొక్క పరమమానం అనగా I P-Q I (ఒకవేళ P>Q. Q-P ఒకవేళ Q>P)

ఒకవేళ P,Q రెండు బిందువులు తో సంపూర్ణమయ్యే రెండు సంఖ్యలు వరుసగా -4, మరియు 5 అయినచో అపుడు PQ = I -4 -5 I = I -9 I = 9 యూనిట్లు అగును.

x యొక్క పరమ మానంఅనగా [x]= ఒకవేళ x సున్నా లేక-ధనాత్మక

వాస్తవ సంఖ్య అయినప్పుడు [x] = x ఒకవేళ x ఒక-రుణాత్మక వాస్తవ సంఖ్య అయినప్పుడు

గుర్తుంచుకోయండి :

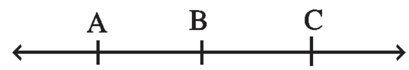
(i) సరళరేఖ అసంఖ్యాకమైన బిందువులను కలిగియుండును. (ఎందుకంటె వాస్తవ సంఖ్యల సెట్ అపరిమితమైనది)

(ii) సరళరేఖకు ఆది బిందువు, అంత్య బిందువు లేవు. (ఎందుకంటె అన్నిటి కంటె పెద్ద, అన్నిటి కంటె చిన్న వాస్తవ సంఖ్యను ఎవరూ చెప్పలేరు కనుక)

(iii) సరళరేఖ అవిచ్ఛిన్నంగా వ్యాపిస్తుంది. (అనగా సరళరేఖ వంపు లేదు)

1.5 మధ్యస్థం (Betweenness)

చిత్రం 1.9 ని పరిశీలించండి.



(చిత్రం-1.9)

ఒకవేళ A, B, C మూడు బిందువులైనచో

(i) పరస్పరం వేరు అగును.

(ii) ఒక సరళరేఖపై ఉండవలెను.

(iii) AB + BC = AC అయినచో అప్పుడు B ని A, C బిందువులు రెండింటి మధ్యస్థ బిందువు అందురు. సాంకేతిక భాషలో దీన్ని A-B-C లేక C-B-A గా రాయవచ్చును. B బిందువే కాకుండా A, C బిందువులు రెండింటి మధ్యలో అసంఖ్యాక మధ్యస్థ బిందువులు గలవు. మధ్యస్థంనకు సంబంధించిన స్వీకృత సిద్ధాంతాన్ని మొట్టమొదట మొరిజ్‌పాశ్చ్ (Moritz Pasch) ప్రకటించెను.

రేఖా ఖండం (Line segment or Segment) **:**

చిత్రం 1.9 లో A, B రెండు వేరు వేరు బిందువులు. A, B మధ్యస్థ బిందువులను విడిచిపెట్టి సరళరేఖలోని ఇతర బిందువులన్నింటిని తప్పించినచో చిత్రం 1.10 (ii) వలే కనిపిస్తుంది. ఇది ఒక రేఖా ఖండం చిత్రం అగును.

(చిత్రం 1.10 (i))

(చిత్రం 1.10 (ii))

నిర్వచనం : రెండు వేరు వేరు బిందువులు A, B లతో పాటు వాటి మధ్యస్థ బిందువుల సెట్‌ను A, B ల ద్వారా నిరుపితమయ్యే రేఖాఖండం అందురు. దీన్ని $\overline{AB}$ ద్వారా సూచించవలెను $\overline{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$. సెట్ పరిభాషలో రేఖాఖండం చివరి బిందువులు A, B లను చివరి బిందువులు అందురు.

గుర్తుంచుకోండి : $\overline{AB}$ చివరి బిందువులు A, B లు. కాని $\overleftrightarrow{AB}$ కి ఎటువంటి చివరి బిందువులు లేవు.

రేఖాఖండం పొడవు : ఏదైనా రేఖాఖండం యొక్క చివరి బిందువుల మధ్య దూరాన్ని ఆ రేఖాఖండం యొక్క పొడవు అందురు. $\overline{AB}$ పొడవు =AB (చివరి బిందువులు A, B ల A, B మధ్య దూరం)

రేఖాఖండం పొడవు ఎల్లప్పుడూరి ఒక ధనాత్మక సంఖ్య అగును. $\overline{AB}$ ని A, B రేఖాఖండం పొడవని చదవవలెను.

రేఖా ఖండం మధ్య బిందువు :

$\overline{AB}$ పై M ఒక బిందువై యుండి AM = MB అయినచో M ను $\overline{AB}$ యొక్క మధ్యబిందువు అందురు. ఇచ్చట $AM = MB = \frac{1}{2} AB$ అగును.

ఒక రేఖాఖండం పై ఒకే ఒక మధ్య బిందువు ఉండును

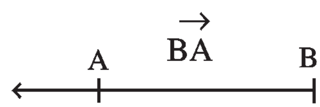
కిరణం (లేక) రశ్మి **(Ray)** : A,B లు రెండు వేరు వేరు బిందువుల ద్వారా సూచించే సరళరేఖ $\overleftrightarrow{AB}$ అవుతుంది. $\overline{AB}$ AB యొక్క రేఖాఖండం.

(చిత్రం 1.11)

AB రేఖాఖండం ($\overline{AB}$) మరియు B తరువాత అన్ని బిందువులతో ఏర్పడే రేఖా భాగాన్ని కిరణం లేక రశ్మి (Ray) అందురు. AB కిరణంను $\overrightarrow{AB}$ గా రాయవలెను. అదే విధంగా AB రేఖాఖండం $\overline{AB}$, A కి తరువాత అన్ని బిందువులతో ఏర్పడే రేఖ యొక్క భాగం మరొక కిరణం $\overleftarrow{AB}$ అగును.

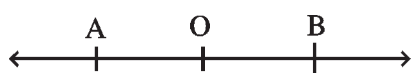
$\overrightarrow{AB}$ ను AB కిరణం అని చదవవలెను.

చిత్రం 1.12 (i)



చిత్రం 1.12 (ii)

$\overrightarrow{AB}$ శీర్షబిందువు (vertex) A అవుతుంది. $\overrightarrow{BA}$ శీర్షబిందువు B అవుతుంది. ఒక రశ్మి శీర్షబిందువును ఆది బిందువు (Initial Point) అని కూడా అందురు. అనుకొనుము A–O–B అనగా A,B ల మధ్యస్థ బిందువు "O" అగును.



చిత్రం 1.12 (iii)

ఈ విషయంలో $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ కి వ్యతిరేక కిరణం (Opposite Ray) అందురు $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB} = \overleftrightarrow{AB}$.

స్వయంగా చేయండి.

మీ నోట్ పుస్తకంలో $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ మూడు కిరణాలను నిర్మించండి. అవి

(a) ఏ రెండు కిరణాలు వ్యతిరేక కిరణాలు కాకూడదు.

(b) ఇచ్చిన కిరణాలలో ఏవైనా రెండు వ్యతిరేక కిరణాలై యుండాలి. రెండు కిరణాలు ఒక సరళరేఖ యొక్క భాగాలు అయినచో వాటిని "ఏక రేఖీయ లేక సరళరేఖీయ" (Collinear rays) కిరణాలు అందురు. రెండు కిరణాల ఒకే సరళరేఖ యొక్క భాగాలు కానిచో వాటిని (non-collinear rays) అందురు.

స్వయంగా చేయండి.

1. (a) మీ నోట్ పుస్తకంలో ఒకే X, Y, Z వరుసలో లేని మూడు బిందువులను గుర్తించి $\overline{XY}$, $\overrightarrow{YZ}$, $\overleftrightarrow{XZ}$, లను నిర్మించండి.

   (b) మీ నోట్ పుస్తకంలో ఒక వరుసలో లేని A, B, C బిందువులను గుర్తించి $\overrightarrow{AB}$ $\overline{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ లను నిర్మించండి.

రేఖాఖండం, రశ్మి, సరళరేఖల **మధ్య సంబంధం :**

బొమ్మ 1.8 ని బట్టి చూడగా AB రేఖాఖండం యొక్క అన్ని బిందువులు 'AB' రశ్మిలోను, రశ్మిలోని బిందువులన్నీ సరళరేఖలోను. ఉన్నాయి. అందుచేత సెట్ బాషలో అదే విధంగా

$\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$ అదే విధంగా $\overline{BA} \subset \overrightarrow{BA} \subset \overleftrightarrow{BA}$

స్వయంగా చేయండి. ఏది దేనికి ఉపసెట్ అగునో రాయండి.

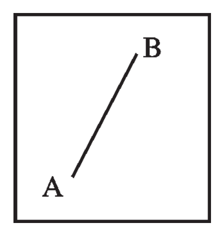
(a) $\overline{PQ}$ ని $\overrightarrow{PQ}$ (b) $\overline{CD}$; $\overrightarrow{CD}$ (c) $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BA}$

(ii) A–P–B అయినచో $\overrightarrow{AB}$ పై గల రెండు వ్యతిరేక రశ్మిల పేర్లు రాయండి.

1.6 కుంభాకార సెట్ (Convex Set) :

దీర్ఘచతురాస్రాకారంలో ఉన్న ఒక కాగితంను తీసుతీసుకొండి. (బొమ్మ 1.13 చూడండి). A, B లు అందులోని రెండు బిందువులు అనుకుందాం. $\overline{AB}$ ని నిర్మించండి. రేఖాఖండం పూర్తిగా కాగితం తలంపై ఉంటుంది. అనగా $\overline{AB}$ యొక్క అన్ని బిందువులు కాగితం తలంపై ఉన్నాయి. (స్వీకృత సిద్ధాంతం-5) కాగితం తలంపై గల బిందువుల సెట్‌ను అనుకున్నచో అప్పుడు $\overline{AB}$ ని యొక్క ఒక ఉపసెట్ (Subset) అందురు. సెట్ భాషలో దీన్ని $\overline{AB} \subset S$ గా రాయవలెను.

A, B రెండు బిందువులను కాగితం ఉపరితలంపై ఏ స్థానంలో తీసుకున్నప్పటికి $\overline{AB}$ పూర్తిగా కాగితం తలంపై ఉన్నాయి. అనగా A, B లు కాగితం ఉపరితలం పై ఏవైనా రెండు బిందువు లైనప్పటికి వాటిని కలిపే రేఖాఖండంతో పాటు కాగితం ఉపరితలం పైనే ఉండును. అనగా $\overline{AB} \subset S$ అగును.



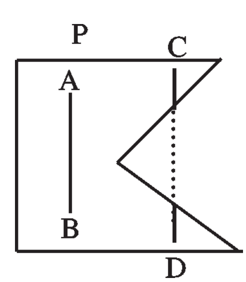
బబమ్మ (1.13)

ఇప్పుడు కాగితాన్ని బొమ్మలో చూపినట్లు A, B రెండు బిందువులను తీసుకోండి. A, B లను కలుపు రేఖాఖండం అనగా పూర్తిగా కత్తిరించిన కాగితంపై ఉండగలుగుతుంది.

మరలా కాగితాన్ని కత్తిరించి బొమ్మ 1.14లో చూపినట్లు తయారు చేయండి.

ఈ కత్తిరించిన బిందువులతో ఏర్పడే సెట్‌ను అనుకోండి.

కత్తిరించిన కాగితం ఉపరితలంలో బొమ్మలో చూపినట్లు మరి రెండు బిందువులు C, D లను తీసుకోండి. C, D లను కలుపు రేఖాఖండమును కాగితం తలంపై సంపూర్ణంగా నిర్మించలేదు. (పరీక్ష చేసి చూడండి.) దీని అర్థం $\overline{CD}$, P యొక్క ఉపసెట్ కాదని చెప్పగలం (కత్తిరించిన కాగితం తలంపై బిందువుల సెట్‌ను P అనుకున్నాం గుర్తించుకోండి.)



బబమ్మ (1.14)

దీన్ని బట్టి చూడగా A, B లు రెండు బిందువులైనచో, వాటిని కలిపే రేఖాఖండం ఎల్లప్పుడు కత్తిరించిన కాగిత తలంపై ఉండలేదు. (కేవలం కొన్ని విశేష పరిస్థితులలో మాత్రమే కత్తిరించిన కాగితం తలంపై ఉండగలదు.) అందుచేత $\overline{AB} \subset P$ అన్నది ఎల్లప్పుడు వాస్తవం కాదు.

అందుచేత బిందువు సెట్ కి (అనగా మొదట తీసుకున్న కాగితం తలపై బిందువుల సమూహం) సెట్ కాదు (కత్తిరించిన కాగిత తలంపై గల బిందువుల సమూహం) అందుచేత సెట్ ఒక స్వతంత్రమైన సెట్ అవుతుంది. అది కుంభాకార సెట్ (Convex Set) అగును.

ఇప్పుడు కుంభాకార సెట్‌ను నిర్వచనం చేద్దాం.

నిర్వచనం : సెట్ S లో A, B లో లు ఏవైనా రెండు బిందువులైనచో, $\overline{AB} \subset \overline{S}$ అయినచో కుంభాకార సెట్ అగును.

నిర్వచనాన్ని అనుసరించి (కత్తిరించిన కాగితం తలంపై బిందువుల సమూహం) ఒక కుంభాకార సెట్ కాదు.

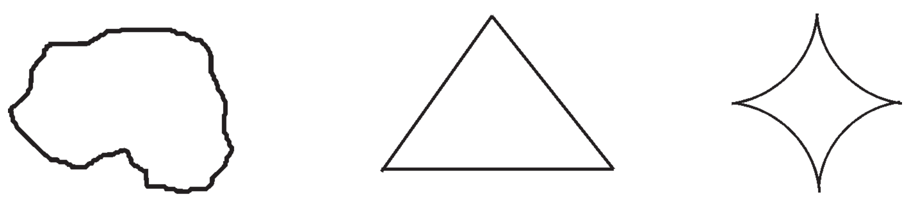
కుంభాకార సెట్‌కు మరికొన్ని ఉదాహరణలు :

బొమ్మ (1.15)

(i) సరళరేఖలో గల ఏవైనా రెండు బిందువుల కొరకు $\overline{AB}$ కూడా L లో ఉండును. అందుచేత సరళరేఖ ఒక కుంభాకార సెట్ అగును.

(ii) కిరణం, సమతలం మొదలైనవి కూడా ఒక్కొక్క కుంభాకార సెట్ అగును.

మీరు చేయవలసిన పని కింది బొమ్మలలో ఏవి కుంభాకార సెట్‌లో కనుగొనండి.



(i) (ii) (iii)

(బొమ్మ-1.16)

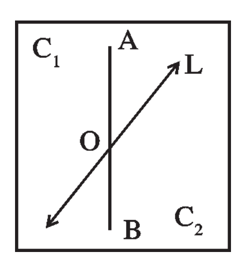
కుంభాకార సెట్‌నకు సంబంధించిన కొన్ని అంశాలు :

(i) రెండు కుంభాకార సెట్‌ల ఖండనా కూడా ఒక కుంభాకార సెట్ అగును.

(ii) రెండు కుంభాకార సెట్‌ల సంయోగం కుంభాకార సెట్ కాకపోవచ్చును.

1.7 సరళరేఖ యొక్క పార్శ్వములు (Side of line) :

పార్శ్వం లేక ప్రక్క అనే పదంను మనం ఉనికిని తెలియజేయుటకై ఉపయోగిస్తాం. జ్యామెట్రీలో పార్శ్వ శబ్దాన్ని ఉపయోగించుటకై మనకు ఒక స్వీకృత సిద్ధాంతం అవసరం. ఇప్పుడు ఒక పరీక్ష చేద్దాం రండి.



(బొమ్మ-1.17)

కాగిత తలంపై ఒక సరళరేఖ L ను గీయండి. ప్రక్కన గల బొమ్మను చూడండి. కాగితం తలం వైశాల సరళరేఖపై లేని బిందువులను C_1 C_2 సెట్‌లు అనుకుందాం (బొమ్మ 1.17)

మీరు పరీక్ష ద్వారా తెలుసుకోగలరు C_1 మరియు C_2 రెండూ కుంభాకార సెట్‌లని (Convex Set).

ఇప్పుడు కాగిత తలంపై ఏవైనా రెండు బిందువులను తీసుకోండి. అవి A, B అనుకుందాం సెట్ C_1 లో సెట్ C_2 లో B ఉండవలెను. A, B బిందువులను కలుపు రేఖాఖండం $\overline{AB}$ ను నిర్మించండి. $\overline{AB}$, L ను ఖండించుటను చూడగలరు. L సరళరేఖ AB రేఖాఖండం సాధారణ బిందువు ను వాటి ఖండన బిందువు (Intersecting Point) అందురు.

స్వీకృత సిద్ధాంతం - 7 సమతల విభజన (Plane Separation) :
అనుకొనుము L సరళరేఖ P సమతలంపై ఉంది. సమతలంలో L సరళరేఖ పైలేని బిందువుల సెట్ C_1, C_2 లను కింది విధంగా సిభజించవచ్చు.
(i) C_1, C_2 లు ఒక్కొక్క కుంభాకార సెట్‌లు అగును.
(ii) రెండు వేరు వేరు బిందువులు A, B వరుసగా C_1, C_2 సెట్‌లలో ఉన్నచో A, B లను కలిపే రేఖాఖండం అనగా $\overline{AB}$, L సరళరేఖను ఖండించును.

పై స్వీకృత సిద్ధాంతాన్ని బట్టి చూడగా కింది విషయం స్పష్టమగుచున్నది.

1. (i) C_1, C_2 లు ఒక్కొక్క సున్నా కాని సెట్‌లు.

   (ii) C_1, C_2 లు ఖండన కాని సెట్‌లు అనగా ఏదైనా ఒక బిందువు C_1, C_2 రెండింటిలోను ఉండలేదు.

2. స్వీకృత సిద్ధాంతం-7 ను బట్టి ఒక సమతలంలో అసంఖ్యాకమైన బిందువులు అవిచ్ఛిన్నంగా ఉండవచ్చును. అనగా సరళరేఖ వలే సమతలంలో కూడా ఎటువంటి ఖాళీ ఉండదు. సమతలంపై ఏ బిందువు మీదుగానైనా అసంఖ్యాకమైన సరళరేఖలు, కిరణాలు ఉండవచ్చును.

నిర్వచనం : సరళరేఖ పార్శ్వం :

ఏదైనా సమతలంలోని ఒక పార్శ్వము పేరు ఆ పార్శ్వమందు గల ఏదైనా బిందువును తీసుకొని పేరు పెట్టడమగును. L సరళరేఖకు ఏ పార్శ్వమందు A ఉండునో దాన్ని L సరళరేఖ యొక్క A పార్శ్వం అందురు. అదే విధంగా B ఉన్న పార్శ్వంను L సరళరేఖ యొక్క B పార్శ్వం (ప్రక్క) అందురు.

షరా : $\overline{AB}$ రేఖాఖండం లేక $\overrightarrow{AB}$ రశ్మి యొక్క రెండు పార్శ్వంలంటే $\overleftrightarrow{AB}$ సరళరేఖ యొక్క రెండు పార్శ్వములని అర్థమగును.

అభ్యాసం 1(a)

1. బ్రాకెట్లలోని పదాలలో సరైన పదాన్ని ఎంచి ఖాళీలను పూర్తి చేయండి.

   (i) ఒక సరళరేఖలో ______________ బిందువులు గలవు.

   (a) ఒకటి (b) రెండు (c) అసఖ్యాకం

   (ii) ఒక రేఖాఖండంలో ______________ చివరి బిందువులు గలవు.

   (a) ఒకటి (b) రెండు (c) అనేకం

   (iii) ఒక రేఖాఖండంలో కేవలం ______________ మధ్య బిందువులు ఉండును.

   (a) ఒకటి (b) రెండు (c) అనేకం

   (iv) ఒక కిరణంలో ______________ ఆది బిందువులు గలవు. అసఖ్యాకం

   (a) ఒకటి (b) రెండు (c) అనేకం

2. కింది వాక్యాలలో సరైన దాని ప్రక్కన '✓' గుర్తు, తప్పైన దాని ప్రక్కన '×' గుర్తు చేర్చండి.

(i) సంఖ్యారేఖలో అసంఖ్యాక చివరి బిందువులు ఉండును. [ ]

(ii) ఒక రశ్మికి ఒకే ప్రారంభ బిందువు ఉండును. [ ]

(iii) ఒక రేఖాఖండంలో కేవలం ఒకే మధ్య బిందువు ఉండును. [ ]

(iv) A, B ల మధ్యస్థ బిందువు P అయినచో, $\overline{AB}$ అది యొక్క మధ్య బిందువు అగును. [ ]

(v) రెండు వేర వేరు బిందువులకు ఒక మధ్యస్థ బిందువు ఉండును. [ ]

(vi) A, B, C లు ఒక రేఖపై గల బిందువులైనచో $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ లు ఒకే రేఖలోని కిరణములగును. [ ]

(vii) $\overleftrightarrow{AB}$ యొక్క A, B ల మధ్యస్థం 'O' ఒక బిందువైనచో $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ లు రెండు పరస్పరం వ్యతిరేక కిరణాలగును. [ ]

3. (a) నాలుగు వేరు వేరు బిందువులలో ఏవైనా మూడు బిందువులు ఒక సరళరేఖలో లేనిచో వాటి ద్వారా ఎన్ని రేఖాఖండాలను నిర్మించ వచ్చును ?

(b) పరస్పరం వేరుగా ఉన్న నాలుగు బిందువులలో మూడు బిందువులు ఒకే సరళరేఖపై ఉన్నచో వాటి ద్వారా ఎన్ని రేఖాఖండాలు నిర్మించవచ్చును ?

4. A, B, C లు ఒకే రేఖపై గల బిందువులు. AB = 8 యూనిట్లు, AC = 4 యూనిట్లు అయినచో కింది వానిలో ఏది సంభవమౌతుంది ?

(a) B—A—C (b) A—C—B (c) A—B—C

5. సాధారణ శీర్షబిందువు గల ఏడు కిరణాలు ఇవ్వడమయ్యింది. వాటిలో ఎన్ని జతల వ్యతిరేక కిరణాలు ఉండును ?

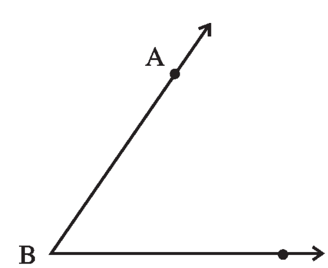
6. ఇచ్చిన పదాలను నిర్వచించండి.

క) సమతల పార్శ్వం ఖ) కుంభాకార సెట్

1.8 కోణం (Angle) :

నిర్వచనం : మూడు వేరు వేరు బిందువులు A, B, C ఒకే సరళరేఖపై లేనిచో $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ కిరణాలు రెండింటి సంయోగం (Union) ను ఒక కోణం అందురు. (బొమ్మ 1.18) దీన్ని $\angle ABC$ సంకేతం ద్వారా రాయవలెను. కోణంగా చదవవలెను.

సెట్ బాషలో $\angle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$



బొమ్మ (1.18)

సూచన : (i) లు ఒకే రేఖపై లేని బిందువులు అగుటవల్ల ఒక నిర్ధిష్ట సమతలంలో ఉండును. అందుచేత $\angle ABC$ కూడా ఒక సమతలంలో ఉండును.

(ii) ABC బిందువును $\angle ABC$ యొక్క శీర్షబిందువు $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ అని కిరణాలు రెండింటిని భూజాలని అందురు.

స్వయంగా చేయండి : (1) A, B, C లు ఒక సరళరేఖలో లేని మూడు బిందువుల అయినచో కింది ప్రతీ జత కిరణాల కలయిక వల్ల ఏర్పడే రేఖా చిత్రాల పేర్లు రాయండి.

(i) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ (ii) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ (iii) $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$

(iv) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ (v) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$ (vi) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$

2. (a) $\angle PQR$ యొక్క శీర్షబిందువు పేరు రాయండి

(b) $\angle ABC$ లో ఎన్ని భుజాలు గలవు ? వాటి పేర్లు రాయండి.

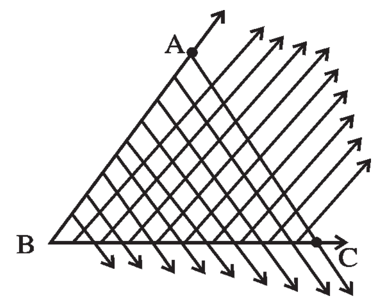
(c) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ పరస్పరం వ్యతిరేక కిరణాలైనచో $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ కలయిక వల్ల ఏం ఏర్పడుతుంది ?

(d) A శీర్షం $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ భుజాలు గల కోణం పేరేమిటి ?

1.8.1 కోణం యొక్క అంతర్భాగం, బాహ్యభాగం (Interior & Exterior of an angle) :

బొమ్మ **1.19** లో $\angle ABC$ నిర్మించబడియున్నది. ఇది ABC సమతలంలో ఉన్నది. ఈ సమతలంలో $\overrightarrow{BC}$ కి A ప్రక్కన $\overrightarrow{BA}$ కి C ప్రక్కన గల అన్ని బిందువులతో కోణం యొక్క అంతర్భాగం ఏర్పడింది. అనగా ఆ బిందువుల సెట్ $\angle ABC$ యొక్క అంతర్భాగమగుచున్నది. దీన్ని '**X**' గుర్తులచే గుర్తించడమయ్యింది.

ABC సమతలం యొక్క బిందువులలో ఏవి $\angle ABC$ అంతర్భాగంలో లేవో $\overrightarrow{BA}$ లేక $\overrightarrow{BC}$ కిరణాలలో లేవో ఆ బిందువుల సెట్‌ను యొక్క బాహ్య లేక వెలుపుల భాగం అందురు.



బొమ్మ (1.19)

వ్యాఖ్యా : (i) కుంభాకార సెట్ నిర్వచనలను అనుసరించి కోణం యొక్క అంతర్భాగం ఒక కుంభాకార సెట్ అగును. కాని బాహ్యభాగం కాదు.

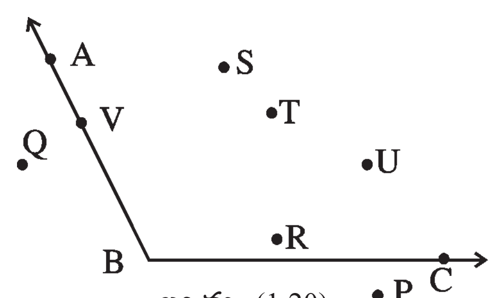
(ii) కోణం స్వయాన కుంభాకార సెట్ కాదు.

(iii) $\angle ABC$, $\angle ABC$ యొక్క అంతర్భాగం; $\angle ABC$ యొక్క బాహ్యభాగం ఈ మూడింటి సెట్‌లు పరస్పరం అఖండితాలు (Mutually disjoint) అనగా వాటిలో ఏ రెండు సెట్‌ల మధ్య కూడా సాధారణ బిందువు కాదు.

స్వయంగా చూడండి : ప్రక్కన గల బొమ్మను చూడండి. A, B, C, P, Q, R, S, T, U, V బిందువులలో $\angle ABC$ పైన, అంతర్భాగంలోని, బాహ్యభాగంలోని గల బిందువుల పేర్లును కింది పట్టికలో రాయండి.

పైన గలవి	అంతర్భాగంలో	బాహ్యభాగంలో

పట్టిక : **1.1**

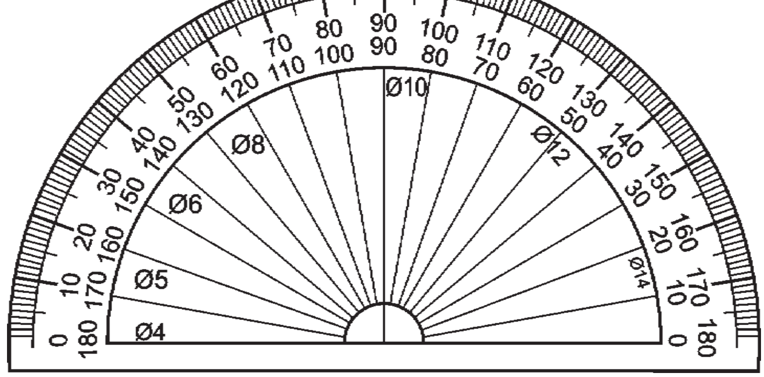


బొమ్మ (1.20)

1.8.2 కోణం కొలత (Measure of an angle) :

$m\angle ABC$ అన్నది $\angle ABC$ యొక్క పరిమాణం. ఇది ఒక వాస్తవ సంఖ్య. కాని $\angle ABC$ అన్నది బిందువు సెట్.

ఒక కోణ పరిమాణం తెలుసుకొనుటకై కోణమాినిని లేక ప్రోటాక్టర్‌ను ఉపయోగించవలెను. దీని గూర్చి కింం తరగతులలో నేర్చుకున్నారు. ప్రొటాక్టర్ సహాయంతో ఇచ్చిన ఒక కోణాన్ని ఎలా నిర్మించాలో మీకు తెలుసు.



(బొమ్మ 1.21)

ప్రొటాక్టర్ సహాయంతో కోణాన్ని కొలుచుట, కోణం నిర్మించుటకు సంబంధించిన విషయాన్ని కింది స్వీకృత సిద్ధాంతం ద్వారా తెలుసుకుందాం

స్వీకృత సిద్ధాంతం : ప్రొటాక్టర్ స్వీకృత సిద్ధాంతం (Protractor Postulate) :

ప్రతీ కోణంతో '0' కంటె ఎక్కువ 180 కంటె తక్కువ గల ఒక నిర్దిష్ట వాస్తవ సంఖ్య సంబంధం కలిగియున్నది. దాన్ని కోణ పరిమాణం అందురు. $m\angle ABC$ ని కింది విధంగా నిరూపించవచ్చు.

(i) 0 కంటె ఎక్కువ 180 కంటె తక్కువ గల ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్య x కొరకు ABC సమతలంలో $\overrightarrow{BC}$ యొక్క ఏదైనా ఒక ప్రక్క వ్యాపించియున్న ఒకే ఒక కోణం $\overrightarrow{BM}$ ఉండును. ఎలా అంటె అగును. (సాధారణంగా $m\angle MBC= x$ గా రాయవలెను.)

(ii) $\angle ABC$ యొక్క అంతర్భాగంలో ఒక బిందువైనచో $m\angle ABC = m\angle ABP + m\angle PBC$ అగును.

వ్యాఖ్య :

ప్రొటాక్టర్ స్వీకృత సిద్ధాంతం :-

1. (i) కోణ పరిమాణం 0 నుండి ఎక్కువ 180 కంటె తక్కువ అని స్వీకృత సిద్ధాంతం చేసినచో లభించిన పరిమాణంను కోణం యొక్క డిగ్రీ కొలత అందురు. అందుకు తగిన ప్రొటాక్టర్‌ను డిగ్రీ-ప్రొటాక్టర్ అందురు. ఈ ప్రొటాక్టర్‌లో $\angle ABC$ యొక్క పరిమాణం x అయినచో $\angle ABC = x^0$ (డిగ్రీ) గా రాయవలెను. అనగా యొక్క పరిమాణం x^0 అగును. డిగ్రీ యూనిట్‌ను మరింత చిన్న యూనిట్‌లలో కూడా చెప్పవచ్చును.

   1^0= 60 మినిట్లు ; 1 మినిట్ = 60 సెకండ్లు

   క్లుప్తంగా 10 = 60 మరియు $1^1 = 60^{11}$

   (ii) కోణ పరిమాణంను 0 కంటె పెద్దది, π (Pai) కంటె చిన్నదిగా తీసుకున్నచో లభించిన పరిమాణంను "రేడియన్ పరిమాణం" అందురు.

   π రేడియన్ = 180 డిగ్రీలు

   (π ఒక అకరణీయ సంఖ్య దాని సమీప విలువ 3.1415)

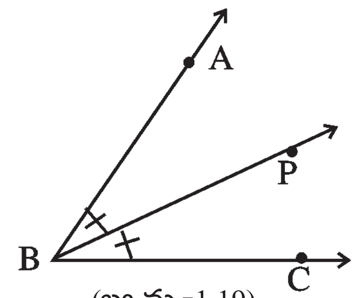
2 ఒకటి కంటె అధిక కోణాల పరిమాణం కలిసి 180^0 కంటె అధికం కావచ్చు. కాని మన ఆలోచనను బట్టి ఏదైనా కోణ పరిమాణం 0^0 నుండి 180^0 ల మధ్య ఉంటుంది.

1.8.3 కో.ణ సమద్విఖండన రేఖ (Angle Bisector) : $\angle ABC$ అంతర్భాగంలో 'P' బిందువు ఉన్నది.

ఒకవేళ $m\angle ABP = m\angle PBC$ అయినచో $\overrightarrow{BP}$ ని

$\angle ABC$ యొక్క సమద్వి ఖండన రేఖ అందురు (బొమ్మ 1.21)

ఇచ్చట $m\angle ABP = m\angle PBC = \frac{1}{2} m\angle ABC$



(బఒమ్మ-1.19)

1.9 వివిధ రకాల కోణాలు (Different types of angles) :

(A) పరిమాణాన్ని బట్టి కోణాలలో రకాలు :-

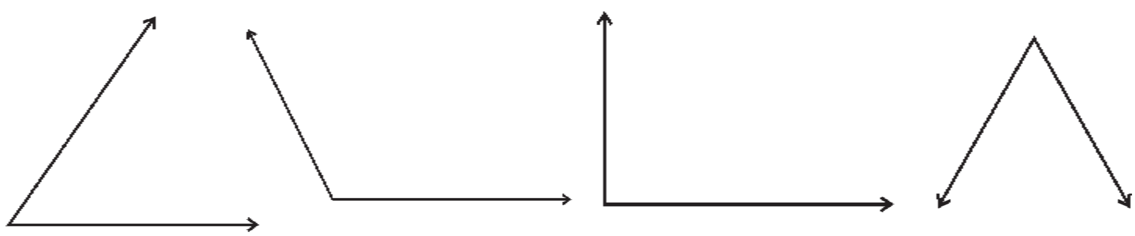
ఒక కోణ పరిమాణం

(i) 90° ల కంటె తక్కువైనచో దాన్ని సూక్ష్మ కోణం **(acute angle)** అందురు.

(ii) 90° లతో సమానమైనచో దాన్ని లంబకోణం **(right angle)** అందురు.

(iii) 90° ల కంటె అధికమైనచో దాన్ని స్థూలకోణం **(obtuse angle)** అందురు.

స్వయంగా చేయండి బొమ్మ 1.23లో గల కోణాల పరిమాణాన్ని ప్రొటాక్టర్ సహాయంతో కొలవండి. కింది పట్టికలో కోణ పరిమాణం, కోణం పేరు రాయండి.



(బఒమ్మ 1.23)

కోణం	1	2	3	4
కోణ పరిమాణం				
ఏ రకం కోణం				

పట్టిక : 1.2

(B) రెండు కోణాల మధ్య గల సంబంధం :

(i) రెండు కోణాల పరిమాణాల మొత్తం 90° అయినచో వాటిని పరస్పరం అనురూపకోణాలు (complementary angles) అందురు.

ఉదాహరణకు : 20^0, 30^0, 63^0 పరిమాణం గల కోణాల అనుపూరక కోణాలు వరుసగా 70^0, 60^0, 27^0 లు 70°, 60°, 27° అగును.

అదే విధంగా ఒక కోణ పరిమాణం x° అయినచో దాని అనుపూరక కోణ పరిమాణం $(90-x)^\circ$ అగును.

(ii) రెండు కోణాల మొత్తం పరిమాణం 180^0 అయినచో వాటిని పరస్పరం పరిపూరక కోణాలు **(Supplementary)** అందురు.

ఉదాహరణకు 27°, 60°, 135°, పరిమాణం గల కోణాల పరిపూరక కోణాలు వరుసగా 153°, 120°, 45°, $(180-x)^\circ$ అగును.

గుర్తుంచుకోండి : కేవలం సూక్ష్మకోణానికి అనుపూరక కోణం ఉంటుంది. కాని ప్రతి కోణానికి పరిపూరక కోణం కలదు.

మీరు చేయవలసిన పని

కింది పట్టికలో కొన్ని కోణాల పేర్లు వాటిని పరిమాణాలు ఇవ్వడమయ్యింది. ఆ కోణాల అనుపూరక, పరిపూరక కోణాల పరిమాణం కనుగొని పట్టికలో రాయండి. జవాబు లేనిచో (✕) గుర్తు పెట్టండి.

కోణం	కోణ పరిమాణం	అనుపూరక కోణం పరిమాణం	పరిపూరక కోణ పరిమాణం
$\angle ABC$	25^0		
$\angle PQR$	68^0		
$\angle CDE$	90^0		
$\angle EFG$	168^0		

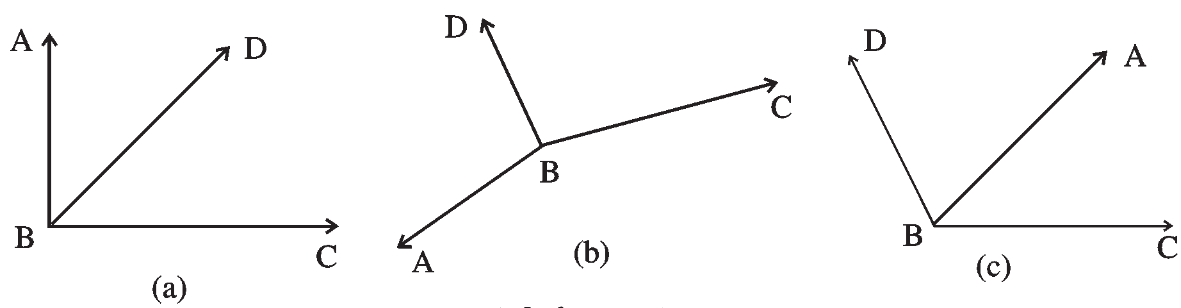
పట్టిక - **1.3**

(c) సన్నిహిత కోణాలు **(Adjacent Angle)** :

బొమ్మ 1.24 మరియు లను పరిశీలించండి.

(i) $\angle ABD$, $\angle CBD$ ల సాధారణ బిందువు B, సాధారణ భుజం $\overrightarrow{BD}$.

(ii) $\angle ABD$, $\angle CBD$ ల అంతర్భాగంలో ఎటువంటి సాధారణ బిందువు లేదు. అనగా అవి అఖండిత సెట్ అగును.



(బొమ్మ 1.24)

ఇటువంటి చోట $\angle ABD$, $\angle CBD$ లను సన్నిహిత కోణములు అందురు. సన్నిహిత కోణాల సాధారణ భుజం $\overrightarrow{BD}$ మిగిలిన రెండు భుజాలు $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ లను వాటి బాహ్యాభుజాలు (exterior side) అందురు.

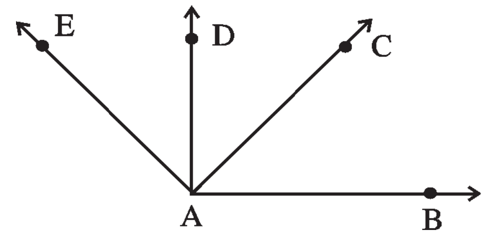
గుర్తుంచుకోండి : రెండు కోణాలు సన్నిహితమైనచో

(i) ఒక సాధారణ శీర్ష బిందువు ఉండును.

(ii) ఒక సాధారణ భుజం ఉండును.

(iii) వాటి అంతర్భాగం అఖండిత సెట్ అగును.

సూచన : రెండు సన్నిహిత కోణాల మొత్తం పరిమాణం 180^0 అయినచో వాటిని సన్నిహిత పరిపూరక కోణాలు (Adjacent Supplementary Angle) అందురు.



(బొమ్మ 1.25)

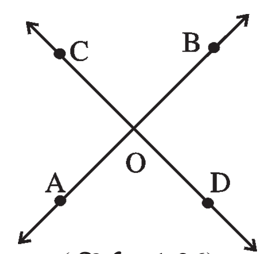
బొమ్మ 1.24 (c) లో $\angle ABD$, $\angle CBD$ లో ల సాధారణ శీర్షబిందువు B, $\overline{BD}$ సాధారణ భుజం, రెండు కోణాల అంతర్భాగం అఖండితం కాదు. అందుచేత $\angle ABD$, $\angle CBD$ లు సన్నిహితం కావు. కాని ఇచ్చట సన్నిహితం ఎందుచేత ?

స్వయంగా చేయండి : ప్రక్కన గల బొమ్మ 1.35 ను చూసి సమాధానాలు రాయండి.

(i) $\overline{AC}$ సాధారణ భుజంగా గల రెండు కోణాల పేర్లు రాయండి.

(ii) సాధారణ భుజంగా గల రెండు సన్నిహిత కోణాల పేర్లు రాయండి.

(D) అభిముఖ లేక ప్రతీప కోణాలు (Vertically Opposite Angles) :



(బొమ్మ 1.26)

బొమ్మ 1.26 లో $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ లు పరస్పరం '0' బిందువు వద్ద ఖండించుకొనెను. దీని వల్ల ఏర్పడిన నాలుగు కోణాలను పరిశీలించండి.

ఇచ్చట $\angle AOC$, $\angle BOD$ లను పరస్పరం అభిముఖ లేక ప్రతీప కోణములు అందురు.

అదే విధంగా $\angle BOC$, $\angle DOA$ కూడా పరస్పరం అభిముఖ కోణాలు.

స్వయంగా చేయండి : $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ లు పరస్పరం '0' బిందువు వద్ద ఖండించుకొనుట వల్ల మూడు వేరు వేరు బొమ్మలను గీయండి.

బొమ్మ నం.	$m\angle AOC$	$m\angle BOD$	$m\angle BOC$	$m\angle AOD$
1				
2				
3				

పట్టిక - **1.4**

ఈ పట్టికలో ఏం పరిశీలించారో రాయండి.

అభ్యాసం 1 (b)

1. ఖాళీలను పూర్తి చేయండి.

(a) ఒక కోణం యొక్క రెండు భుజాలకు ________________ ఖండన బిందువులు గలవు.

(b) ఒక కోణం యొక్క రెండు భుజాల ఖండన బిందువును కోణం యొక్క ________________ బిందువు అందురు.

(c) సాధారణ శీర్షబిందువు, ఒక సాధారణ భుజం గల రెండు కోణాల అంతర్భాగాలు రెండూ అఖండితాలు అయినచో రెండు కోణాలను ________________ కోణం అందురు.

(d) A-P-B, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{AB}$ యొక్క ఒకే ఒక సాధారణ బిందువు P అయినచో ఏర్పడే రెండు కోణాల పేర్లు ________________ మరియు ________________.

(e) $\overrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{AB}$ ల ఒకే ఒక సాధారణ బిందువు P అయినచో ఏర్పడిన రెండు కోణాలను ______________ పరిపూరక కోణాలు అందురు.

(f) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ యొక్క వ్యతిరేక కిరణాలు వరుసగా $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$ అయినచో

(i) $\angle$AOC యొక్క అభిముఖ కోణం ______________

(ii) $\angle$BOC యొక్క అభిముఖ కోణం ______________

2. ఖాళీలను పూర్తి చేయండి.

a) π రేడియన్ = ______________ డిగ్రీలు

(b) ఒక డిగ్రీ = ______________ మినిట్‌లు

(c) ఒక మినిట్ = ______________ సెకండ్లు

(d) π సమీప విలువ = ______________

(e) $x°$ కోణం యొక్క అనుపూరక కోణం పరిమాణం ______________

(f) $x°$ పరిమాణం గల కోణం యొక్క పరిపూరక కోణ పరిమాణం ______________

(g) $x°$ పరిమాణం గల కోణం యొక్క సన్నిహిత పరిపూరక కోణ పరిమాణం ______________

3. ఒక సమతలంలో గీసిన $\angle$ABC, ఆ సమతలంలో ఎన్ని ఉపసెట్‌లుగా విభజింపడును ? వాటి పేర్లను రాయండి.

4. (a) ఒక కోణ పరిమాణం దాని అనుపూరక కోణ పరిమాణంతో సమానమైనచో ఆ కోణ పరిమాణం ఎంత ?

(b) ఒక కోణ పరిమాణం దాని అనుపూరక కోణ పరిమాణం యొక్క రెండు వంతులకు 15^0 లు తక్కువ అయిన దాని పరిమాణం ఎంత ?

(c) ఏ కోణ పరిమాణం దాని పరిపూరక కోణ పరిమాణంతో సమానం, దాని పరిమాణం ఎంత ?

(d) ఒక కోణ పరిమాణం దాని పరిపూరక కోణ పరిమాణంనకు 3 వంతుల కంటె 20^0 తక్కువైనచో ఆ కోణ పరిమాణం ఎంత ?

5. కొన్ని కోణాల పరిమాణం ఇవ్వడమయ్యింది. వాటిని చూసి కింది ఖాళీలను పూర్తి చేయండి. $m\angle A = 63°$, $m\angle B = 127°$, $m\angle C = 147°$, $m\angle D = 53°$, $m\angle E = 95°$,

$m\angle F = 117°$, $m\angle G = 85°$, $m\angle H = 33°$ అయినచో

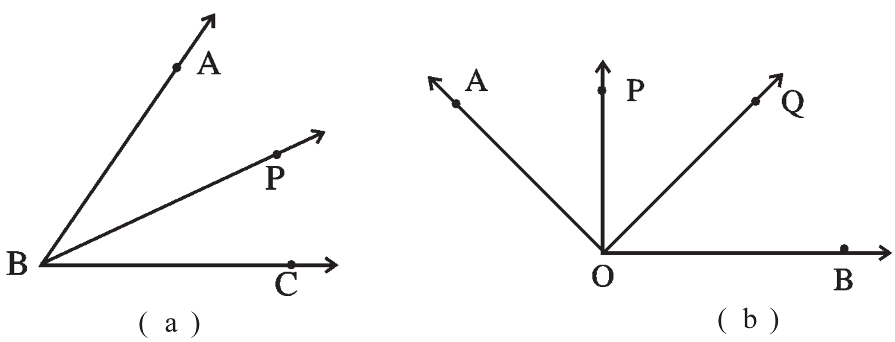
(i) $\angle$A మరియు ______________ పరస్పరం పరిపూరకాలు

(ii) $\angle$H మరియు ______________ పరస్పరం పరిపూరకాలు

(iii) ______________ మరియు $\angle$D పరస్పరం పరిపూరకాలు

(iv) ______________ మరియు $\angle$G పరస్పరం పరిపూరకాలు

6. బొమ్మ 1.27 ను చూసి సమాధానాలు రాయండి.



(బొమ్మ 1.27)

బొమ్మ (a) లో (i) $m\angle ABP = 22°$, $m\angle PBC = 38°$ అయినచో $m\angle ABC$ ఎంత ?

(ii) $m\angle ABC = 58°$, $\overrightarrow{BP}$, $\angle ABC$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖ అయినచో $m\angle PBC$?

బొమ్మ (b) లో $m\angle AOB = 117°$, $m\angle AOP = m\angle POQ = m\angle QOB$ అయినచో $m\angle POQ$, $m\angle AOQ$, $m\angle POB$ లను కనుగొనండి.

7. బొమ్మల ద్వారా కింది పదాలను తెలియజేయండి.

(a) అభిముఖ కోణాలు (b) సన్నిహిత కోణాలు (c) సన్నిహిత పరిపూరక కోణాలు

8. దేనిని అందులో వివరించి రాయండి.

(a) అనుపూరక కోణాలు - పరిపూరక కోణాలు

(b) కోణం యొక్క అంతర్భాగం, బాహ్యభాగం

9. $\overrightarrow{OC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ ల ఒకే ఒక సాధారణ బిందువు 'O'

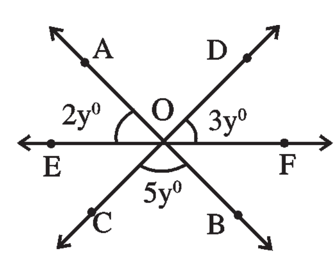
ఒకవేళ (i) $m\angle AOC = 2x°$, $m\angle BOC = 3x°$

(ii) $m\angle AOC = (x + 20)°$, $m\angle BOC = (3x - 8)°$ అయినచో

ప్రతి చోట x విలువను కనుగొనండి.

10. ప్రక్కన గల బొమ్మ నుండి y విలువను కనుగొనండి.

$m\angle AOE = 2y°$, $m\angle DOE = 3y°$, $m\angle BOC = 5y°$



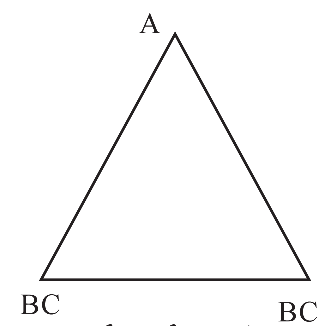
(బొమ్మ 1.28)

త్రిభుజం (TRIANGLE)	2వ అధ్యాయం

2.1. త్రిభుజం, త్రిభుజం యొక్క శీర్ష బిందువులు, భుజాలు, కోణాలు :

ఒక సరళరేఖలో లేని మూడు బిందువులు ద్వారా కోణం ఏర్పడుటను గూర్చి తెలుసుకున్నారు. ఇప్పుడు ఒకే సరళరేఖలో లేని మూడు బిందువులు ద్వారా ఏర్పడే మరొక రకపు చిత్రాన్ని ఇప్పుడు తెలుసుకుందాం.

A, B, C మూడు బిందువులు ఒక సరళరేఖలో లేనిచో B బిందువులతో $\overline{AB}$. ($\overline{AB}$ రేఖాఖండం) ని నిర్మించవచ్చును. అదే విధంగా B, C బిందువులతో $\overline{BC}$ ($\overline{BC}$ రేఖాఖండం) బిందువులతో $\overline{CA}$. ($\overline{CA}$ రేఖాఖండం) నిర్మించగలం. ఈ మూడు రేఖాఖండాల ద్వారా ఏర్పడిన చిత్రమే A, B, C త్రిభుజం అవుతుంది. (బొమ్మ 2.1 ని చూడండి)



(బఒమ్మ 2.1)

నిర్వచనం :

A, B, C మూడు బిందువులు ఒక సరళరేఖలో లేనిచో $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ సెట్‌ల మూడింటి సంయోగంను ABC త్రిభుజం అందురు.

సంకేతంతో దీన్ని Δ ABC లేక (ABC Δ) గా రాయవలెను

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ లు ఒక్కొక్కటి బిందువుల సెట్‌లు అగుటవల్ల వాటి ద్వారా ఏర్పడిన త్రిభుజం కూడా బిందువుల సెట్ అగును. సెట్ భాషలో దీన్ని మనం $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ గా రాస్తాం.

A, B, C మూడు బిందువులను Δ ABC యొక్క కోణ బిందువులు లేక శీర్ష బిందువులు (Vertex) లు అందురు. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ మరియు $\overline{CA}$ లను Δ ABC యొక్క ఒక్కొక్క భుజం (side) అందురు. $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$ లను Δ ABC యొక్క ఒక్కొక్క కోణం (Angle) అందురు. వీటిని క్లుప్తంగా $\angle B$, $\angle C$, $\angle A$ గా రాయవలెను.

$\angle A$ ని $\overline{BC}$ భుజం యొక్క అభిముఖ కోణం (Opposite angle) అని, $\overline{BC}$ భుజంను $\angle A$ యొక్క అభిముఖ భుజం (Opposite side) అందురు. అదే విధంగా $\angle B$ యొక్క అభిముఖ భుజం $\overline{CA}$ మరియు $\overline{CA}$ యొక్క అభిముఖ కోణం $\angle B$, $\angle C$ యొక్క అభిముఖ భుజం $\overline{AB}$ మరియు $\overline{AB}$ యొక్క అభిముఖ కోణం $\angle C$ అగును.

మరల, $\angle A$ ని $\overline{AB}$, $\overline{CA}$ భుజాల అంతర్గత కోణం (Included angle) అందురు. అదే విధంగా $\overline{BC}$ మరియు $\overline{BA}$ ల అంతర్గత కోణం $\angle B$, $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ ల అంతర్గత కోణం $\angle C$ అగును.

$\angle A, \angle B$ లు ఒక్కొక్కటి $\overline{AB}$ యొక్క సంలగ్న కోణాలు అగును. అదే విధంగా $\overline{CA}$ సంలగ్న కోణాలు $\angle C$, $\angle A$ కాగా $\overline{BC}$ సంలగ్న కోణాలు $\angle B, \angle C$ అగును. $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ లను $\angle A$ యొక్క సంలగ్న భుజాలు అందురు.

2.2 త్రిభుజం యొక్క అంతర్భాగం, బాహ్యభాగం (Interior and exterior of the triangle)

ఒకే సరళరేఖలో లేని మూడు బిందువులతో ఒకే సమతలం సంభవమని, మీరిదివరకే తెలుసుకున్నారు. అందుచేత త్రిభుజం కూడా ఎల్లప్పుడూ ఒక సమతలం పైనే ఉండును. నల్లబల్ల సమతలంపై లేక మీ నోట్ పుస్తకం పేజీ (ఒక సమతల భాగం) పైన త్రిభుజాన్ని నిర్మించవచ్చు.

మీరు చేయవలసిన పని

బొమ్మ 2.2 లో గల $\angle ABC$ ఆ సమతలంలో గల P, Q, R, S,T, U, V, M, N,W బిందువులను చూసి కింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు చెప్పండి.

A, B, C లు పైన చెప్పుకున్న పది బిందువులలో

(i) ఏ బిందువు $\angle A$ యొక్క అంతర బిందువు ?

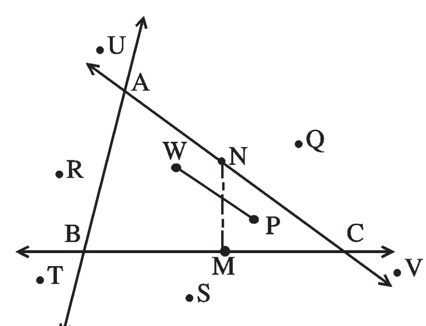
(ii) ఏ బిందువు $\angle B$ యొక్క అంతర బిందువు ?

(iii) ఏ బిందువు $\angle C$ యొక్క అంతర బిందువు ?

(iv) ఏ బిందువులు $\angle A, \angle B, \angle C$ ల అంతర్భాగమగును ?

(v) ఏ బిందువులు $\angle A, \angle B, \angle C$ లలో ఏ కోణం నందు అంతర్భాగం కావు ?

(vi) ఏ బిందువులు Δ ABC పై గలవు ?



(బొమ్మ 2.2)

గుర్తుంచుకోండి :

ఏ ఏ బిందువులు **$\angle A, \angle B, \angle C$** అంతర్భాగంలో గలవో అవి **Δ ABC** యొక్క అంతర బిందువులు అగును. ఇచ్చట పేర్కొన్న బిందువులలో కేవలం P, W మాత్రమే **Δ ABC** యొక్క అంతర బిందువులు అగును. దీనిని **(Δ ABC)** యొక్క అంతర్భాగం **(Interior)** అందురు.

ఇప్పుడు Δ ABC యొక్క సమతలం (నల్లబల్ల సమతలం లేక నోట్ పుస్తకం పేజీ సమతలం) పై లేక దాని అంతర్భాగంలో లేని Δ ABC అసంఖ్యాక బిందువులు గలవు. వాటిని యొక్క బాహ్య బిందువులు అందురు (అవి బొమ్మ 2.2 లో గల Q, R, S, T, U, V బిందువులు ΔABC బాహ్య బిందువులు) త్రిభుజం యొక్క బాహ్యబిందువుల సెట్‌ను దాని బాహ్యభాగం (Exterior) అందురు. అందుచేత ఒక సమతలంలో త్రిభుజాన్ని నిర్మించినచో సమతలం పై గల బిందువుల సమూహం మూడు సెట్‌లుగా మారును. అవి -

(i) త్రిభుజం పై గల బిందువుల సెట్

(ii) త్రిభుజ అంతర్భాగం

(iii) త్రిభుజ బాహ్యభాగం

మొదటి అధ్యాయంలో కుంభాకార సెట్ గూర్చి తెలుసుకున్నాం. బొమ్మ 2.2లో Δ ABC యొక్క అంతర్భాగంలో గల ఏవైనా రెండు బిందువులు P, W లను కలిపే రేఖాఖండం అనగా $\overline{\mathrm{PW}}$ ను నిర్మించినచో అది త్రిభుజం అంతర్భాగంలో ఉండుటను చూడగలరు. అందుచేత త్రిభుజం యొక్క అంతర్భాగం ఒక కుంభాకార సెట్ అగును. (కుంభాకార సెట్ నిర్వచనం గుర్తులు తెచ్చుకోయండి)

ఒక త్రిభుజం కుంభాకార సెట్ కాదు. Δ ABC అనగా బిందువుల ఒక సెట్‌ను తెలియజేస్తుంది. అది $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CA}}$ భుజాలలో గల బిందువులతో ఒకటిగా ఏర్పడుతుంది. బొమ్మ 2.2 లో M, N రెండు బిందువులు Δ ABC పై గల రెండు బిందువులు. చివరి బిందువులు M, N లు విడిచిపెట్టినచో $\overline{\mathrm{MN}}$ యొక్క ఇతర బిందువులు త్రిభుజం పై గల బిందువులు కావు (M, N ను గీసి చూడండి). ఆ కారణం చేత Δ ABC ఒక కుంభాకార సెట్ కాదు.

త్రిభుజం యొక్క బాహ్యభాగం కూడా కుంభాకార సెట్ కాదు. త్రిభుజం బాహ్యభాగంలో అనేక బిందువులు గలవు. వాటిని కలిపే రేఖాఖండాలు పూర్తిగా బాహ్యభాగంలో లేవు. ($\overline{\mathrm{QS}}$ ను గీసి చూడండి)

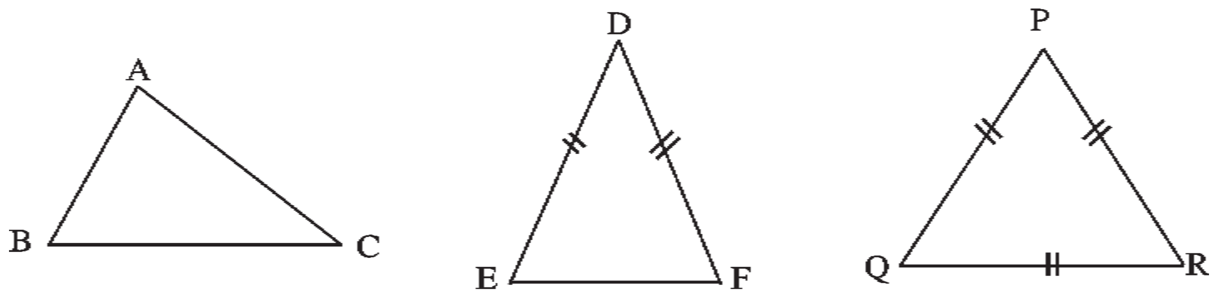
ఇలా త్రిభుజం పైన దాని అంతర్భాగమందున ఉండే బిందువు లేదు అది అసాధ్యం. అందుచేత ఒక త్రిభుజం పైన, దాని అంతర్భాగమందు ఎటువంటి సాధారణ బిందువు లేదు. అదే విధంగా ఒక త్రిభుజం, దాని బాహ్యభాగం మధ్య కూడా ఎటువంటి సాధారణ బిందువు లేదు. ఒక త్రిభుజం అంతర్భాగం, బాహ్యభాగాలందు కూడా సాధారణ బిందువు లేదు.

ఒక త్రిభుజం, దాని అంతర్భాగంతో ఏర్పడిన సెట్‌ను త్రిభుజాకార క్షేత్రం (Triangular xyion) అందురు.

అనగా Δ ABC మరియు దాని అంతర్భాగంను ఒకటిగా తీసుకొనుట వల్ల ABC త్రిభుజాకారక్షేత్రం ఏర్పడుతుంది. యొక్క శీర్ష బిందువులు, కోణములు, భుజాలు వరుసగా ఈ త్రిభుజం యొక్క శీర్షబిందువులు, కోణాలు, భుజాలు అని చెప్పబడును.

2.3 త్రిభుజాలలో రకాలు (Types of Triangles)

క) భుజాలు పొడవును అనుసరించి త్రిభుజంలో రకాలు :-



(a) (b) (c)

(బొమ్మ 2.3)

బొమ్మ 2.3 (a) లో గల Δ ABC యొక్క పొడవులు అసమానం. ఇటువంటి త్రిభుజాన్ని విషమబాహు త్రిభుజం (Scalene Triangle) అందురు. బొమ్మ 2.3 (b) లో గల ΔDEF లో DE = DF ఇటువంటి త్రిభుజాన్ని సమద్విబాహు త్రిభుజం (Isosceles) అందురు. బొమ్మ 2.3 (c) లో గల ΔPQR లో PQ=QR=RP. ఇటువంటి త్రిభుజాన్ని సమబాహు సమానాపాల (Equilateral Triangle) అందురు.

సమద్విబాహు త్రిభుజంలో సమాన పొడవు గల భుజాల అంతర్భాగం, అంతర్గత కోణంనకు సాధారణంగా ఆ త్రిభుజం యొక్క శీర్షకోణం (Vertex angle) అందురు. బొమ్మ 2.3(b) లో గల సమద్విబాహు త్రిభుజం ΔDEF యొక్క శీర్షకోణం $\angle$D అగును. సమద్విబాహు త్రిభుజంలో శీర్షకోణంనకు ఎదురుగా ఉన్న భుజాన్ని సాధారణంగా దాని భూమి అంటారు. అందుచేత పైనగల సమద్విబాహు ΔDEF లో భూమి $\overline{EF}$. సమద్విబాహు త్రిభుజంలో భూమితో కలిగియున్న రెండు కోణాలను భూసంలగ్న కోణాలు (Base angles) అందురు. ΔDEF బొమ్మలో $\angle$E, $\angle$F లు రెండు భుసంలగ్న కోణాలు.

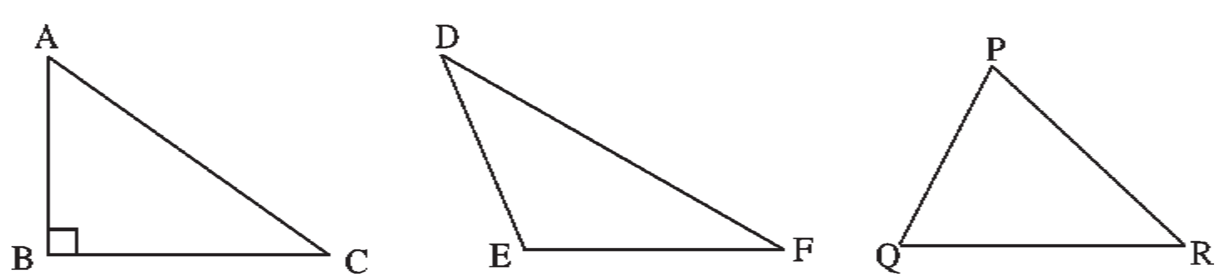
నిర్వచనం :-

(i) ఏ త్రిభుజంలోని రెండు భుజాలు పరస్పరం సమానమై ఉండునో దాన్ని "సమద్వి బాహు త్రిభుజం" అందురు.

(ii) ఏ త్రిభుజంలో మూడు భుజాలు పరస్పరం సమానమై ఉంటాయో దాన్ని "సమబాహు త్రిభుజం" అందురు.

(iii) ఏ త్రిభుజంలోని ఏ జత భుజాలైన పరస్పరం సమానం కానిచో దాన్ని "విషమబాహు త్రిభుజం" అందురు.

(B) కోణాల పరిమాణం బట్టి త్రిభుజాలలో రకాలు :-



(a) (b) (c)

(బొమ్మ 2.4)

బొమ్మ 2.4(క)లో Δ ABC లో $\angle$B లంబకోణం. ఇటువంటి త్రిభుజాన్ని (ఒక కోణం లంబకోణంగా గల త్రిభుజం) లంబకోణ త్రిభుజం (Right angled triangle) అందురు. ఒక త్రిభుజంలో ఒకే ఒక లంబకోణం ఉంటుంది. బొమ్మ 2.4 (ఖ)లో గల ΔDEF లో $\angle$E ఒక స్థూలకోణం ఇటువంటి త్రిభుజం (ఏ త్రిభుజంలో ఒక స్థూలకోణం గలదోను స్థూలకోణం త్రిభుజం (Extuse-angled triangle) అందురు. ఒక త్రిభుజంలో అత్యధికంగా ఒక స్థూలకోణం మాత్రమే ఉండవచ్చును. బొమ్మ 2.4 (గ) లేని Δ PQR లో $\angle$P, $\angle$Q, $\angle$R లు ఒక్కొక్కటి ఒక్కొక్క సూక్ష్మకోణం. ఇటువంటి త్రిభుజాన్ని సూక్ష్మకోణ త్రిభుజం (acute-angled triangle) అందురు.

నిర్వచనం : (i) ఏ త్రిభుజంలో ఒక కోణం లంబకోణం ఉండునో దాన్ని లంబకోణ త్రిభుజం అందురు.

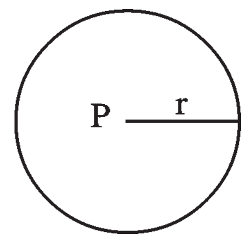
(ii) ఏ త్రిభుజంలోని ఒక కోణం స్థూలకోణంగా ఉండునో దాన్ని స్థూలకోణ త్రిభుజం అందురు.

(iii) ఏ త్రిభుజంలోని మూడు కోణాలు సూక్ష్మకోణాలై ఉండునో దాన్ని సూక్ష్మకోణ త్రిభుజం అందురు.

నిర్వచనం బట్టి చూడగా ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో లంబకోణం మినహా మిగిలిన రెండు కోణాలు సూక్ష్మకోణాలు, ఒక స్థూలకోణ త్రిభుజంలో ఒక స్థూలకోణం మినహా మిగిలిన రెండు కోణాలు సూక్ష్మకోణాలు.

2.4 త్రిభుజానికి సంబంధించిన కొన్ని ప్రయోగాలు :-

త్రిభుజానికి సంబంధించిన ప్రయోగాలు చేసే ముందు వివిధ రకాల త్రిభుజాల నిర్మాణం గూర్చి తెలుసుకొనవలసి యున్నది. అందుచేత మొదట వివిధ రకాల త్రిభుజ నిర్మాణ పద్ధతులను గూర్చి తెలుసుకుందాం.



(బొమ్మ 2.5)

వృత్తలేఖిని సహాయంతో :

కొత్తేమికాదు

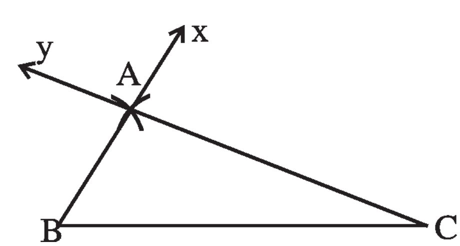
వృత్తలేఖిని వినియోగం మీకు కొత్తేమికాదు. వృత్తలేఖిని సహాయంతో ఎవరు వృత్తం నిర్మించగలరు. వృత్తం గూర్చి క్లుప్తంగా మీకు కొంత అవగాహన కల్పించుట ఇచ్చట అవసరం.

మీ నోట్ పుస్తకంలోని ఒక పేజిపై ఒక బిందువు P ని గుర్తించి ఒక నిర్దిష్ట దారం (అనుకొనుము r యూనిట్లు)తో కాగితం పై గల బిందువులన్నింటిని కలుపుకొని వృత్తలేఖినితో గుర్తించగలము. ఈ బిందువులన్నింటితో ఏర్పడిన చిత్రాన్ని ఒక వృత్తం (Circle) అందురు. వృత్తలేఖినితో వృత్తం నిర్మించుటకు ప్రారంభించినపుడు పెన్సిల్ మొనతో కొంత దూరం జరిగిన (నిర్మాణంలో ప్రారంభ బిందువును చేరుకొనుటకు ముందు) తరువాత ఆపి వేసినచో లభించే చిత్రంను ఒక చాపం (arc) అందురు. P బిందువుని ఈ చాపం యొక్క కేంద్రం అని, r ను దాని వ్యాసార్ధం (radius) అని అందురు. చాపం నిర్మించి మనం ఏదైనా ఒక బిందువు P నుండి r యూనిట్లు దూరంలో ఎన్నో బిందువులను పొందగలుగుతాము.

(A) విషమ బాహు త్రిభుజ నిర్మాణం (స్కేలు, వృత్తలేఖిని సహాయంతో)

(i) ఏదైనా పొడవు గల $\overline{BC}$ ని నిర్మించండి.

(ii) B కేంద్రంగా తీసుకొని r- వ్యాసార్ధం గల చాపం (r $\neq$ BC) గీయండి.



(బొమ్మ 2.6)

(iii) C బిందువును కేంద్రంగా తీసుకొని BC తో (ii) ల తీసుకున్న వ్యాసార్థం (BC తో సమానం) తీసుకొని మరొక చాపం గీయండి.

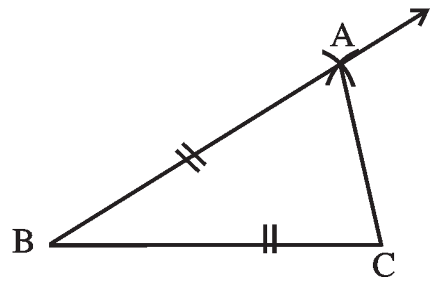
(iv) సోపానం (ii) మరియు (iii) లలో నిర్మించిన రెండు చాపాల ఖండన బిందువును A అనుకోండి. మరియు లను నిర్మించండి. ఇప్పుడు ఏర్పడిన ఒక విషమబాహు త్రిభుజం.

(b) సమద్విబాహు త్రిభుజం : (స్కేలు, వృత్తలేఖిని సహాయంతో)

(i) ఏదో కొంత పొడవుతో $\overline{BC}$ నిర్మించండి.

(ii) B ని కేంద్రంగా తీసుకొని BC తో సమానమైన వ్యాసార్థం తీసుకొని చాపాన్ని నిర్మించండి.

(iii) C బిందువును కేంద్రంగా తీసుకొని BC కి భిన్నమైన ఒక వ్యాసార్థంతో మరొక చాపాన్ని గీయండి. ఆ చాపాలు పరస్పరం ఖండించుకోవాలి.



(బొమ్మ 2.7)

(iv) $\overline{AB}$ మరియు $\overline{AC}$ ని నిర్మించండి.

ఇప్పుడు ఏర్పడ్డ ΔABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం. దీనిలో BC=AB మరియు $\overline{CA}$ దీని భూమి

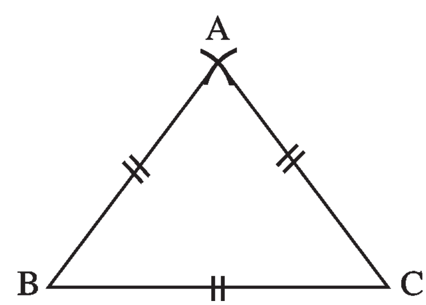
(c) సమబాహు త్రిభుజ నిర్మాణం :-

(i) కొంత పొడవుతో $\overline{BC}$ ని నిర్మించండి.

(ii) B బిందువును కేంద్రంగా తీసుకొని BC తో సమాన వ్యాసార్థం తీసుకొని ఒక చాపాన్ని గీయండి.

(iii) C బిందువును కేంద్రంగా తీసుకొని (ఆ) లో తీసుకున్న వ్యాసార్థం (BC తో సమానం) తీసుకొని మరొక చాపం గీయండి.

(iv) సోపానం (ఆ) (ఇ) లలో నిర్మించిన రెండు చాపాలు ఖండన బిందువును A అనుకోయండి. $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ లను నిర్మించండి. ఇప్పుడు ఏర్పడిన ΔABC ఒక సమబాహు త్రిభుజం.



(బొమ్మ 2.8)

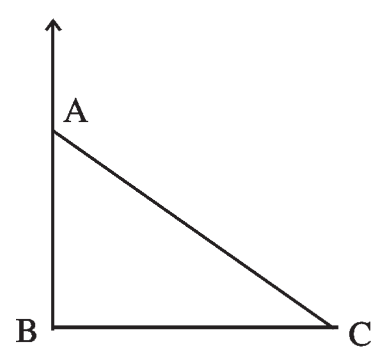
(d) లంబకోణ త్రిభుజ నిర్మాణం :-

(i) కొంత పొడవుతో $\overline{BC}$ ని నిర్మించండి.

(ii) $\overline{BC}$ తో సహా సెట్‌స్క్వేయర్ సహాయంతో లంబకోణంను తాకియున్న అందులో ఒకదాన్ని B ని తాకునట్లు ఉంచండి. సెట్‌స్క్వేయర్ మరియొక అంచును తాకుతూ ఒక రేఖను గీయండి. దాని ఒక చివర బిందువు B కాగా మరొక చివరి బిందువును అనుకోయండి.

(iii) $\overline{AC}$ ని నిర్మించండి.

ఇప్పుడు లభించిన ΔABC ఒక లంబకోణ త్రిభుజం అగును.



(బొమ్మ 2.9)

(e) స్థూలకోణ త్రిభుజ నిర్మాణం :

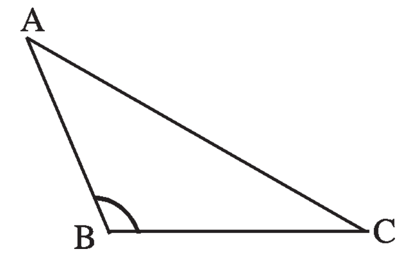
Δ ABC స్థూలకోణ త్రిభుజంను నిర్మించాలంటే

(i) కొంత పొడవు గల ను నిర్మించండి

(ii) $\overline{BC}$ పై B వద్ద స్థూలకోణం (90^0ల కంటె ఎక్కువ పరిమాణం) గల కోణం) $\overline{BA}$ నిర్మించండి.

(iii) $\overline{AC}$ ని నిర్మించండి.

ఇప్పుడు లభించిన Δ ABC ఒక స్థూలకోణ త్రిభుజమగును.



(బొమ్మ 2.10)

పరీక్ష : ఒక త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మధ్య గల సంబంధం

నిరూపణ :

స్కేలు, వృత్తలేఖిని, సెట్ స్క్వేయర్ అవసరమైనచో వినియోగించుకొని మూడు వేరు వేరు రకాల త్రిభుజాలను నిర్మించండి. ప్రతీ దాని పేరు Δ ABC అనుకోయండి. మూడు బొమ్మలను బొమ్మ నెం.-1, బొమ్మ నెం.-2, బొమ్మ నెం.-3 అనుకోయండి.

ప్రతీ బొమ్మ కోణాలను ప్రొటాక్టర్ సహాయంతో తెలుసుకొని కింది పట్టికలో రాయండి.

బొమ్మ నెం.	$m\angle A$	$m\angle B$	$m\angle C$	$m\angle A + m\angle B + m\angle C$
1				
2				
3				

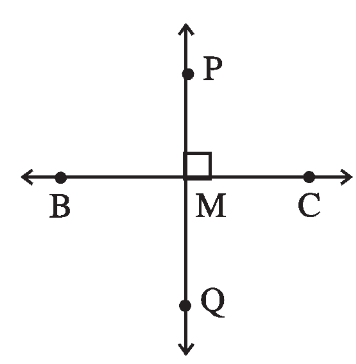
పట్టిక **: 2.1**

ప్రతీ బొమ్మకు సంబంధించి పట్టికలో చివర స్తంభంలో గల $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$ ఉండునట్లు చూడగలరు.

సిద్ధాంతం-1 ఏదైనా ఒక త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^0

ఉపసిద్ధాంతం-1 ఒక త్రిభుజంలో అత్యధికంగా ఒక లంబకోణం లేక ఒక స్థూలకోణం ఉండును.

ఉపసిద్ధాంతం-2: $\overleftrightarrow{BC}$ యొక్క బాహ్యబిందువు P అయినచో, P బిందువు మీదుగా ఒకే ఒక రేఖ $\overleftrightarrow{PQ}$ ను నిర్మించవచ్చును. $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ ల వల్ల ఒక లంబకోణం ఏర్పడును. ఇచ్చట $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{BC}$ లను పరస్పరం లంబాలు (Perpendicular to each other or mutually perpendicular) అని అందురు. ఒక వేళ BC, PQ ను ఖండన బిందువు M అయినచో ను P బిందువు వద్ద $\overleftrightarrow{BC}$ పై లంబం అందురు. మరియు M బిందువును $\overline{PM}$ లంబం యొక్క పాదబిందువు (Foot of the perpendicular) అని అందురు.



(బొమ్మ 2.11)

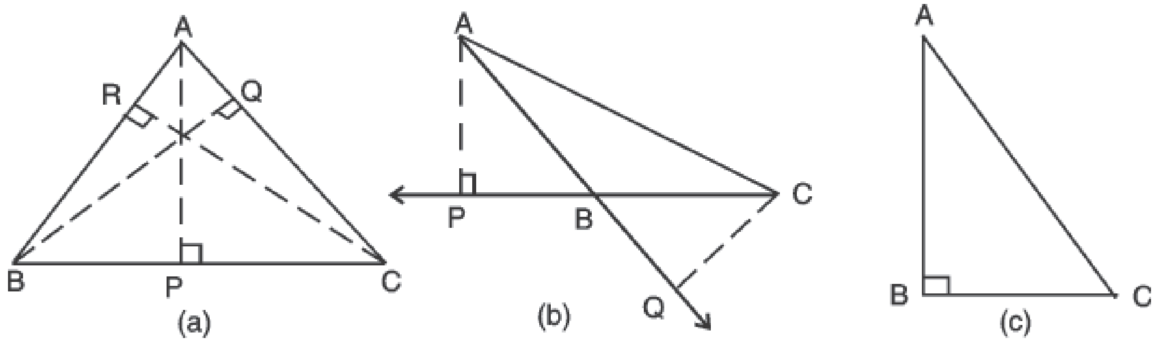
త్రిభుజం ఎత్తు (Height of the triangle)

Δ**ABC** లో A బిందువు నుండి $\overline{BC}$ పై ఒకే ఒక లంబం నిర్మించగలం.

అదే విధంగా BC బిందువుల నుండి వరుసగా $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ పై కూడా ఒక్కొక్క లంబాన్ని మాత్రమే నిర్మించగలం.

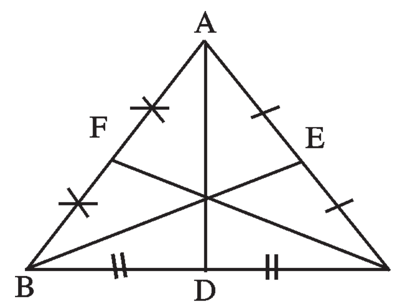
మూడు లంబాల పాద బిందువులు వరుసగా P, Q, R లు అయినచో $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$ లను ΔABC లోని శీర్షబిందువుల నుండి ఎదురుగా ఉన్న భుజాలపై నిర్మించిన లంబం (Perpendicular) లు అందురు.

$\overline{AP}$ పొడవును AP నుండి Δ ABC యొక్క A శీర్షబిందువు నుండి $\overline{BC}$ పై ఎత్తు అందురు. అదే విధంగా BQ, CR లను వరుసగా B బిందువు నుండి $\overline{AC}$ పై, C బిందువు నుండి $\overline{AB}$ పై ఎత్తు (Height) అందురు.



(బొమ్మ 2.12)

బొమ్మ 2.12 (a) లో సూక్ష్మకోణ ΔABC యొక్క శీర్షబిందువుల నుండి ఎదురుగా ఉన్న భుజాలపై మూడు లంబాల నిర్మాణం చూపించబడినది. బొమ్మ 2.12 (b) లో స్థూలకోణ త్రిభుజంలో స్థూలకోణ సంలగ్న భుజాలపై ఎదురుగా నున్న శీర్షబిందువుల నుండి గీసిన రెండు లంబాలు త్రిభుజం యొక్క అంతర్భాగంలో లేవు. బొమ్మ 2.12 (c) లో $\overline{AB}$ భుజమే A బిందువు నుండి $\overline{BC}$ పై లంబం కాగా $\overline{BC}$ భుజమే C బిందువు నుండి $\overline{AB}$ పై లంబం అగుచున్నది.



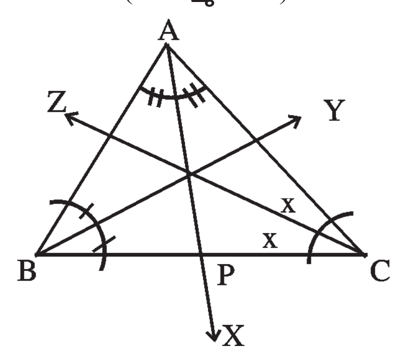
(బొమ్మ 2.13)

త్రిభుజ మధ్యమం (Medians of triangle) :-

ఏదైనా త్రిభుజం యొక్క ఏదైనా ఒక కోణం బిందువు నుండి దానికి ఎదురుగా ఉన్న భుజం యొక్క మధ్య బిందువును కలిపే రేఖాఖండంను ఆ త్రిభుజం యొక్క మధ్యమం (Median) అందురు. బొమ్మ 1.23లో A ఒక కోణ బిందువు. A కి ఎదురుగా ఉండే భుజం $\overline{BC}$ యొక్క మధ్య బిందువు D అగును. అందుచేత $\overline{AD}$ ఒక మధ్యమం అగును. అదే విధంగా $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ లు మరి రెండు మధ్యమాలు. ఏదైనా ఒక త్రిభుజంలో మూడు మధ్యమాలు ఉంటాయి.

త్రిభుజ కోణాల సమద్విఖండన రేఖలు (Bisectors of the angles of a triangle or angle-bisectors of a triangle)

Δ ABC యొక్క కోణాల సమద్విఖండన రేఖలు $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{BY}$, $\overrightarrow{CZ}$ లు. అవి వరుసగా $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ల యొక్క అంతర సమద్విఖండన రేఖలగును. (ఇచ్చట కేవలం సమద్విఖండన రేఖ అంటే సరిపోతుంది)



(బొమ్మ 2.14)

పరీక్ష-2 మూడు వేరు వేరు రకాల త్రిభుజాలను నిర్మించండి. (స్కేలు, వృత్తలేఖిని అవసరమైనచో సెట్ స్క్వేయర్‌ను వాడండి) వాటికి బొమ్మ నెం.-1,2,3 అని పేర్లు పెట్టండి. ప్రతీ దాని ΔABC పేరు అనుకోయండి.

ప్రతీ బొమ్మ భుజాల పొడవులను కొలిసి కింది పట్టికలో రాయండి.

బొమ్మ నెం	AB	BC	CA	AB + BC	BC + CA	CA + AB
1						
2						
3						

పట్టిక : **2.2**

పట్టికను పరిశీలించగా కింది విషయం అర్థం అవుతుంది

$AB+BC>CA, BC+CA>AB, AB+CA>BC$

సిద్ధాంతం-2 : ఒక త్రిభుజంలోని ఏవైనా రెండు భుజాల మొత్తం పొడవు మూడవ భుజం పొడవు కంటె అధికం.

వ్యాఖ్య-1 : AB =2 సెం.మీ., BC = 4 సెం.మీ., CA = 6 సెం.మీ. అయినచో ΔABC ని నిర్మించగలరా ? పరిశీలించండి. ఇచ్చట రెండు భుజాల పొడవు మూడవ భుజం మొత్తం పొడవుల మొత్తం, మూడవ భుజం పొడవుతో సమానం. అనగా $AB+BC=CA$ అగుటవల్ల A-B-C అగును. ఇచ్చట త్రిభుజ నిర్మాణం వీలుపడదు.

2. ఏదైనా ఒక త్రిభుజం లో $AB+BC>CA$ లేక $AB+BC-BC>CA-BC$ లేక $AB>CA-BC$ లేక $CA-BC<AB$ అగును.

ఉపసిద్ధాంతం : ఒక త్రిభుజంలోని ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల భేదం మూడవ భుజం పొడవు కంటే తక్కువ.

AB = 2 సెం.మీ., BC = 3 సెం.మీ., CA = 6 సెం.మీ. అయినచో ΔABC ని నిర్మించగలమా ?

పరిశీలించండి. ఇచ్చట $CA-BC>AB$ కావున నిర్మాణం సాధ్యం కాదు. (ఇచ్చట $AB+BC<CA$ అందుచేత నిర్మించలేం)

పరీక్ష-3 :

స్కేలు, వృత్తలేఖిని, అవసరమైనచో సెట్ స్క్వేయర్‌ను ఉపయోగించండి. వీటి సహాయంతో మూడు వేరు వేరు ఆకారంలో గల సమద్విబాహు త్రిభుజాలను నిర్మించండి. ప్రతీ త్రిభుజంలో సమాన పొడవు గల భుజాలు రెండింటిని $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ అనుకోయండి. సమాన భుజల పొడవులను వాటికి ఎదురుగా ఉన్న కోణాల పరిమాణంను కొలవండి. మూడు బొమ్మలను బొమ్మ నెం.-1, బొమ్మ నెం-2, బొమ్మ నెం-3 అనుకోయండి. ప్రతీ త్రిభుజంలో కనుగొన్న కొలతలను కింది పట్టికలో రాయండి.

బొమ్మ నెం	AB	AC	m∠ABC	m∠ACB
1				
2				
3				

పట్టిక : **2.3**

పట్టికను బట్టి చూడగా ప్రతీ బొమ్మలో సమాన పొడవు గల భుజాలు $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ లకు ఎదురుగా ఉన్న కోణాలు ∠ABC, ∠ACB ల పరిమాణం సమానం అని తెలుస్తుంది.

సిద్ధాంతం :- 3 ఏదైన సమద్విబాహు త్రిభుజంలో సమాన పొడవు గల భుజాలకు ఎదురుగా ఉండే కోణాల పరిమాణం సమానం.

ఉపసిద్ధాంతం :- ఈ సమబాహు త్రిభుజంలోని కోణాలు మూడింటి పరిమాణం సమానం ఒక్కొక్క కోణ పరిమాణం 60^{0}లు

(i) $\overline{BC}$ రేఖా ఖండాన్ని గీయండి.

(ii) $\overline{BC}$ పై B వద్ద సూక్ష్మకోణం ఏర్పడే విధంగా ఒక కోణం గీయండి.

(iii) $\overline{BC}$ లో C వద్ద ఒక సూక్ష్మకోణం ఏర్పడే విధంగా ఒక రేఖ గీయండి. దాని వల్ల C వద్ద నిర్మించిన కోణ పరిమాణం, B వద్ద నిర్మించిన కోణ పరిమాణం సమానం కావలెను. (ప్రోటాక్టర్ సహాయంతో కోణం నిర్మించవచ్చును) (ii) (iii) లో గీసిన రెండు రేఖలు పరస్పరం ఖండించుకోవలెను. ఈ ఖండన బిందువును A అనుకోవలెను.

ఇప్పుడు ఏర్పడిన ΔABC లో m∠B = m∠C అగును. అదే విధంగా మరి రెండు త్రిభుజాలను నిర్మించి, ప్రతి త్రిభుజం పేరు ABC గా తీసుకోయండి. దాని వల్ల m∠B = m∠C గా ఉండవలెను. ప్రతీ త్రిభుజంలోని AB, AC లను కొలిసి కింది పట్టికలో రాయండి.

పట్టికను బట్టి చూడగా ప్రతీ త్రిభుజంలో AB=AC అని తెలుస్తుంది.

సిద్ధాంతం-4 : ఒక త్రిభుజంలోని రెండు కోణాల పరిమాణం సమానమైనచో వాటికెదురుగా ఉండే భుజాల పొడవులు కూడా సమానం.

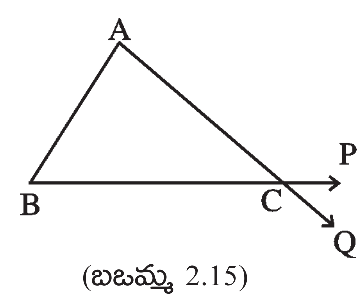
బొమ్మ నెం	AB	AC
1		
2		
3		

(బబొమ్మ 2.4)

2.5 త్రిభుజం యొక్క బాహ్యకోణం :

ఏదైనా ఒక త్రిభుజంలోని మూడు కోణాలను మనం అంతరకోణాలు (Interior angles) అందురు.

బొమ్మ 2.15 లో $\overrightarrow{CB}$ యొక్క వ్యతిరేక రశ్మి $\overrightarrow{CP}$ అయినచో ∠ACB యొక్క ఒక సన్నిహిత పరిపూరక కోణం ∠ACB ఏర్పడెను. అదే విధంగా $\overline{CA}$ యొక్క వ్యతిరేక రశ్మి $\overrightarrow{CQ}$ అయినచో ∠ACB యొక్క మరొక సన్నిహిత పరిపూరక కోణం ∠BCQ ఏర్పడును.



(బబొమ్మ 2.15)

$\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AQ}$ ల ఖండన బిందువు అగుటవల్ల $\angle ACP$ మరియు $\angle BCQ$ లు అభిముఖ లేక ప్రతిపకోణాలు. అందుచేత ఆ రెండు కోణాల పరిమాణం సమానం. నిర్వచనం ప్రకారం యొక్క శీర్షబిందువు C వద్ద ఏర్పడిన రెండు బాహ్యకోణాలు $\angle ACP$, $\angle BCQ$ అగును.

పరిశీలించినచో $\angle PCQ$, ΔABC యొక్క బాహ్యకోణం కాదు.

త్రిభుజం యొక్క బాహ్య కోణం గూర్చి తెలుసుకోవలసిన విషయాలు

(i) త్రిభుజంలో ప్రతీ శీర్షబిందువు వద్ద రెండు బాహ్యకోణాలు ఏర్పడును. ఆ రెండింటి పరిమాణం సమానం.

(ii) త్రిభుజంలో ఏదైనా శీర్షబిందువు వద్ద గల అంతరకోణం, బాహ్యకోణం పరిమాణాల మొత్తం 180^{0}.

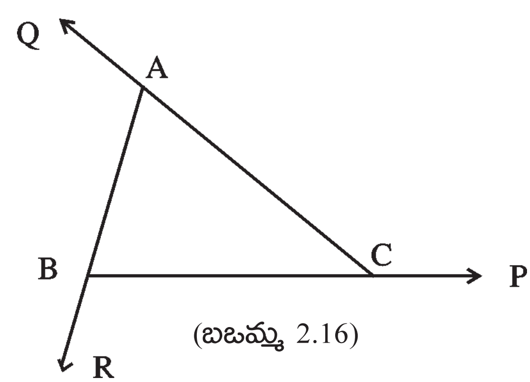
(iii) ΔABC యొక్క $\angle B$, $\angle C$ లను A వద్ద బాహ్యకోణం యొక్క అంతరాభిముఖ కోణాలు (Remote interior angles) అందురు.

పట్టిక : 5

ఏదైనా ఒక త్రిభుజం యొక్క శీర్షబిందువు వద్ద ఏర్పడిన బాహ్యకోణం పరిమాణం, దాని అంతరాభిముఖ కోణముల రెండింటి పరిమాణముల మొత్తంతో సమానం.

బొమ్మ 2.16

బొమ్మ 1.26 వంటి మూడు త్రిభుజాలను నిర్మించండి. ప్రతీ దానికి ABC Δ అని పేరు పెట్టండి. ప్రతీ బొమ్మలో $\overrightarrow{CB}$ వ్యతిరేక కిరణం $\overrightarrow{CP}$, AC వ్యతిరేక కిరణం $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{BA}$ వ్యతిరేక కిరణం $\overrightarrow{BR}$ లను నిర్మించండి.



(బఒమ్మ 2.16)

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ బాహ్యకోణాలు $\angle ACP$, $\angle BAQ$, $\angle CBR$ ల పరిమాణం కనుగొనండి. ప్రొటాక్టర్ సహాయంతో కింది పట్టికను పూర్తి చేయండి.

బొమ్మ నెం	$m\angle A+m\angle B$	$m\angle ACP$	$m\angle B + m\angle C$	$m\angle BAQ$	$m\angle C+m\angle A$	$m\angle CBR$
1						
2						
3						

పట్టిక : **2.5**

పై పట్టికను బట్టి చూడగా $m\angle ACP = m\angle BAC + m\angle ABC$; $m\angle BAQ = m\angle ABC + m\angle BCA$ మరియు $m\angle CBR = m\angle CAB + m\angle BCA$ ।

సిద్ధాంతం - 5

ఏదైనా ఒక త్రిభుజం యొక్క ఒక శీర్షబిందువు వద్ద ఏర్పడిన బాహ్యకోణం పరిమాణం, దాని అంతరాభిముఖ కోణముల రెండింటి పరిమాణముల మొత్తంతో సమానం. పైన తెలుసుకున్న సిద్ధాంతాలకు సంబంధంగా కొన్ని ఉదాహరణలు.

ఉ.దాహరణ -1

త్రిభుజం యొక్క రెండు కోణాల పరిమాణం 110^0, 36^0 అయినచో మూడవ కోణం పరిమాణం ఎంత ?

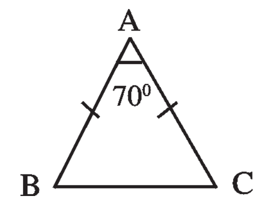
సమాధానం :

త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం పరిమాణం 180^0, రెండు కోణాల పరిమాణం 110^0, 36^0.

$\therefore$ అయిన దీని మూడవ కోణం పరిమాణం = 180^0 - $(110^0$-$36^0)$ = 180^0 + 146^0 = 34^0 (జవాబు)

ఉదాహరణ-2

ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజంలో శీర్షకోణ పరిమాణం 70^0 అయినచో ప్రతీ భూసంలగ్న కోణ పరిమాణం ఎంత ? మరియు C శీర్షబిందువు వద్ద గల బాహ్యకోణం ఎంత ?



(బొమ్మ 2.17)

సమాధానం :

ప్రక్కన గల బొమ్మ సమద్విబాహు త్రిభుజం

అందులో AB=AC, ప్రశ్న ప్రకారం $m\angle A = 70°$

ఇచ్చట AB=AC, అందువల్ల $m\angle B = m\angle C$

త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం పరిమాణం 180^0

$\therefore$ రెండు సమాన భూసంలగ్న కోణాల మొత్తం పరిమాణం = 180^0-70^0 = 110^0

$\therefore$ ఒక్కొక్క కోణ పరిమాణం $= \dfrac{110°}{2} = 55°$

$\therefore$ C శీర్షబిందువు వద్ద ఏర్పడిన బాహ్యకోణ పరిమాణం $= m\angle A + m\angle B = 70°+55° = 125°$ (జవాబు)

ఉదాహరణ-3

ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో ఒక సూక్ష్మకోణం పరిమాణం రెండవదానికి రెండు రెట్లు అయినచో ఒక్కొక్క సూక్ష్మకోణ పరిమాణం ఎంత ?

సమాధానం :

లంబకోణ త్రిభుజంలో ఒక కోణం లంబకోణం

$\therefore$ మిగిలిన రెండు కోణాల మొత్తం పరిమాణం = 180^0- 90^0=90^0

అనుకొనుము సూక్ష్మకోణాలలో ఒక దాని పరిమాణం x^0 అయినచో రెండవ దాని పరిమాణం $2x^0$

$\therefore\ x° + 2x° = 3x° \quad \Rightarrow \quad 3x° = 90°$

ఒక సూక్ష్మకోణ పరిమాణం $= x° = \dfrac{90°}{3} = 30°$

$\therefore$ మరొక సూక్ష్మకోణ పరిమాణం $= 2x° = 2 \times 30° = 60°$ (జవాబు)

అభ్యాసం - 2

1. కింది వానిలో సరైన వాటి ప్రక్కన (✔), తప్పైన వాటి ప్రక్కన (✖) గుర్తును పెట్టండి.

(a) $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CA}$ ఒక్కొక్కటి త్రిభుజం యొక్క ఒక్కొక్క భుజం ☐

(b) $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ మూడు రేఖాఖండాలతో ΔABC ఏర్పడుతుంది. ☐

(c) త్రిభుజం బిందువుల యొక్క సెట్

(d) ఒక స్థూలకోణ త్రిభుజంలో అత్యధికంగా ఒక స్థూలకోణం ఉండును.

(e) ΔABC యొక్క $\angle B, \angle C$ లను A వద్ద గల బాహ్యకోణం యొక్క అంతరాభిముఖ కోణాలు అందురు.

(f) ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో అత్యధికంగా రెండు సూక్ష్మకోణాలు ఉండును.

(g) ΔABC లో $AB = AC$ అయినచో $\angle A, \angle B$ రెండింటి పరిమాణం సమానం.

(h) త్రిభుజం యొక్క మూడు మధ్యమాల ఖండన బిందువు ఎల్లప్పుడూ త్రిభుజం అంతర భాగంలో ఉండక పోవచ్చును.

(i) త్రిభుజంలో రెండు కోణాల పరిమాణం ఎల్లప్పుడూ మూడవ కోణ పరిమాణం కంటె అధికంగా ఉండును.

(j) త్రిభుజం యొక్క మూడు కోణ బిందువులు త్రిభుజం యొక్క అంతరబిందువులగును.

(k) త్రిభుజంలో రెండు భుజాల మొత్తం పొడవు మూడవ భుజం కంటె అధికంగా ఉండును.

(l) ఒక త్రిభుజంలో ఒక శీర్షబిందువు వద్ద ఏర్పడే బాహ్యకోణ పరిమాణం, ఎల్లప్పుడూ దాని అంతరకోణం పరిమాణం కంటె ఎక్కువ.

2. **ఖాళీలను పూర్తి చేయండి.**

(a) ఒక త్రిభుజంలో ______________ శీర్షబిందువలు గలవు.

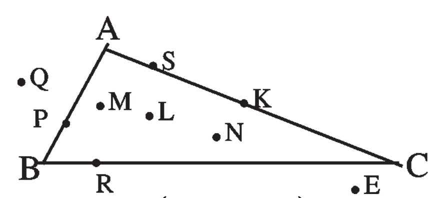
(b) ఒక త్రిభుజంలో మధ్యమాల సంఖ్య ______________

(c) ఒక త్రిభుజంలో భుజాల సంఖ్య ______________

(d) ఒక సూక్ష్మకోణ త్రిభుజం యొక్క కోణ బిందువు నుండి ఎదురుగా ఉన్న భుజంపై గీసిన లంబముల సంఖ్య ______________

(e) ఒక త్రిభుజంలోని కోణాల సంఖ్య ______________

3. ప్రక్కన గల బొమ్మను చూసి పట్టికలో గల బిందువుల ఉనికిని అనుసరించి సరైన గదిలో (✓) మార్కు ఉంచండి.

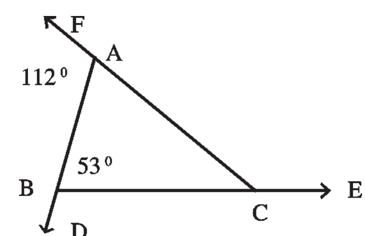


(పట్టిక-2.18)

బిందువుల ఉనికి	A	B	C	P	Q	R	L	E	M	N	S	K
ΔABC పైన												
ΔABC అంతర భాగంలో												
ΔABC బాహ్య భాగంలో												

పట్టిక : 2.6

4. Δ ABC యొక్క బాహ్య కోణములు $\angle BAF, \angle CBD, \angle ACE$ ఒకవేళ $m\angle BAF = 112°$, $m\angle ABC = 53°$ అయినచో మిగిలిన అన్ని కోణాల పరిమాణం కనుగొనండి.



(పట్టిక-2.19)

5. Δ ABC లో $m\angle A = 70°$, $m\angle B=36°$ అయినచో $m\angle C$ పరిమాణం కనుగొనండి.

Δ ABC ఏ రకపు త్రిభుజం ? కారణంతో జవాబు రాయండి.

6. Δ ABC లో $\angle A$ పరిమాణం $\angle B$ పరిమాణం కంటె 10^0 అధికం $\angle B$ పరిమాణం $\angle C$ పరిమాణం కంటె 10^0 అధికం అయిన మూడు కోణాల పరిమాణం కనుగొనండి.

7. Δ ABC లో $m\angle B = 90°$ అయినచో కింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.

(i) $m\angle A + m\angle C =$ ఎంత ?

(ii) AB = BC అయినచో $m\angle A$ ఎంత ?

(iii) $m\angle C = 30°$ అయినచో $m\angle A$ ఎంత ?

(iv) B బిందువు వద్ద Δ ABC యొక్క బాహ్యకోణ పరిమాణం ఎంత ?

(v) $m\angle A = 45°$ అయినచో Δ ABC లో ఏ రెండు భుజాలు సమానం ?

8. ABC లంబకోణ త్రిభుజంలో $m\angle B = 90°$, $\angle A$ పరిమాణం, $\angle C$ పరిమాణంనకు 5 రెట్లు, అయిన ఆ రెండు కోణాల పరిమాణాలను కనుగొనండి.

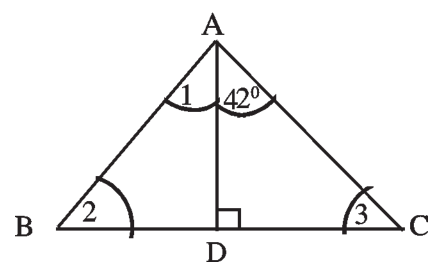
9. Δ ABC లో $M\angle A = 48°$, $m\angle B = 110°$ అయినచో కింది ఖాళీలను సరైన జవాబులతో పూరించండి.

(a) శీర్ష బిందువు ______________లో గల బాహ్యకోణం ఒక సూక్ష్మకోణం అగును.

(a) శీర్ష బిందువు A వద్ద గల బాహ్యకోణ పరిమాణం ______________

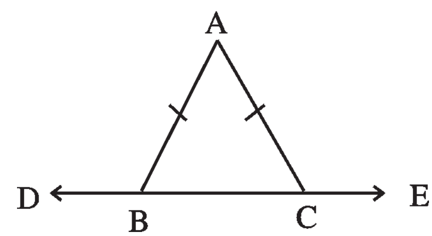
(a) B వద్ద గల బాహ్యకోణ పరిమాణం ______________

(a) C వద్ద గల బాహ్యకోణ పరిమాణం ______________



(బొమ్మ 2.20)

10. ప్రక్కన గల బొమ్మలో $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, AD=BD $m\angle DAC=42°$ అయినచో 1,2,3 గుర్తులు గల కోణాల పరిమాణం కనుగొనండి.



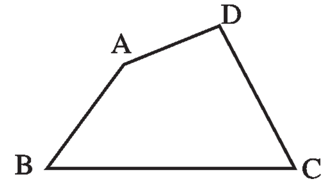
(బొమ్మ 2.21)

11. ΔABC (బొమ్మ 2.21)లో AB=AC అయినచో B,C బిందువుల వద్ద ఏర్పడే బాహ్యకోణాలు రెండింటి పరిమాణం సమానం అని రుజువు చేయండి.

12. ఒక త్రిభుజంలో ఒక బాహ్యకోణ పరిమాణం 120^0, దాని అంతరాభిముఖ కోణాలు రెండింటిలో ఒకదాని పరిమాణం 70^0, అయినచో మరొక అంతరాభిముఖ కోణ పరిమాణం కనుగొనండి ?

13. ప్రక్క బొమ్మలో రుజువు చేయండి.

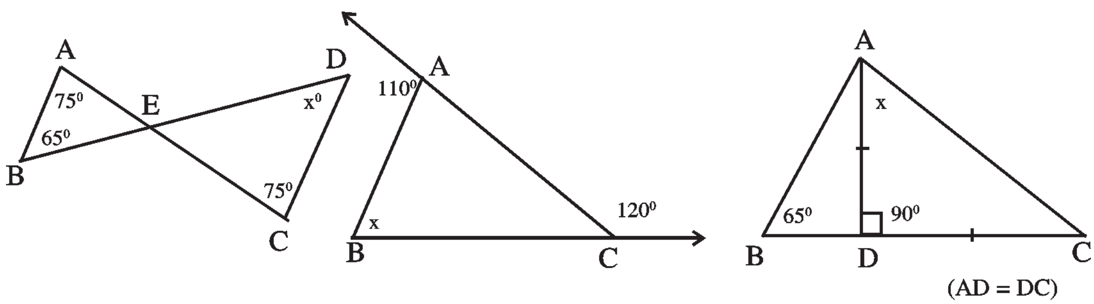
$AB + BC + CD + AD > 2\,AC$



(బొమ్మ 2.22)

14. ఒక త్రిభుజంలోని మూడు కోణాలలో ఒక దాని పరిమాణం మిక్కిలి చిన్న కోణ పరిమాణానికి రెండు రెట్లు మరొక దాని పరిమాణం మిక్కిలి చిన్న కోణ పరిమాణంను మూడు రెట్లు అయినచో మిక్కిలి పెద్ద కోణ పరిమాణం ఎంత ?

15. బొమ్మ 2.23 (i), (ii), (iii) లలో గల ‘x’ గుర్తు కోణం పరిమాణం కనుగొనండి.



(i) (ii) (iii)

(బొమ్మ 2.23)

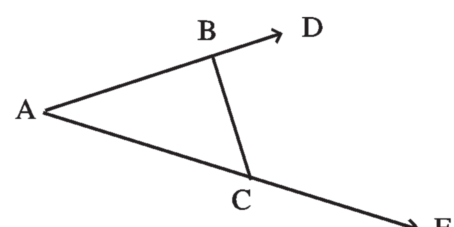
16. ఒక త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల పరిమాణంల అనుపాతం 2 : 3 : 4 అయినచో వాటి పరిమాణం ఎంత కనుగొనండి ?

17. ΔABC లో $m\angle A + m\angle B = 125°$, $m\angle A + m\angle C = 113°$ అయినచో త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల పరిమాణం కనుగొనండి.

18. ΔABC లో $2m\angle A = 3m\angle B = 6m\angle C$ అయినచో మూడు కోణాల పరిమాణంను కనుగొనండి.

19. ప్రక్కన గల బొమ్మ 2.24లో రుజువు చేయండి

$m\angle DBC + m\angle BCE > 2m\angle A$.



(బొమ్మ 2.24)

20. ΔABC లో $m\angle A = m\angle B + m\angle C$, $m\angle B = 2m\angle C$ అయినచో మూడు కోణాల పరిమాణంలను కనుగొనండి.

చతుర్భుజాలు
(QUADRILATERALS)

3వ అధ్యాయం

3.1 చతుర్భుజాలు పరిచయాలు :

ఒకే సరళరేఖపై లేని మూడు బిందువులు ABC అయినచో మనం మొత్తం మూడు రేఖా ఖండాలు $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ లను నిర్మించగలమని మునుపటి అధ్యాయంలో నేర్చుకున్నాం. ఈ మూడు రేఖఖండాలతో ఒక త్రిభుజం ఏర్పడుతుంది. దాన్ని Δ ABC అందురు. అని మీరు తెలుసుకున్నారు.

ఒకే సరళరేఖపై లేని మూడు బిందువులతో త్రిభుజ నిర్మాణం అన్ని పరిస్థితులలో సాధ్యమగుచున్నది.

ఒక సమతలంలోని నాలుగు బిందువులను గూర్చి ఆలోచిద్దాం.

ఒక సమతలంలో నాలుగు వేరు వేరు బిందువులు A,B,C,D లు ఒక సమతలంలో ముఖ్యంగా మూడు రకాల

స్థితులందు ఉండవచ్చును అవి :

(a) బిందువులన్నీ ఒకే రేఖలో

(b) ఏవైనా మూడు బిందువులు ఒకే రేఖలో

(c) ఏవైనా మూడు బిందువులు ఒక రేఖలో ఉండక పోవచ్చు.

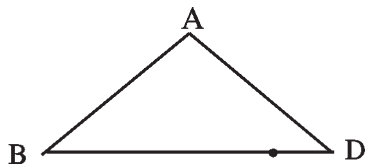
(i) బిందువులన్నీ ఒకే రేఖలో :-

(బొమ్మ 3.1)

ఈ స్థితిలో $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ ల కలయిక ఒకే రేఖాఖండం అవుతుంది. దీన్ని $\overline{AD}$ లేక $\overline{DA}$ అనవచ్చును. ($\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA} = \overline{AD}$)

(ii) మూడు బిందువులు ఒకే రేఖలో :-

B,C,D ఒకే రేఖలో ఉండి B,D ల మధ్య C ఉంది అనుకుందాం.

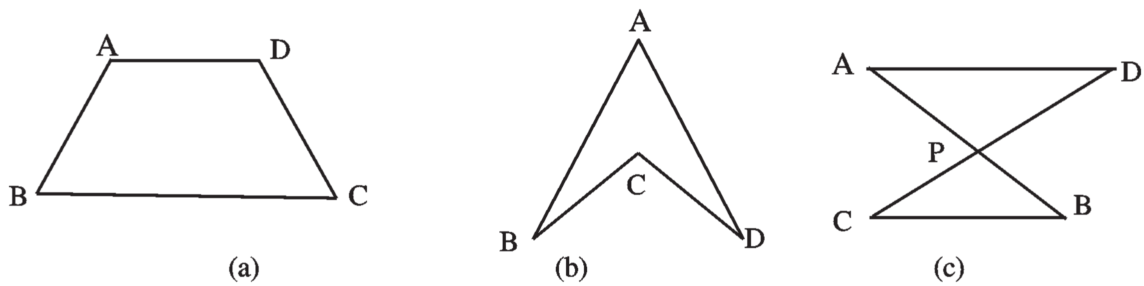


(బఒమ్మ 3.2)

$$(AB \cup BC \cup CD \cup DA) = \angle ABD$$

ఈ విషయంలో $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ ల కలయిక వల్ల ΔABD ఏర్పడింది.

(iii) ఏ మూడు బిందువులు ఒకే రేఖపై లేనప్పుడు :-



(బఒమ్మ 3.3)

ఇచ్చట ఇచ్చిన బిందువులలో A,B,C,D బిందువులలో ఏ మూడు బిందువులు కూడా ఒకే రేఖ పైన లేవు. బొమ్మ 3.3లో (a) (b) బొమ్మలలో $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ ఈ నాలుగు రేఖాఖండాలను నిర్మించినచో ఏర్పడిన రెండు బొమ్మలలో ఒక్కొక్కటి చతుర్భుజ బొమ్మలు.

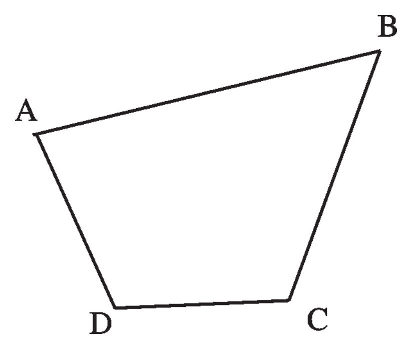
మూడవ బొమ్మ 3.3 (c) లో $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ రేఖాఖండాల నిర్మాణం ద్వారా ఏర్పడిన దాన్ని చతుర్భుజం అనలేం.

బొమ్మ 3.3లోని (a) (b) లలో చతుర్భుజాలు గలవు కాని బొమ్మ 3.3. (c) లో చతుర్భుజం ఏర్పడలేదు. చతుర్భుజాలపైన (బొమ్మ 3.3లో (క) (ఖ) చతుర్భుజం కాని (బొమ్మ 3.3లో (1) ఈ రెండు రకాల బొమ్మల స్థితిలో ఏ మార్పు గమనించారు ? $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ ల ఖండన బిందువులు సంఖ్యలో ఈ భేదం కాదు.

బొమ్మ 3.3 (a) (b) లు ఒక్కొక్క మనం ముందు చెప్పుకున్న రేఖఖండాలకు మొత్తం నాలుగు ఖండన బిందువులు గలవు ఆ ఖండన బిందువులు A,B,C,D లు అని రేఖాఖండాల ఒక్కొక్క చివరి బిందువులు. బొమ్మ 3.3 (c) లో A,B,C,D కంటె అధికంగా P ఖండన బిందువు కూడా గలదు. అందుచేత ఇందులో ఖండన బిందువులు మొత్తం ఐదు గలవు. ఈ స్థితిలో $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ లో లు $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ పరస్పరం చివర బిందువులకు ముందుగా మరొక బిందువు P వద్ద ఖండిచుకొనుచున్నాయి. ఈ పరిస్థితులలో చతుర్భుజం ఏర్పడుట సాధ్య కాదు.

నిర్వచనం (చతుర్భుజం)

ఒక సమతలంలో గల నాలుగు వేరు వేరు బిందువులు A, B, C, D లలో ఏవైనా మూడు బిందువులు ఒక సరళరేఖలో లేనప్పుడు లు $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ చివర బిందువులకు బదులు ఇతర బిందువుల వద్ద ఖండించుకొనప్పుడు $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ ల సంయోగం వల్ల ఏర్పడే బొమ్మను చతుర్భుజం అందురు. దీన్ని A,B,C,D చతుర్భుజమని చెప్పవచ్చును.



(బొమ్మ 3.4)

వ్యాఖ్య :

1. ABCD చతుర్భుజాన్ని BCDA, CDAB, DABC అని కూడా అనవచ్చును.
2. ABCD ఒక సమతలంలో ఏర్పడిన చిత్రం లే సమతలీయ చిత్రం ప్రక్కన గల బొమ్మ 3.4లో గల చతుర్భుజమును 'ABCD చతుర్భుజం' అందురు ఎందుకంటే ఇచ్చట $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ లు చివరి బిందువులు వద్ద ఖండించుకొనుట లేదు.
3. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ ఈ రేఖాఖండాలు బిందువుల యొక్క ఒక్కొక్క సెట్ అగును. అందుచేత వీటి కలయిక వల్ల ఏర్పడిన ABCD చతుర్భుజం కూడా బిందువుల యొక్క సెట్ అగును. అందుచేత సెట్ పరిభాషలో దీన్ని

   ABCD చతుర్భుజం = $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ గా రాయవచ్చును.

స్వయంగా చేయండి

(i) PQRS చతుర్భుజం, PRQS చుతుర్భుజం ఏఏ రేఖాఖండాలలో ఏర్పడుతున్నాయి ?

(ii) L, M, N, R లో ఏవైనా మూడు ఒక సరళరేఖలో లేవు. $\overline{LM}$, $\overline{MN}$, $\overline{NR}$, $\overline{RL}$ లు చివరి బిందువులు మినహ ఇతర బిందువుల వద్ద ఖండించుకొననిచో, ఈ సంయోగం వల్ల ఏర్పడే చిత్రంను ఏమందురు ? దాని పేరు రాయండి.

చతుర్భుజం గూర్చి తెలునుకోవలసిన విషయాలు :

(i) ABCD బిందువులను చతుర్భుజం యొక్క శీర్ష బిందువులు (Vertex) అందురు.

(ii) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ రేఖ ఖండాలను ABCD చతుర్భుజం యొక్క భుజాలు (Sides) అందురు. ఒక భుజం యొక్క రెండు బిందువులను చతుర్భుజం యొక్క వరుస శీర్షముల (Consecutive Vertices) అందురు. వరుస శీర్షములుగాని రెండు శీర్షములను వ్యతిరేఖ శీర్షములు (Opposite Vertices) అందురు. ABCD చతుర్భుజంలో A,B; B,C;, C,D; DA లు వరుస శీర్షములు కాగా A,C; B,D లు వ్యతిరేఖ శీర్షములగును

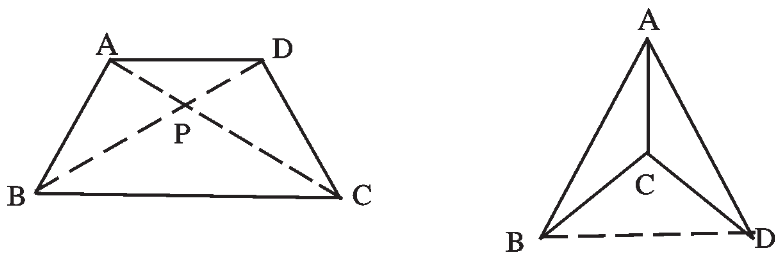
(iii) $\angle ABC$, $\angle BCD$,$\angle CDA$, $\angle DAB$ లను ABCD చతుర్భుజం యొక్క ఒక్కొక్క కోణం అందురు. రెండు వరుస శీర్షములందు గల రెండు కోణములను వరుస కోణములు **(Consecutive angles)** (ఇచ్చట $\angle A$, $\angle B$)

అని వ్యతిరేక శీర్షములందు గల రెండు కోణములను చతుర్భుజం యొక్క వ్యతిరేఖ లే అభిముఖకోణములు (Opposite angles) అని అందురు.

(iv) చతుర్భుజములో పరస్పరం ఖండించుకొనే రెండు భుజాలను సన్నిహిత భుజాలు (Adjacent sides) (ఇచ్చట) అని పరస్పరం ఖండించుకొని ప్రతీ జత భూభు (ఇచ్చట) వ్యతిరేక లే ఎదురెదురు భుజాలు (Opposite sides) అని అందురు.

(v) చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు శీర్షంలను కలుపు రేఖా ఖండాలను దాని కిర్ణములు (Diagonals) అందురు. ABCD చతుర్భుజంలో లు రెండు కర్ణాలు.

3.1.1. కుంభాకార చతుర్భుజం (Convex Quadrilateral) :



(a) (b)

(బఒమ్మ 3.5)

ABCD చతుర్భుజం అంటే $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ రేఖ ఖండాలు నాలుగింటి సంయోగం అని అర్థం. అనగా $AB \cup BC \cup CD \cup DA$ లను తెలియజేస్తుంది. ఈ నాలుగు రేఖఖండాలలోని బిందువులే ABCD చతుర్భుజంను ఏర్పరచుచున్నాయి. త్రిభుజం వలే చతుర్భుజం కూడా కుంభాకార సెట్ కాదు. త్రిభుజంలోని అంతర్భాగం-కుంభాకార సెట్ అని మనం ఇది వరకే తెలుసుకున్నాం. అదే విధంగా ABCD చతుర్భుజం (బొమ్మ 3.5 (a) (b) కుంభాకార సెట్ కాలేదు. 3.5 (a) (b) లలో దేనిలోపైనా BD లు రెండు బిందువులు. ఎందుకంటె ఇవి చతుర్భుజం యొక్క భుజాలపై ఉన్నాయి. కాని $\overline{BD}$ యొక్క చివరి బిందువులు. మీనహా ఇతర బిందువులు ఏవీ చతుర్భుజం యొక్క ఏ భుజం లోనూ లేవు. అందుచేత కుంభాకార సెట్ యొక్క నిర్వచనంను అనుసరించి చతుర్భుజం కుంభాకార సెట్ కాజాలదు.

కొన్ని ప్రత్యేక సంధర్భాలలో చతుర్భుజాలను గుర్తించుటకై కుంభాకార చతుర్భుజం అని పేరు వాడబడుచున్నది.

కుంభాకార చతుర్భుజం అని దేనిని అందురు ?

బొమ్మ 3.5 (a) (b) లను మరోక సారి పరిశీలించండి. 3.5 (a) బొమ్మలో నిర్మించిన చతుర్భుజం యొక్క రెండు కర్ణాలు $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ పరస్పరం ఖండించుకొనును. వాటి ఖండన బిందువును P అందురు. కాని బొమ్మ 3.5 (b) లో గల చతుర్భుజంలోని కర్ణాలు రెండూ అనగా లను నిర్మించి చూడండి. అవి పరస్పరం ఖండించుకొనుట లేదు. అవసరమై $\overleftrightarrow{AC}$ లేక $\overrightarrow{AC}$ ని నిర్మంచినచో అది $\overline{BD}$ ఖండించుకొనుటను చూడగలము. అప్పుడు లేక చతుర్భుజం యొక్క కర్ణం కాదు. కర్ణం ఒక రేఖాఖండం అందుచేత కేవలం $\overline{AC}$ ని మాత్రమే కర్ణం అందురు.

బొమ్మ 3.5(a) లో గల చతుర్భుజంను కుంభాకార చతుర్భుజం అని అందురు. కుంభాకార చతుర్భుజం నిర్వచనం దిగువున ఇవ్వబడింది.

నిర్వచనం : (కుంభాకార చతుర్భుజం) చతుర్భుజంలోని రెండు కర్ణాలు పరస్పరం ఖండించుకొనినచో ఆ చతుర్భుజంను కుంభాకార చతుర్భుజం అందురు.

వ్యాఖ్య : బొమ్మ 3.5(b) లోని చతుర్భుజం కుంభాకార చతుర్భుజం కాదు.

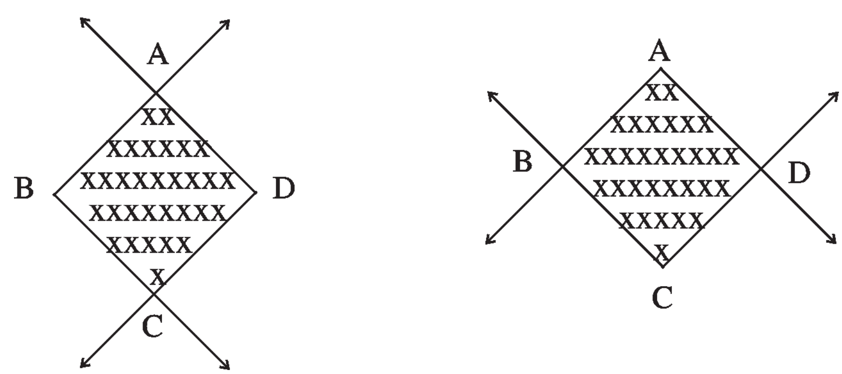
ఇప్పుడు మనం కేవలం కుంభాకార చతుర్భుజాన్ని గుర్చే తెలుసుకున్నాము. అందుచేత చతుర్భుజం అంటే కుంభాకార చతుర్భుజం అని అర్థం.

3.1.2 చతుర్భుజం యొక్క అంతర్భాగం బాహ్యభాగం (Interior and Exterior of a Quadrilateral)

ఇచ్చట కేవలం కుంభాకార చతుర్భుజం యొక్క అంతర్భాగంను సంబంధించి తెలుసుకుందాం.

నిర్వచనం (కుంభాకార చతుర్భుజ అంతర్భాగం)

ఏవైనా రెండు ఎదురెదురు కోణాల యొక్క అంతర్భాగం యొక్క సాధారణ భాగం అనగా అంతర్భాగం యొక్క ఖండనను కుంభకార చతుర్భుజం యొక్క అంతర్భాగం అందురు.



(a) (బఒమ్మ 3.6) (b)

బొమ్మ 3.6(a) ని చూడండి. కుంభాకార చతుర్భుజం ABCD యొక్క రెండు వ్యతిరేఖ కోణం $\angle B$, $\angle D$ యొక్క సాధారణ అంతర్భాగాన్ని 'x' గుర్తు ద్వారా గుర్తించడమయ్యింది. ఇది ABCD చతుర్భుజం యొక్క అంతర్భాగం.

వ్యతిరేఖ కోణాలు సాధారణ అంతర్భాగం అయినప్పటికి మనం దాన్ని ఒక అంతర్భాగంను గా చూడగలము బొమ్మ 3.6 (b) ని చూడండి.

ABCD లేక చతుర్భుజం యొక్క భూజాలపై గల ఇతర ఏ బిందువు చతుర్భుజం అంతర్భాగంలో లేదు.

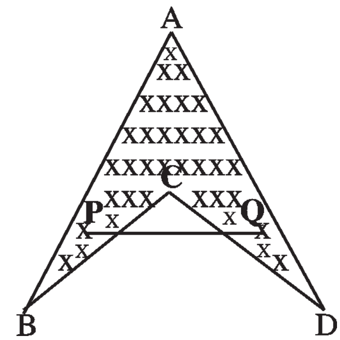
అంతర్భాగంలో గల బిందువును చతుర్భుజం యొక్క అంతర బిందువు (Interior point) అందురు.

చతుర్భుజం యొక్క సమతలంలో గల ఒక బిందువు చతుర్భుజం యొక్క ఏ భుజం పైన లేకున్నా చతుర్భుజం అంతర్భాగంలో కూడా లేకున్నా అప్పుడు దాన్ని చతుర్భుజం యొక్క బాహ్యబిందువు (Interior point) అందురు. బాహ్యబిందువులతో ఏర్పడే సెట్‌ను చతుర్భుజం యొక్క బాహ్యభాగం (Exterior) అందురు.

పరీక్ష చేసి చూడండి :

1. ఒక కుంభాకార చతుర్భుజం యొక్క అంతర్భాగం ఒక కుంభాకార సెట్ (బొమ్మ 3.6ను పరీక్ష చేసి చూడండి)

బొమ్మ 3.7 ఒక కుంభాకార చతుర్భుజం కాదు. (ఎందుకు ?) ఇటువంటి చతుర్భుజం యొక్క అంతర్భాగ నిర్వచనం మీకు ఇవ్వలేదు. జామెట్రీలో నిర్వచనం ఇవ్వనప్పటికి అంతర్భాగాని గుర్తుల ద్వారా గుర్తించడమయ్యింది. P, Q లు అంతర్భాగంలోని రెండు బిందువులు వాటిని కలిపే రేఖాఖండం అంతర్భాగంలో లేదు. బొమ్మను చూసి దీన్ని తెలుసుకోగలం. కావున ఇటువంటి అంతర్భాగం కుంభాకారం కాదు. ఇటువంటి చతుర్భుజాన్ని కుంభాకార చతుర్భుజం అనరని ఇది వరకే మనం తెలుసుకున్నాం.



(బొమ్మ 3.7)

'కుంభాకార చతుర్భుజం' ఈ పేరులేని వాస్తవాన్ని ఇప్పుడు తెలుసుకుందాం కుంభాకార చతుర్భుజం అన్నది కుంభాకార అంతర్భాగం గల ఒక చతుర్భుజం

2. చతుర్భుజం బాహ్యబాగం కుంభాకార సెట్ కాదు. ఇది ఒక సులభమైన పరీక్ష స్వయంగా చేసి చూడండి.

3. కుంభాకార చతుర్భుజంలోని రెండు కర్ణాలు పరస్పరం ఖచిన అంతర్భాగంలో ఖండించుకొనెను.

3.1.3 చతుర్భుజ క్షేత్రం (Quadrilateral Region)

ఒక త్రిభుజం, దాని అంతర్భాగం ద్వారా ఏర్పడే సెట్‌ను ఒక త్రిభుజాకార క్షేత్రం (Triangular Region) అందురని త్రిభుజం శీర్షబిందువులు, కోణాలు, భుజాలు, వరుసగా ఈ త్రిభుజాకార క్షేత్రం శీర్షబిందువులు, కోణాలు, భుజాలు అందురు. అని గత అధ్యాయంలో తెలుసుకున్నారు.

అదే విధంగా -

క) ఒక చతుర్భుజం, దాని అంతర్భాగంలో ఏర్పడే సెట్‌ను ఒక చతుర్భుజాకార క్షేత్రం లేక చతుర్భుజాకార క్షేత్రం (Quadrilateral Region) అందురు.

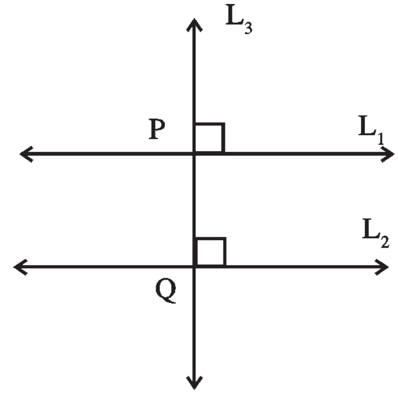
ఖ) చతుర్భుజం యొక్క శీర్షబిందువులు, కోణాలు, భుజాలు వరుసగా ఈ చతుర్భుజాకార క్షేత్రం శీర్షబిందువులు కోణాలు, భుజాలు అని అందురు.

3.2. వివిధ రకాల చతుర్భుజాలు (Types of Quadrilaterals)

గత అధ్యాయంలో నేర్చుకున్న అంశాలను గుర్తుకు తెచ్చుకోయండి.

(i) ఒక సమతలంలోని రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం ఖండించుకొనినచో ఆ రెండు రేఖలను సమాంతర రేఖలు (Parallel Lines) అందురు బొమ్మ 3.8లో $L_1 \parallel L_2$ అ లు సమాంతర రేఖలు, దీని మనం అని రాయవచ్చును.

(ii) L_3 రేఖ L_1 పై లంబమైనచో L_2 పై కూడా లంబమగును.



(బొమ్మ 3.8)

(iii) L_1, L_2 రెండింటిపై లంబమైన L_3 పై రేఖ L_1, L_2 లను వరుసగా P,Q బిందువులు వద్ద ఖండించినచో L_1, L_2 మధ్య దూరం = PQ

పై అంశాలను మనం అవసరమైన స్థలంలో ప్రయోగించ వచ్చును.

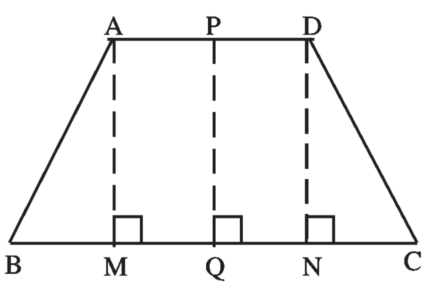
ఒక చతుర్భుజం యొక్క భుజముల మధ్యలో గల వివిధ సంబంధాలను తీసుకొని విశేష రకాల చతుర్భుజాలను (Special types of quadrilaterals) నిర్మించవచ్చును. వాటినన్నింటిని వేరు వేరు పేర్లు పెట్టవచ్చును.

3.2.1 కొన్ని స్వతంత్ర చతుర్భుజాలు :-

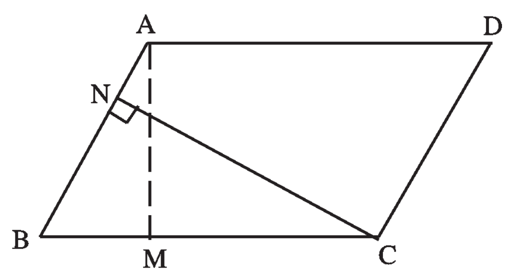
చతుర్భుజం యొక్క వ్యతిరేక జత భుజలో మధ్యలో గల సమాంతరాన్ని అనుసరించి చతుర్భుజాన్ని ముఖ్యంగా రెండు రకాలుగా విభజించవచ్చును. 1) ట్రెపిజియం 2) సమాంతర చతుర్భుజం

1. ట్రెపిజియం : ఒక ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉంటే చతుర్భుజాన్ని ట్రెపిజియం (Trapesium) అందురు. బొమ్మ 3.9 (a) లో ABCD చతుర్భుజం యొక్క $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ అగుటవల్ల ABCD చతుర్భుజం ఒకే ట్రెపిజియం అవుతుంది. ఇందులో AB, DC లు రెండూ అసమాంతరాలు.

ట్రెపిజియంలోని రెండు సమాంతర భుజాల మధ్య దూరాన్ని ట్రెపిజియం ఎత్తు (Height) అందురు. బొమ్మ 2.9 (క)లో ABCD ట్రెపిజియం ఎత్తు PQ అగును.



(బఒమ్మ 3.8)



(బఒమ్మ 3.9)

2. సమాంతర చతుర్భుజం :

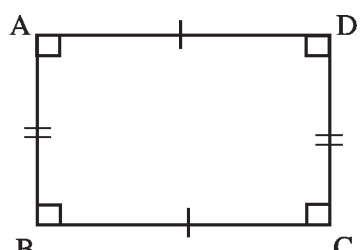
ఒక చతుర్భుజంలోని రెండు జతల వ్యతిరేఖ భుజాలు సమాంతరమైనచో దాన్ని ఒక సమాంతర చతుర్భుజం (Parallelogram) అందురు.

బొమ్మ 3.9 (b) లో ABCD చతుర్భుజంలో వ్యతిరేఖ భుజాలు $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ఆ చతుర్భుజాన్ని సమాంతర చతుర్భుజం అందురు.

బొమ్మ 3.9 (b) లో గల సమాంతర చతుర్భుజంలో వ్యతిరేక భుజాలు $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ ల మధ్య దూరం CN, ABCD సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క $\overline{BC}$ భుజాన్ని $\overline{AD}$ భూమిగా తీసుకున్నచో AM ఎత్తుగా తీసుకోవచ్చును. అదే $\overline{AB}$ విధంగా $\overline{DC}$ ని భూమిగా తీసుకున్నచో సమాంతర చతుర్భుజం ఎత్తు CN అగును.

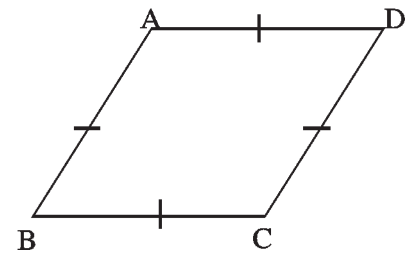
(i) దీర్ఘ చతురస్రం : ఒక చతుర్భుజంలోని ప్రతీ కోణం ఒక లంబకోణం అయినచో దాన్ని దీర్ఘచతురస్రం (Rectangle) అందురు.

ప్రతీ కోణం లంబకోణ మైనచో ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరరేఖ తరువాత రుజువు చేయబడును. కావున దీర్ఘ చతురస్రం ఒక స్వతంత్రమైన సమాంతర చతుర్భుజం దీని ప్రతీ కోణం పరిమాణం 90° బొమ్మ 2.10లో ఒక దీర్ఘ చతురస్రం ABCD ని చూపించడమైనది.



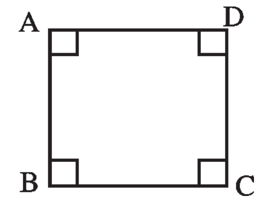
(బఒమ్మ 3.10)

(ii) రోంబస్ (Rhombus) : ఒక చతుర్భుజంలోని భుజాల పొడవు సమానమైనచో అది ఒక రోంబస్ (Rhombus) అగును. భుజాలు సమానమైనచో ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరమగును. దీని గూర్చి తరువాత రుజువు చేద్దాం. అందుచేత రోంబస్ కూడా ఒక స్వతంత్రమైన సమానంతర చతుర్భుజం అగును. దీని భుజాల పొడవు సమానం బొమ్మ 3.11లో ABCD ఒక రోంబస్



(బఒమ్మ 3.11)

(iii) సమచతురస్రం (square) : ఒక చతుర్భుజంలోని భుజాల పొడవులు సమానమై ప్రతీ కోణ పరిమాణం 90^0 అయినచో అది ఒక సమచతురస్రం (Square) అగును. అందుచేత సమచతురస్రం ఒక లంబకోణాలు గల రోంబస్ అగును. బొమ్మ 3.12లో ABCD ఒక సమచతురస్రం.



(బఒమ్మ 3.12)

పై చతుర్భుజాలలోని భేదాలను బట్టి వాటిని కింది చార్టుగా చూపించవచ్చును.

చతుర్భుజం (నాలుగు భుజాలు గలది)

సమాంతర చతుర్భుజం
(రెండు జతల వ్యతిరేక భుజాలు సమాంతరాలు)

ట్రెపిజియం
(కేవలం ఒక జత వ్యతిరేక భుజాలు సమాంతరం)

భుజాల పొడవు సమానం

కోణాలు సమానం

రోంబస్

దీర్ఘచతురస్రం

(కోణాలు లంబకోణాలు)

సమచతురస్రం

(భుజాల పొడవులు సమానం)

అభ్యాసం-3 (క)

1. కింది వాక్యాలలో సరైన వాటి ప్రక్కన (✓) గుర్తును, తప్పైన వాటి ప్రక్కన (✗) గుర్తులు చేర్చండి.

   (a) కుంభాకార చతుర్భుజంలోని కర్ణాలు పరస్పరం చతుర్భుజం అంతర్భాగమందు ఖండించుకొనును.

   (b) ఎటువంటి చతుర్భుజము నందైనా రెండు కర్ణాలు పరస్పరం చతుర్భుజం అంతర్భాగమందు ఖండించుకొనును.

   (c) చతుర్భుజం అంతర్భాగం ఒక కుంభాకార సెట్

   (d) చతుర్భుజం ఒక కుంభాకార సెట్

   (e) చతుర్భుజం యొక్క ప్రతీ కర్ణం ఒక కుంభాకార సెట్

   (f) చతుర్భుజం బాహ్యభాగం ఒక కుంభాకార సెట్

(g) చతుర్భుజం బాహ్యభాగంలోని బిందువులు ఒక సెట్ [ ]

(h) ఒక చతుర్భుజం దాని అంతర్భాగం సంయోగం వల్ల ఏర్పడిన సెట్‌ను చతుర్భుజ క్షేత్రం అందురు [ ]

(i) ఒక చతుర్భుజం దాని అంతర్భాగం లందు ఎటువంటి సాధారణ బిందువు లేదు. [ ]

(j) నాలుగు భుజాలతో కలుపబడియున్న క్షేత్రంను చతుర్భుజం అందురు. [ ]

2. ఖాళీలను పూర్తి చేయండి.

(a) ఒక సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ____________ సమానమైనచో అది ఒక రోంబస్ అగును.

(b) ఒక యొక్క కోణాలు లంబకోణాలైనచో అది ఒక దీర్ఘచతురస్రం అగును.

(c) ఒక ____________ యొక్క కోణాలు సమానమైనచో అది ఒక సమచతురస్రం అగును.

(d) ఒక చతుర్భుజంలోని ఒక జత వ్యతిరేక భుజాలు సమాంతరమైనచో దాన్ని ఒక ____________ అందురు.

(e) ఒక చతుర్భుజంలోని రెండు జతల వ్యతిరేక భుజాలు పరస్పరం సమానమైనచో దాన్ని ____________ అందురు.

(f) ట్రెపిజియంలో రెండు సమాంతర భుజాల మధ్య దూరాన్ని దాని యొక్క ____________ అందురు.

(g) ABCD చతుర్భుజంలో $\overline{AB} \parallel \overline{CD}, \overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $m\angle ABC = 90^\circ$ ఆ చతుర్భుజం ఒక ____________ అగును.

3. కింది వాక్యాలలో సరైన వాటి ప్రక్కన (✓) గుర్తును, తప్పైన వాటి ప్రక్కన (✗) చేర్చండి.

(a) ప్రతీ దీర్ఘచతురస్రం ఒక సమాంతరం చతుర్భుజం [ ]

(b) ప్రతీ సమాంతర చతుర్భుజం ఒక ట్రెపిజియం [ ]

(c) ప్రతీ సమచతురస్రం ఒక సమాంతర చతుర్భుజం [ ]

(d) ప్రతీ రోంబస్ ఒక సమచతురస్రం [ ]

(e) ప్రతీ రోంబస్ ఒక సమాంతర చతుర్భుజం [ ]

(f) ప్రతీ దీర్ఘచతురస్రం ఒక సమచతురస్రం [ ]

(g) ప్రతీ ట్రెపీజయం ఒక దీర్ఘచతురస్రం [ ]

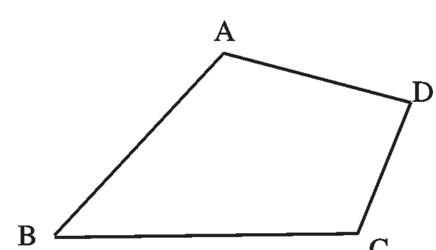
3.3 చతుర్భుజాలకు సంబంధించిన కొన్ని పరీక్షలు సిద్ధాంతాలు :-

చతుర్భుజాలు, వాటికి సంబంధించిన వివిధ పదాలు నిర్వచనాలు తెలుసుకున్నాం. కొన్ని స్వతంత్ర చతుర్భుజాల నిర్వచనలు కూడా తెలుసుకున్నాం. ఇప్పుడు పరీక్ష ద్వారా వాటికి సంబంధించిన వివిధ విషయాలు తెలుసుకుందాం. పరీక్ష ద్వారా విషయాలను నేర్చుకుందాం.

(A) చతుర్భుజంలోని కోణాల మధ్య సంబంధం :

పరీక్ష-1

వివిధ ఆకారంలో మూడు కుంభాకార చతుర్భుజాలను నిర్మించండి. ప్రతీ దానికి బొమ్మ 3.13 లో వలే పేరు పెట్టండి.



(బొమ్మ 3.13)

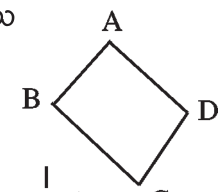
$\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ పరిమాణంలను ప్రొటాక్టర్ సహాయంతో తెలుసుకొని కింది పట్టికలో రాయండి.

బొమ్మ నెం.	$m\angle A$	$m\angle B$	$m\angle C$	$m\angle D$	$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D$
1					
2					
3					

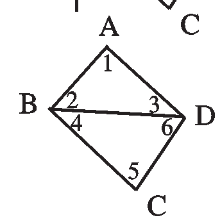
పట్టిక : **3.1**

పై పట్టికలోని చివరి స్తంభం చూడండి. ప్రతీ చతుర్భుజం **ABCD** లో $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360°$ గలవు

సిద్ధాంతం-1 : ఒక కుంభాకార చతుర్భుజంలోని నాలుగు కోణాల మొత్తం 360^0లు



I

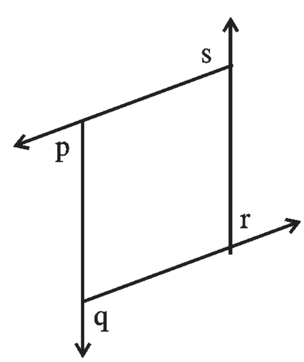


మీరు చేయవలసిన పని :

1. ఒక కార్డుబోర్డును తీసుకొని దానిపై ఒక చతుర్భుజం నిర్మించండి
2. చతుర్భుజాన్ని రెండు త్రిభుజాలుగా చేసే విధంగా కర్ణం నిర్మించండి.
3. త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^0 లను ప్రయోగించి చతుర్భుజంలోని నాలుగు కోణల మొత్తం 360^0 అని చూపండి.

స్వయంగా చేయండి.

1. ప్రక్కన గల బొమ్మలో PQRS గుర్తులు గల కోణాల పరిమాణం కనుగొనండి.
2. ప్రక్కన గల బొమ్మలో R కోణం పరిమాణం 70^0 అయినచో P కోణ పరిమాణం 50^0 అయినచో Q,S కోణాల మొత్తం ఎంత ?



ఉదాహరణ-1 : ABCD కుంభాకార చతుర్భుజంలో $\mathbf{m\angle A = 105°}$, $\mathbf{m\angle B = 65°}$, $\mathbf{m\angle C = 60°}$ అయిన $\mathbf{m\angle D}$ పరిమాణం ఎంత ?

సమాధానం : ABCD చతుర్భుజంలో కోణాల మొత్తం పరిమాణం 360^0

$\therefore\ m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360°$

$\Rightarrow\ 105° + 65° + 60° + M\angle D = 360°$

$\Rightarrow\ 230° + m\angle D = 360°$

$\Rightarrow\ m\angle D = 360° - 230° = 130°$

$\therefore\ m\angle D = 130°$ (Answaer)

ఉదాహరణ-2 : ఒక చతుర్భుజంలోని కోణాల అనుపాతం 2 : 3 : 5 : 8 అయిన ఒక్కొక్క కోణ పరిమాణం ఎంత ?

సమాధానం : చతుర్భుజంలోని నాలుగు కోణాల పరిమాణం : $sx^0, 3x^0, 5x^0, 8x^0$ అనుకుందాం

$\therefore\ 2x^0+3x^0+5x^0+8x^0=360$

($\therefore$ చతుర్భుజంలో నాలుగు మొత్తం = 360^0)

$\Rightarrow\ 18x = 360° = x = \frac{360}{18} = 20$ అందువలన కోణాల వరుసంగా2x20, 3x20,

$\therefore$ కోణాల పరిమాణం వరుసగా $40°, 60°, 100°, 160°$

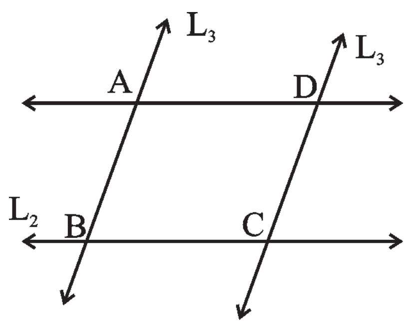
పరీక్ష - 2

సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు భుజాల మధ్య సంబంధం నిరూపణ :-

సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఎదురెదురు భుజాలు పరస్పరం సమాంతరం, ఇది నిర్వచనం ద్వారా మనకు తెలుసు. ఇప్పుడు వివిధ ఆకృతులలో మూడు సమాంతర చతుర్భుజాలను నిర్మించండి. వాటి ఎదురెదురు భుజాల మధ్య గల సంబంధాన్ని పరిశీలిద్దాం.

సమాంతర చతుర్భుజ నిర్మాణ ప్రణాళిక :-

(i) మీరు కింది తరగతులలో చదివిన ప్రణాళికను అనుసరించి రెండు జతల సమాంతర సరళరేఖలను నిర్మించండి. ఇప్పుడు ABCD సమాంతర చతుర్భుజాన్ని పొందాము.



(బొమ్మ 3.14)

(ii) బొమ్మ 3.14 వలె మరో రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలను నిర్మించి, ఒక్కొక్క చిత్రానికి ABCD అని పేరు పెట్టండి. ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో ఒక జత ఎదురెదురు (లేక అభిముఖ) భుజాలు అయిన, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ మరియు మరొక జత ఎదురెదురు భుజాలు అయిన $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ ల యొక్క పొడవులను కొలచి పట్టికలో రాయండి.

బొమ్మ నెం.	$\overline{AB}$ పొడవు(AB)	$\overline{CD}$ పొడవు (CD)	$\overline{BC}$ పొడవు (BC)	$\overline{AD}$ పొడవు (AD)
1				
2				
3				

పట్టిక **: 3.2**

పై పట్టిక నుండి చూస్తే ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో AB = CD మరియు AD = BC

సిద్ధాంతం-2 సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు భుజాలు పొడవులలో సామాన్య భేదం ఉండవచ్చు. కాని సుమారుగా సమానం.

చిత్రాన్ని తప్పులు లేకుండా ఎంత బాగా నిర్మించగలిగితే తప్పులు అంత తక్కువగా ఉండే అవకాశం గలదు.

ఉపసిద్ధాంతం-1 : సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరము సమానము

ఉపసిద్ధాంతం-2 : ఒక చతుర్భుజంలోని ఒక జత భుజాలు సమాంతరం సమానం అయినచో అది ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అగును.

ఉదాహరణ-3 : PQRS సమాంతర చతుర్భుజంలో PQ =12 సెం.మీ., RQ =7 సెం.మీ. అయినచో దాని చుట్టుకొలతను కనుగొనండి.

సమాధానం : PQRS సమాంతర చతుర్భుజంలో PQ=RS =12 సెం.మీ. RQ=SP =7 సెం.మీ. (సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమానం కనుక చుట్టుకొలత = (12+7+12+7) = 38 సెం.మీ.

$\therefore$ ఇచ్చిన సమాంతర చతుర్భుజం చుట్టుకొలత = 38 సెం.మీ.

పరీక్ష - 3

(C) సమాంతర చతుర్భుజంలో వేరు వేరు ఆకృతులలో మూడు సమాంతర చతుర్భుజాలను నిర్మించండి. ప్రతి దానిని ABCD అనుకొనండి. ప్రతి బొమ్మలోని $m\angle A, m\angle B, m\angle C, m\angle D$ పరిమాణం ప్రొటాక్టర్ సహాయంతో తెలుసుకొని పట్టికలో రాయండి.

బొమ్మ నెం.	**m∠A**	**m∠B**	**m∠C**	**m∠D**
1				
2				
3				

పట్టిక : **3.3**

పై పట్టికను బట్టి చూడగా $m\angle A = m\angle C, m\angle B = m\angle D$ అని తెలుస్తుంది

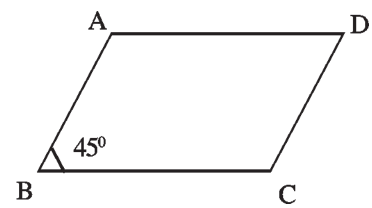
సిద్ధాంతం-3 :

సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు కోణాల పరిమాణం పరస్పరం సమానం.

ఉపసిద్ధాంతం : సమాంతర చతుర్భుజంలో రెండు సన్నిహిత కోణాల పరిమాణం మొత్తం 180^0పై పట్టికలోని రెండు సన్నిహిత కోణాల పరిమాణంను కలపండి. ఆ మొత్తం 180^0లు అగును. (తప్పు లేకుండా కోణాలను కొలవ వలసిన అవసరం ఉన్నది)

ఉదాహరణ-4 : బొమ్మ 3.17లో గల సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో $m\angle B = 45°$ అయినచో దాని ఇతర కోణాల పరిమాణం కనుగొనండి.

సమాధానం : $m\angle D = m\angle B = 45°$ (సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు కోణాలు సమానం)



(బొమ్మ-3.17)

$$m\angle B + m\angle D = 45° + 45° = 90°$$

అందుచేత $m\angle C + m\angle A$

$= 360° - (m\angle B + m\angle D)$ సిద్ధాంతం-1

$= 360° - 90° = 270°$

కాని $m\angle A = m\angle C$ (సిద్ధాంతం-3)

$$m\angle A = m\angle C = \frac{270°}{2} = 135°$$

పరిశీలించండి : $m\angle B + m\angle C = 45° + 135° = 180°$

$m\angle A + m\angle D = 45° + 135° = 180°$

అందుచేత సమాంతర చతుర్భుజంలో వరుస కోణాలు రెండు పరస్పరం పరిపూరకాలు

ఉదాహరణ-5 : బొమ్మ 3.18లో ABCD సమాంతర చతుర్భుజం. C వద్ద ABCD సమాంతర చతుర్భుజం బాహ్యకోణ పరిమాణం 50^0 అయిన సమాంతర చతుర్భుజంలోని కోణాల పరిమాణం కనుగొనండి.

సమాధానం :

$m\angle BCD = 180° - 50° = 130°$ (సన్నిహిత పరిపూరక కోణాలు)

$m\angle BAD = m\angle BCD = 130°$ (సిద్ధాంతం-3)

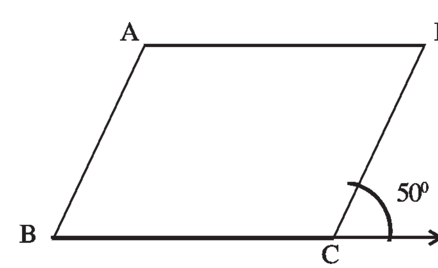
$m\angle ABC + m\angle ADC = 360° - (m\angle BAD + m\angle BCD)$

$= 360° - (130° - 130°)$

$= 360° - 260° = 100°$

కాని $m\angle ABC = m\angle ADC$ (సిద్ధాంతం-3)

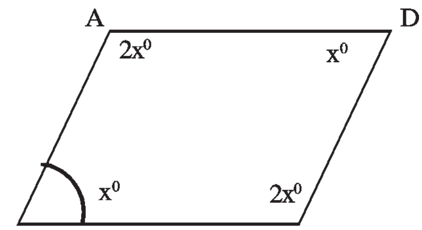
$$\therefore \ m\angle ABC = m\angle ADC = \frac{100°}{2} = 50°$$



(బొమ్మ-3.18)

ఉదాహరణ-6 : ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలోని రెండు వరుస కోణములలో ఒక దాని పరిమాణం మరొక దాని పరిమాణమునకు రెండు రెట్లు అయిన ఒక్కొక్క కోణ పరిమాణం కనుగొనండి.

సమాధానం : ప్రక్కన గల బొమ్మ 3.19 లో ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో $m\angle A = m\angle C$ మరియు $m\angle B = m\angle D$ ఇచ్చట లు రెండు వరుస కోణాలు



(బొమ్మ-3.19)

ప్రశ్నను అనుసరించి $\angle C$ పరిమాణం, $\angle B$ పరిమాణంనకు రెండు $M\angle B = x^\circ$ రెట్లు

$\therefore$ $m\angle C = 2x^\circ$ అనుకున్నచో అగును.

$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^\circ$ అని మనకు తెలుసు

$\Longrightarrow 2x^\circ + x^\circ + 2x^\circ + x^\circ = 360^\circ \quad (m\angle B = m\angle D,\ m\angle C = m\angle A)$

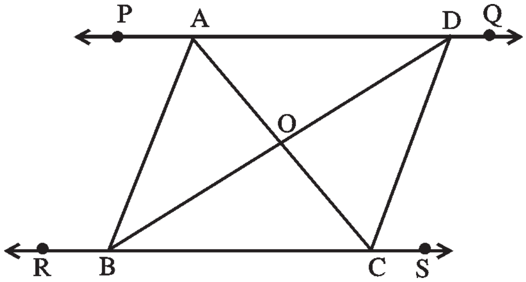
$\Longrightarrow 6x^\circ = 360^\circ \quad \Longrightarrow x^\circ = 60^\circ$

$\therefore$ $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ కోణాల పరిమాణం వరుసగా $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$ (జవాబు)

ఘ) సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణాల మధ్య గల సంబంధాలు :

పరీక్ష-4 : ఇంతకు ముందు తెలుసుకున్న పద్ధతులలో వివిధ ఆకృతులలో మూడు సమాంతర చతుర్భుజాలను నిర్మించండి. వాటిని బొమ్మ 3.20లో వలే పేర్లు పెట్టండి. ప్రతీ సమాంతర చతుర్భుజంలో కిర్ణాలు లను నిర్మించండి. రెండు కర్ణాల ఖండన బిందువును 'O' అనుకోయండి.

$\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{DO}$ ల పొడవులు కొలిసి కింది పట్టికలో రాయండి.



(బొమ్మ 3.20)

బొమ్మ నెం.	AO	CO	BO	DO
1				
2				
3				

పట్టిక **3.4**

పట్టికను బట్టి చూడగా సమాంతర చతుర్భుజంలో AO=CO; BO=DO అని తెలుసుచున్నది. అనగా $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ కర్ణాలు రెండు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొనును.

సిద్ధాంతం-4 : సమాంతర చతుర్భుజంలో రెండు కర్ణాలు పరస్పరం ఖండించుకొనును.

ఉదాహరణ-7 : PQRS సమాంతర చతుర్భుజంలో $\overline{PR}$, $\overline{QS}$ కర్ణాల రెండింటి ఖండన బిందువు O.PO = 16 సెం.మీ., OR=(X+Y) సెం.మీ; SO = 20 సెం.మీ. QO=(Y+7) = సెం.మీ. అయిన x,y ల విలువలు ఎంత ?

సమాధానం : PQRS సమాంతర చతుర్భుజంలో SO=QO; PO=RO

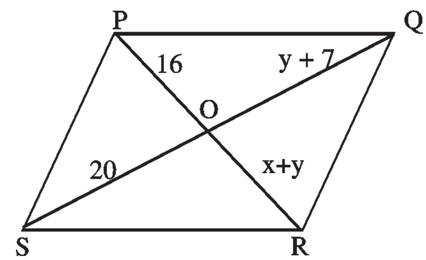
$\therefore \quad 20 = y + 7; \quad 16 = x + y$

$y + 7 = 20, \Rightarrow y = 20 - 7 = 13$

తిరిగి $16 = x + y \Longrightarrow x + 13 = 16$

$\Longrightarrow x = 16 - 13 = 3$

$\therefore$ x, y ల విలువ వరుసగా 13, 3 (జవాబు)



(బొమ్మ–3.21)

రోంబస్ కర్ణాల మధ్య గల సంబంధం :

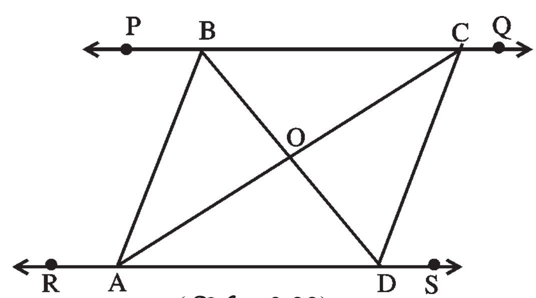
సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణాలు రెండు సమద్విఖండన చేసుకొనునని మనకు తెలుసు. సమాంతర చతుర్భుజాల భుజాలపై వివిధ నియమాలను ప్రయోగించే దీర్ఘ చతురస్రం, రోంబస్ లేక సమచతురస్రం వంటి వాటిని గూర్చి తెలుసుకున్నారు. వాటి కర్ణాల మధ్య కూడా ఆకర్షణీయమైన సంబంధం గలదు. మొదట రోంబస్ నందలి రెండు కర్ణాల మధ్య గల సంబంధం గూర్చి తెలుసుకుందాం.

రోంబస్ నిర్మాణ పద్ధతి :

మీరు చేయవలసిన పని :

(i) సమాంతర చతుర్భుజ నిర్మాణ సోపానం (క)ను అనుసరించి మూలమట్టం సహాయంతో రెండు సమాంతర రేఖలు $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{RS}$ ను నిర్మించండి.

(ii) $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{RS}$ ల ఖండన రేఖ $\overline{AB}$ ని నిర్మించండి. $\overleftrightarrow{RS}$ పై $\overleftrightarrow{PQ}$ పై B ఉండును.



(బొమ్మ-3.22)

(iii) $\overleftrightarrow{RS}$ పై AB = AD ఉండునట్టు D బిందువును నిర్మించండి (సోపానం వల్ల సమాంతర చతుర్భుజం రోంబస్‌గా మారుతుంది)

(iv) D బిందువు వద్ద $\overline{AB}$ 8 సమాంతరంగా $\overline{DC}$ ని నిర్మించండి. $\overleftrightarrow{PQ}$ పై C ఉండవలెను (సమాంతర చతుర్భుజం నిర్మాణం సోపానం (iii) ను అనుసరించి ABCD రోంబస్ నిర్మాణం అవుతుంది.

ఉదాహరణ-5

వేరు వేరు ఆకృతులు గల మూడు రోంబస్‌లను నిర్మించి బొమ్మ 3.22లో వలే పేర్లు పెట్టండి. కర్ణాలను $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ నిర్మించి వాటి ఖండన బిందువును 'O' అనుకోయండి.

$\angle AOD$ ని కనుగొనండి, $\overline{AO}, \overline{CO}, \overline{BO}, \overline{DO}$ ల పొడవులను కొలిసి పట్టికలో రాయండి.

బొమ్మ నెం.	$m\angle AOD$	AO	CO	BO	DO
1					
2					
3					

పట్టిక : 3.5

పట్టికను బట్టి చూడగా ABCD రోంబస్‌లో $\angle AOD = 90°$

అనగా $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ రెండు కర్ణాలు పరస్పరం లంబాలు .... (1)

తిరిగి AO=CO : BO = DO

అనగా $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ రెండు కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొనును .... (2)

పైన చెప్పిన (1) (2)లను బట్టి కింది సిద్ధాంతం లభిస్తుంది.

సిద్ధాంతం-5 : రోంబస్‌లోని రెండు కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకొనును.

దీర్ఘ చతురస్రంలోని కర్ణాల మధ్య సంబంధం :

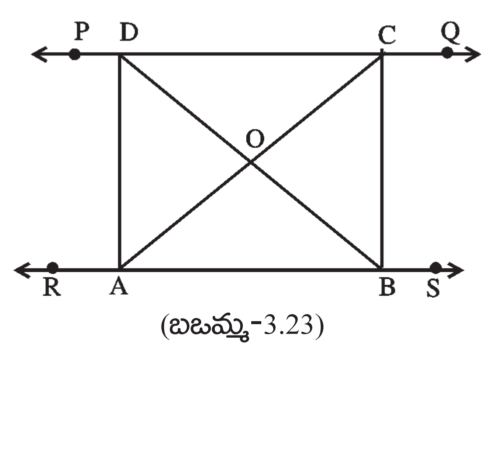
దీర్ఘ చతురస్రంలో ప్రతి కోణం లంబకోణం. దీని కోణాల మధ్య సంబంధాన్ని కింది పరీక్ష ద్వారా తెలుసుకుందాం.

దీర్ఘ $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$ చతురస్ర నిర్మాణ ప్రణాళిక

(i) సమాంతర చతుర్భుజ నిర్మాణంలోని సోపానం (అ) అనుసరించి రేండు రేఖలను నిర్మించండి.

(ii) $\overleftrightarrow{RS}$ పై ఏవైనా రెండు బిందువులు A, B లను గుర్తించండి.

(iii) A, B ల వద్ద $\overleftrightarrow{RS}$ పై లంబాలు నిర్మించండి. $\overleftrightarrow{PQ}$ అవి ను ఖండించిన బిందువులను D,C అనుకోయండి. ABCD దీర్ఘచతురస్రం ఏర్పడుతుంది.



(బబొమ్మ-3.23)

పరీక్ష - 6

పైన తెలిపిన విధంగా మూడు వేరు వేరు ఆకృతులలో దీర్ఘచతురస్రాలను నిర్మించి బొమ్మ 3.23లో వలే పేర్లు పెట్టండి. ప్రతీ బొమ్మలోని కర్ణాలు $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ లను నిర్మించండి. వాటి ఖండన బిందువును 'O' అనుకోయండి.

ఇప్పుడు $\overline{AC}, \overline{BD}, \overline{AO}, \overline{CO}, \overline{BO}, \overline{DO}$ ల పొడవులు తెలుసుకొనా కింది పట్టికలో రాయండి.

బొమ్మ నెం.	AC	BD	AO	CO	BO	DO
1						
2						
3						

పట్టిక : **3.6**

పట్టికను బట్టి చూడగా ABCD దీర్ఘచతురస్రంలో AC=BD .... (1)

తిరిగి AO=CO : BO=DO అవుతుంది

(1) (2) లను బట్టి కింది సిద్ధాంతం లభిస్తుంది.

సిద్ధాంతం-6 : దీర్ఘచతురస్రంలోని కర్ణాల పొడవులు సమానం అవి పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొనును.

ఉదాహరణ-8 : PQRS దీర్ఘచతురస్రంలో రెండు కర్ణాలు పరస్పరం 'O' బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును. OQ = (2X + 4) యూనిట్లు OP = (3x+1) యూనిట్లు అయినచో X విలువను రెండు కర్ణాల పొడవులను కనుగొనండి.

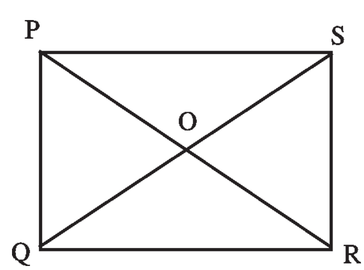
సమాధానం : దీర్ఘచతురస్రంలో కర్ణాల ఖండన బిందువు 'O'

ఇచ్చట $PR = QS \Longrightarrow \frac{1}{2}PR = \frac{1}{2}QS$

$\Longrightarrow PO = QO \quad \Longrightarrow 3x + 1 = 2x + 4$

$\Longrightarrow 3x - 2x = 4 - 1 \quad \Longrightarrow x = 3$ యూనిట్లు

$\therefore$ PO = 3 యూనిట్లు, $\Longrightarrow 2PO = 6 = PR = 6$ యూనిట్లు



(బబమ్మ-3.24)

$\therefore$ PR = QS = 6 యూనిట్లు (దీర్ఘచతురస్రంలోని రెండు కర్ణాల పొడవు సమానం)

(G) సమచతురస్రంలోని కర్ణాల మధ్య సంబంధం :-

సమచతురస్రంలోని భుజాల పొడవులు సమానం ప్రతీ కోణం ఒక లంబకోణం. అనగా ఇది రోంబస్, దీర్ఘచతురస్రములను పోలియున్న ఒక ప్రత్యేక చిత్రం. దీనిలోని రెండు కర్ణాల మధ్య సంబంధం గూర్చి ఇప్పుడు తెలుసుకుందాం.

సమచతురస్ర నిర్మాణం :

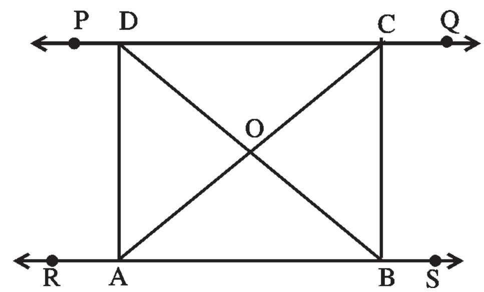
మీరు చేయవలసిన పని

(i) దీర్ఘచతురస్ర నిర్మాణ సోపానం (i) అనుసరించి $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$ ను నిర్మించండి.

(ii) $\overleftrightarrow{RS}$ యొక్క ఏదైనా ఒక బిందువును A గా తీసుకొని, A వద్ద $\overleftrightarrow{RS}$ పై లంబాన్ని గీసి, ఆ లంబం $\overleftrightarrow{PQ}$ నకు D వద్ద ఖండించుకొని గీయండి.

(iii) $\overleftrightarrow{RS}$ పై B బిందువును తీసుకొని, AD=AO ని నిర్మించండి.

(iv) B వద్ద ని నిర్మించండి. అది ను C బిందువు ఖండించును. ఇప్పుడు ABCD సమచతురస్రం ఏర్పడింది.



బొమ్మ (3.25)

పరీక్ష - 7 : ఒక సమచతురస్రంలోని కర్ణాల మధ్య సంబంధం నిరూపణ :-

మునుపటి వలే వేరు వేరు ఆకృతులలో మూడు సమచతురస్రాకారంలను నిర్మించి బొమ్మ 3.25 వలే పేర్లు పెట్టండి. ప్రతీ బొమ్మలో కర్ణములు $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ లను నిర్మించండి వాటి ఖండన బిందువు 'O' అనుకోయండి.

ప్రతి బొమ్మలోని $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AO}$, $\overline{CO}$, $\overline{BO}$, $\overline{DO}$ ల పొడవులను $\angle AOD$ పరిమాణంను కనుగొని కింది పట్టికలో రాయండి. (పట్టిక 3.7)

బొమ్మ నెం.	$m\angle AOD$	AC	BD	AO	CO	BO	DO
1							
2							
3							

పట్టిక - **3.7**

పై పట్టికను బట్టి ABCD సమచతురస్రంలో, $M\angle AOD = 90^\circ$ అనగా కర్ణాలు $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ పరస్పరం లంబాలని AC = BD .... (1)

మరల AO=OC మరియు BO=OD .... (2)

(1) మరియు (2) లను బట్టి కింది సిద్ధాంతం లభిస్తుంది.

సిద్ధాంతం-7 : ఒక సమచుతరస్రంలోని కర్ణాల పొడవులు సమానం. అవి పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకొనును.

సమాంతర చతుర్భుజం, రోంబస్, దీర్ఘచతురస్రం, సమచతురస్రంలోని రెండు కర్ణాల మధ్య గల సంబంధాలను పరిశీలించండి.

(i) సమాంతర చతుర్భుజం, దీర్ఘచతురస్రం, సమచతురస్రంలో రెండు కర్ణాలు సమద్విఖండన చేసుకొనును.

(ii) రోంబస్, సమచతురస్రంలో కర్ణాలు లంబ సమద్విఖండన చేసుకొనును.

(iii) దీర్ఘచతురస్రం, సమచతురస్రంలో కర్ణాలు పొడవుల సమానం.

(iv) సమచతురస్రంలోని రెండు కర్ణాల పొడవులు సమానం. అవి పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొనును.

3.4. వివిధ రకాల చతుర్భుజాల కర్ణాల మధ్య గల సంబంధం యొక్క విశ్లేషణ :

(i) సమాంతర చతుర్భుజంలోని రెండు కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొనును
(సమాన పొడవు కలిగి, పరస్పరం లంబాలు కావు)

(ii) రోంబస్‌లోని కర్ణాలు లంబ సమద్విఖండన చేసుకొనును
(రెండు కర్ణాలు సమాన పొడవు కలిగి యుండవు)

(iii) దీర్ఘచతురస్రంలోని కర్ణాల పొడవులు సమానం, అది సమద్విఖండన చేసుకొనును
(పరస్పరం లంబాలు కాకపోవచ్చును.)

(iv) సమచతురస్రంలోని రెండు కర్ణాల పొడవుల సమానం. అవి పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకొనును. సమచతురస్రంలోని రెండు కర్ణాల మధ్య గల మూడు సంబంధాలలో ఒకటి లేక రెండు సంబంధాలు మిగిలిన వాటిలో కనిపిస్తుండును.

అభ్యాసం - 3(b)

1. ఖాళీలను పూర్తి చేయండి.

(a) __________ లోని కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొనును.

(b) __________ లోని కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకొనును.

(c) __________ లోని కర్ణాలు పరస్పరం సమానం, లంబ సమద్విఖండన చేయును.

(d) __________ లోని కర్ణాలు రెండు పరస్పరం సమానం సమద్విఖండన చేయును.

(e) __________ లోని కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేయును కాని కర్ణాలు పరస్పరం సమానం కావు.

2. కింది వానిలో ఏవి సమాంతర చతుర్భుజానికి వర్తిస్తాయో వాటి ప్రక్కన (T) ని వర్తించని వాటి ప్రక్కన (F) ని రాయండి.

(a) అభిముఖ కోణాల పరిమాణం ఎల్లప్పుడు సమానం ( )

(a) ఎదురెదురు భుజాల పొడవు సమానం ( )

(c) రెండు కర్ణాల ఖండన బిందువు గూర్చి నిర్ధిష్ట సూచన ఉండదు. ( )

(d) రెండు వరుస కోణాలు పరస్పరం పరిపూరకాలు ( )

(e) రెండు వరుస కోణాల పరిమాణం పరస్పరం సమానం ( )

(f) ప్రతీ కోణం ఒక లంబకోణం ( )

(g) ఒక కర్ణం ద్వారా ఏర్పడిన రెండు త్రిభుజాలలో ఒక దాని భుజం పొడవులు క్రమంగా రెండవ దాని భుజాల పొడవులతో సమానం ( )

3. కింది వానిలో సరైన వాటి ప్రక్కన (T) ని తప్పైన వాటి ప్రక్కన (F) ని రాయండి.

(a) ప్రతీ చతుర్భుజంలోని ఎదురెదురు కోణాలు పరిమాణం సమానం ( )

(b) సమాంతర చతుర్భుజంలోని రెండు కోణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేయును ( )

(c) లంబకోణం లేని రోంబస్‌లో కర్ణాల పొడవులు సమానం కాదు ( )

(d) సన్నిహిత భుజాలు సమానం కాని దీర్ఘచతురస్రంలోని కర్ణాల పొడవులు సమానం ( )

(e) సమచతురస్రంలోని కర్ణాలు పరస్పరం సమాన, పరస్పర లంబాలు ( )

(f) కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకోలేని చతుర్భుజం లేదు. ( )

4. ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో $m\angle A = 70^\circ$ అయినచో $\angle B, \angle C, \angle D$ ల పరిమాణం కనుగొనండి.

5. ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలోని రెండు వరుస కోణాల పరిమాణం 2 : 3 అయినచో ఒక్కొక్క కోణ పరిమాణం ఎంత ?

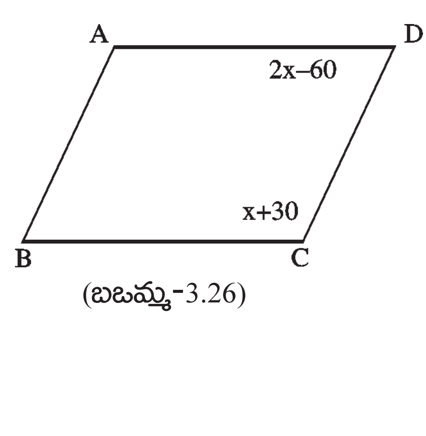
6. ఒక చతుర్భుజంలోని కోణాల పరిమాణం 1 : 3 : 7 : 9 అయినచో ఒక్కొక్క కోణ పరిమాణం ఎంత ?

7. ఒక చతుర్భుజంలోని కోణల పరిమాణం సమానం. కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చెసుకొనెను. అయిన అది ఏ విధమైన చతుర్భుజమగును ?

8. ఒక రోంబస్‌లోని ఒక కోణ పరిమాణం 60^0 అయినచో దానిలోని చిన్న కర్ణం ఒక భుజం పొడవుతో సమానం అని రుజువు చేయండి.

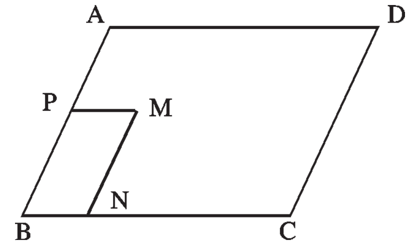
9. ఒక చతుర్భుజంలోని రెండు వరుస కోణములు పరిమాణం క్రమంగా 60^0, 80^0 మిగిలిన కోణం పరిమాణం సమానం అయినచో వాటి పరిమాణం కనుగొనండి.

10. ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో $\angle C, \angle D$ కోణాల పరిమాణం (డిగ్రీలలో) ఇవ్వడమయ్యింది. ఆ కొలతలతో ప్రతీ కోణ పరిమాణం కనుగొనండి.



(బొమ్మ-3.26)

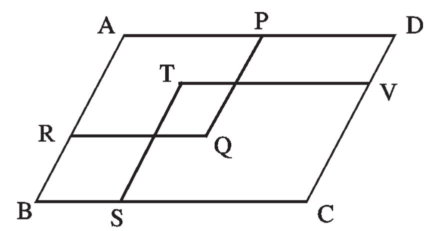
11. ఇచ్చిన బొమ్మ 3.27లో ABCD, PONM లు రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు $m\angle D = 70^\circ$ అయినచో $m\angle M$, $m\angle MNB$ లను కనుగొనండి.



(బొమ్మ-3.27)

12. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలోని రెండు వరుస కోణాలలో ఒకదాని పరిమాణం మరొక దాని పరిమాణంనకు మూడు రెట్లు అయినచో, దాని కోణాల పరిమాణం కనుగొనండి.

13. బొమ్మ 3.28లో ABCD, APQR, TSCV లు ఒక్కొక్క సమాంతర చతుర్భుజం

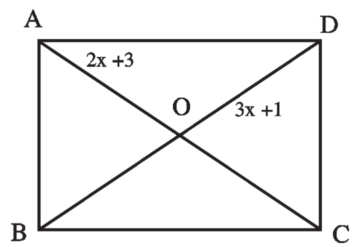


(బొమ్మ-3.28)

(i) APQR లో ఏఏ కోణాల పరిమాణం $m\angle C$ తో సమానం ?

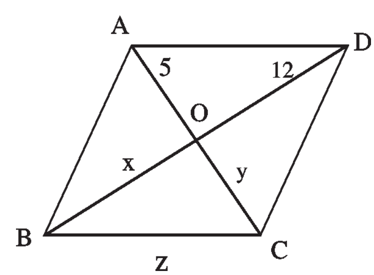
(ii) TSCVలో ఏఏ కోణాల పరిమాణం $m\angle A$ తో సమానం ?

(iii) $m\angle T = 110^\circ$ అయినచో ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలోని కోణాల పరిమాణం కనుగొనండి.



(బొమ్మ-3.29)

14. ABCD దీర్ఘచతురస్రంలోని రెండు కర్ణాలు పరస్పరం 'O' బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును. AO=(2x+3) యూనిట్లు, OD=(2x+1) యూనిట్లు అయినచో x విలువను, రెడు కర్ణాల పొడవులను కనుగొనండి.



(బొమ్మ-3.30)

15. ప్రక్కన గల ABCD రోంబస్‌లో x,y,z ల విలువలను కనుగొనండి.

16. (a) సెట్‌స్కేయర్, స్కేల్, ప్రొటాక్టర్‌లను వినియోగించుకొని కోణంను నిర్మించండి. దానిలోని ఒక కోణం పరిమాణం 60^0, భుజం పొడవు 4 సెం.మీ.

(b) సెట్‌స్కేయర్, స్కేల్, ప్రొటాక్టర్‌లను వినియోగించుకొని ఒక సమాంతర చతుర్భుజంను నిర్మించండి. దాని ఒక కోణం పరిమాణం 70^0, రెండు సన్నిహిత భుజాల పొడవులు 6.3 సెం.మీ; 4.5 సెం.మీ.

(c) సెట్‌స్కేయర్, స్కేలు, ప్రొటాక్టర్‌లను వినియోగించుకొని ఒక సమచతురస్రాన్ని నిర్మించండి. దాని భుజం పొడవు 3.2 సెం.మీ. ఉండవలెను.

నిర్మాణం
(CONSTRUCTION)

4వ అధ్యాయం

4.1. కొన్ని మౌళిక నిర్మాణాలు

రేఖా గణితంలో స్కేలు ప్రొటాక్టర్ (కోణమానిని)లను వినియోగించుకొని రూలర్ స్వీకృత సిద్ధాంతం, ప్రొటాక్టర్ స్వీకృతి సిద్ధాంతంలు చేయబడినది. ఈ రెండు స్వీకృత సిద్ధాంతాలు రేఖా గణితంలో సంఖ్య తత్త్వాని వినియోగించుకొని సమేతుకంగా ప్రతిపాదనలు చేయబడినవి. యూక్లిడ్ సంఖ్యా తత్వం ఆవిష్కర్త అయినప్పటికి రేఖా గణితంలో రూలర్ లేక ప్రొటాక్టర్ స్వీకృత సిద్ధాంతం వంటి సంఖ్యలను సంబంధించిన స్వీకృత సిద్ధాంతాలను గ్రహించలేదు. రేఖా గణితంలో నిర్మాణం కొరకు యూక్లిడ్ ప్రవేశపెట్టిన రెండే రెండు పరకరాలు రూలర్, వృత్తలేఖిని (అన్నని అంచును రూలర్ అందురు. అనగా స్కేల్ అన్నిని అందురు). అందుచేత కేవలం రూలర్ వృత్తలేఖిని వినియోగించుకొని చేయు నిర్మాణంలను యూక్లిడీయ నిర్మాణం అందురు.

యూక్లీడ్ పద్ధతిని అనుసరించి కేవలం రూలర్ వృత్తలేఖిని సహాయంతో కొన్ని నిర్మాణాలు చేయుట, కేవలం కొలతలను స్కేలును వినియోగించుట, ప్రొటాక్టర్ వాడుట చేయుదాం.

1. రూలర్ సహాయంతో నిర్మాణం :

   క) ఇచ్చిన బిందువుల మధ్య ఒక సరళరేఖ నిర్మించుట

   ఖ) ఇచ్చిన బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండాల నిర్మించుట

   గ) ఇచ్చిన రేఖ ఖండాన్ని సమద్విఖండన చేయుట

   ఘ) ఇచ్చిన కోణంనకు సమద్విఖండ చేయుట

   ఙ) ఒక కోణ పరిమాణంతో సమానమైన పరిమాణంలో మరొక కోణం నిర్మించుట

   చ) ఇచ్చిన ఒక రేఖకు సమాంతరంగా ఒక బాహ్యబిందువు మీదగా ఒక రేఖను నిర్మించుట

   ఛ) ఇచ్చిన సరళరేఖ యొక్క ఒక బాహ్య బిందువు నుండి ఆ సరళరేఖపై లంబం నిర్మించుట.

వివిధ ఆధారాలతో త్రిభుజం, చతుర్భుజాలు నిర్మించుట ఈ ఆధ్యాయంలోని ముఖ్య విషయాలు. క్రిందితరగతులలో కూడామీరు వివిధ రకాల త్రిభుజాలు, చతుర్భుజాలు నిర్మాణాన్ని గూర్చి తెలుసుకున్నారు.

4.2 త్రిభుజ నిర్మాణం :

ఒక త్రిభుజంలో మూడు కోణాలు, మూడు భుజాలు ఉంటాయి. కాని త్రిభుజ నిర్మాణానికి వీటన్నింటి కొలతలు కవసరం లేదు. ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాల పొడవులు తెలిసే త్రిభుజాన్ని నిర్మించవచ్చు. త్రిభుజంలో రెండు కోణాలు ఒక భుజం తెలిసినచో త్రిభుజాన్ని నిర్మంచవచ్చు. మొత్తంపై త్రిభుజ నిర్మాణం కొరకు మూడు స్వతంత్ర కొలతలు ఉంటే చాలు. ఉదాహరణకు త్రిభుజంలోని మూడు కోణాలు పరస్పరం స్వతంత్ర కొలతలు కావు ఎందుకంటె రెండు కోణాల పరిమాణం తెలిసినచో మూడవ దాన్ని పరిమాణం తెలిసిపోతుంది. ఎందుకంటె త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం పరిమాణం 180^0 కాని మూడు భుజాల కొలతలు పరస్పరం స్వతంత్రమైనవి. కాబట్టి మూడు భుజాల పొడవులు తెలిసినచో త్రిభుజం నిర్మాణం సాధ్యమగును. కాని మూడు కోణాల పరిమాణంలో ఒకటి కంటె అధిక కోణాల నిర్మాణం సాధ్యమగును. ఏఏ కొలతలు తెలిసినచో త్రిభుజం నిర్మించగలమో తెలుసుకుందాం.

(i) త్రిభుజంలో మూడు భుజాల కొలతలు ఇచ్చినచో (ఏవైన రెండు భుజాల మొత్తం పొడవు మూడవ దాని కంటె ఎక్కువ)

(ii) రెండు భుజాలు, వాటి అంతర్గత కోణ పరిమాణం తెలిసినప్పుడు

(iii) ఒక భుజం మొడవు, దాని రెండు సంలగ్న కోణాల పరిమాణం

(iv) లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం, ఒక భుజం పొడవు

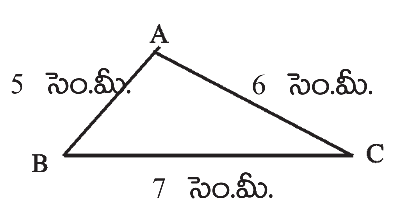
ఇవి కాకుండా మరి కొన్ని ఇతర కొలతల వల్ల కూడా త్రిభుజ నిర్మాణం సాధ్యమగును.

సూచన : త్రిభుజాన్ని నిర్మించుటకు ముందు ఒక రఫ్ బొమ్మ నిర్మించి పేరు పెట్టవలెను ఇచ్చిన కొలతలను వాటికి సంబంధం ఉన్న చోట చూపించవలెను. దీన్ని విశ్లేషణ చిత్రం అని కూడా అందురు. దీని వల్ల ఏ భాగాన్ని ముందుగా నిర్మించవలెనో తెలుసుకోగలుగుతారు. రఫ్ బొమ్మ మన సదుపాయం కొరకు గీసుకోవలెను. నిర్మాణంలో ఇది తప్పకుండా ఉండాలనే బొమ్మ నిబంధన లేదు. కాని దాని సహాయంతో నిర్మాణం సులభంగా తప్పులేకూండా ఉండగలదు.

గుర్తుంచుకోయండి : ΔABC లో $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ఎదురు భుజాల పొడవులను వరుసగా a,b,c సంకేతాలతో తెలియజేయవచ్చు.

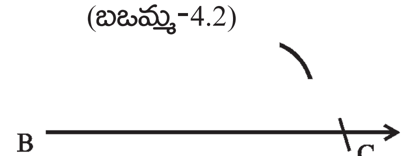
త్రిభుజ నిర్మాణం-1 : మూడు భుజాల పొడవులు ఇచ్చినచో త్రిభుజం నిర్మించుట

ఉదాహరణ-1 : ΔABC నిర్మంచండి a = 7 సెం.మీ., b = 6 సెం.మీ., c = 6 సెం.మీ.



(బొమ్మ-4.1)

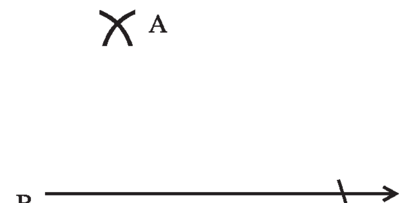
(బొమ్మ-4.2)



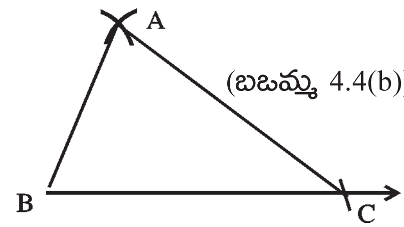
(బొమ్మ-4.3)

(iii) Cని కేంద్రంగా తీసుకొని 6 సెం.మీ. వ్యాసార్థం తీసుకొని, B ని కేంద్రముగా తీసుకొని ముందు గీసిన చాపాన్ని ఖండించునట్లు మరొక చాపం గీయండి. ఆ రెండింటి ఖండన బిందువులు A అనుకోయండి.

(iv) $\overline{AB}, \overline{AC}$, లను నిర్మించండి. ఇప్పుడు కావలసిన ΔABC ఏర్పడింది.



(బొమ్మ 4.4(a)



(బొమ్మ 4.4(b))

వ్యాఖ్య : B,C బిందువులను కేంద్రంగా తీసుకొని నిర్మించిన రెండు చాపాలు $\overline{BC}$ కి రెండు ప్రక్కలందు ఖండించుకొనును. దీని వల్ల A బిందువునకు రెండు స్థావరాలు ఏర్పడును. కాని A ఒక్క ఏదో ఒక స్థావరాన్ని తీసుకొని ΔABC ని నిర్మించవలెను.

స్వయంగా చేయండి

దిగువున ప్రతీ ప్రశ్నలో మూడేసి కొలతలు ఇవ్వడమయ్యింది. వాటిలో ఏ మూడు భుజాల కొలత సహాయంతో త్రిభుజ నిర్మాణం సాధ్యం కాదో ఎంచి రాయండి.

(i) 7 సెం.మీ., 5 సెం.మీ., 6.3 సెం.మీ.

(ii) 7 సెం.మీ., 4.5 సెం.మీ., 12 సెం.మీ.

(iii) 6.2 సెణ్ణమీ., 9.5 సెం.మీ., 9.5 సెం.మీ.

షరతు : త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవు మూడవ భుజం పొడవు కంటె ఎక్కువ.

అభ్యాసం-4 (క)

(అన్ని నిర్మాణాలకు కేవలం స్కేలు, వృత్తలేఖిని వాడండి)

1. త్రిభుజంలో a = 7 సెం.మీ., b = 3.5 సెం.మీ., c = 5 సెం.మీ, ABC త్రిభుజం నిర్మించి దాన్ని శీర్షబిందువు A నుండి ఎదురుగా $\overline{BC}$ ఉన్న భుజంపై లంబం నిర్మించి, దాని పొడవు కొలవండి.

2. ΔABC లో AB=AC=BC=6.1 సెం.మీ. త్రిభుజం నిర్మించి, దాని కోణాల పరిమాణం కనుగొనండి.

3. ΔABC లో BC = 5 సెం.మీ., AB=AC = 6.3 సెం.మీ. త్రిభుజం నిర్మించి $\overline{BC}$ సంలగ్న కోణాలు రెండింటి పరిమాణం ప్రొటాక్టర్ సహాయంతో తెలుసుకొని రాయండి.

4. ΔLMN లో LM = 5 సెం.మీ., LN = 4.7 సెం.మీ., MN = 6.1 సెం.మీ. అయిన త్రిభుజం నిర్మించండి. దాని కోణాల పొడవులను కొలవండి. ఇందులో ఏ కోణం పెద్దది ?

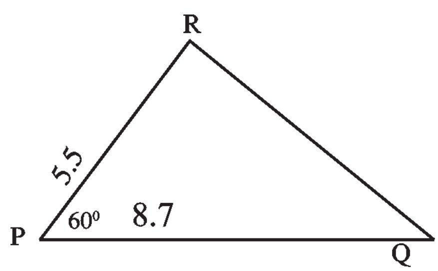
5. ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి. అందులోని మూడు భుజాల పొడవులు వరుసగా 5.8 సెం.మీ., 4.7 సెం.మమీ., 3.9 సెం.మీ. త్రిభుజం నిర్మించి 5.8 సెం.మీ., 4.7 సెం.మీ. భుజాల అంతర్గతకోణంను సమద్విఖండన చేయండి.

6. a = 6 సెం.మీ., b = 7 సెం.మీ., c = 8 సెం.మీ.లనుయిన తీసుకొని Δ ABC ని నిర్మించండి. త్రిభుజం భుజాల లంబ సమద్విఖండన రేఖను నిర్మించండి.

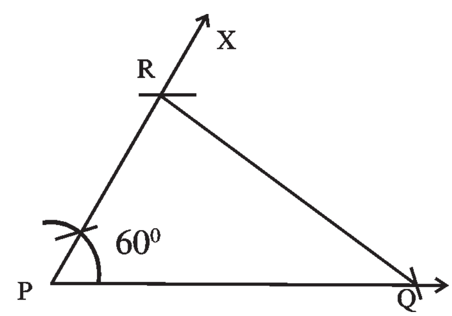
నిర్మాణంలో తప్పులు లేనిచో సమద్విఖండన లంబాలు ఒక బిందువు వద్ద పరస్పరం ఖండించుకొనును.

త్రిభుజ నిర్మాణం-2 : రెండు భుజాల పొడవు, వాటి అంతర్గత కోణ పరిమాణం తెలిసినచో త్రిభుజం నిర్మించుట (భు-కో-భు)

ఉదాహరణ-2 : Δ PQR లో PQ = 3.7 సెం.మీ., PR = 5.5 సెం.మీ. అయినచో త్రిభుజం నిర్మించండి.



(బొమ్మ-4.5)



(బొమ్మ-4.6)

(i) 3.7 సెం.మీ., పొడవు గల $\overline{PQ}$ ను నిర్మించండి.

(ii) $m\angle XPQ = 60°$ ఉండునట్లు $\overrightarrow{PX}$ ను నిర్మించండి.

(iii) 5.5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంలో P ని కేంద్రంగా తీసుకొని $\overrightarrow{PX}$ ను ఖండించునట్లు చాపం గీయండి. ఖండన బిందువును R అనుకోయండి. $\overline{RQ}$ ను నిర్మించండి. కావలసిన Δ PQR ఏర్పడుతుంది.

అభ్యాసం-4 (b)

1. a = 5.6 సెం.మీ., $m\angle B = 60°$, c = 6.3 సెం.మీ అయిన Δ ABC నిర్మించి $\angle C$ యొక్క సమద్విఖండన రశ్మి నిర్మించండి.

2. Δ ABC లో AB = AC = 5.7 సెం.మీ. $m\angle A = 120°$ త్రిభుజం నిర్మించి $\angle B$, $\angle C$ పరిమాణంలను కొలవండి. వాటి మధ్య ఏ సంబంధం గలదు ?

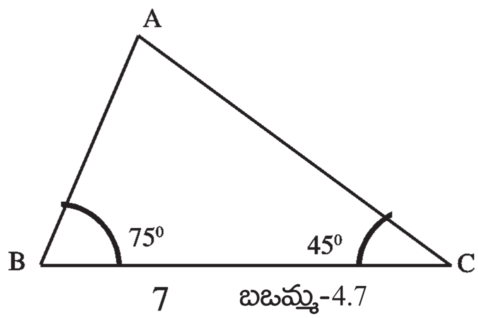
3. Δ PQR లో PQ = 7 సెం.మీ., PR = 5.6 సెం. మీ. $m\angle P = 45°$ త్రిభుజం నిర్మించి R బిందువు నుండి $\overline{PQ}$ పై లంబం నిర్మించండి.

4. Δ ABC లో $m\angle B = 75°$, AB = 3 సెం.మీ., BC = 4 సెం.మీ. అయిన త్రిభుజం నిర్మించండి.

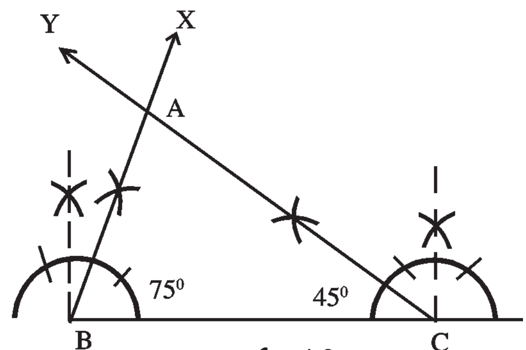
త్రిభుజ నిర్మాణం-3

ఒక భుజం మొడవు, ఆ భుజం యొక్క సంలగ్న కోణాల రెండింటి పరిమాణం ఇచ్చినచో త్రిభుజం నిర్మించుట (కో-భు-కో)

Δ ABC లో BC = 7 సెం.మీ. $m\angle B = 75°$, $m\angle C = 45°$ అయిన త్రిభుజం నిర్మించండి.



బొమ్మ-4.7



బొమ్మ-4.8

నిర్మాణ ప్రణాళిక :-

(i) 7 సెం.మీ. పొడవు గల $\overline{BC}$ ని నిర్మించండి.

(ii) $m\angle CBX = 75°$ ఉండే విధంగా $\overrightarrow{BX}$ ను నిర్మించండి.

(iii) $m\angle BCY = 45°$ ఉన్నట్లు $\overrightarrow{CY}$ ని నిర్మించండి.

(iv) $\overrightarrow{BX}$, $\overrightarrow{CY}$ ల ఖండన బిందువును A అనుకోయండి ఇప్పుడు Δ ABC ఏర్పడుతుంది.

సూచన : ΔABC లో $\overline{BC}$ భుజం పొడవు, $\angle B$, $\angle A$ పరిమాణం ఇచ్చినచో $m\angle C = 180° - (m\angle A + m\angle B)$ ని కనుగొనవలెను. దీని వల్ల త్రిభుజంలో ఒక భుజం పొడవు మూడు కోణాల పరిమాణంలో ఏవైనా రెండు కోణాల పరిమాణంలో త్రిభుజ నిర్మాణం అగును.

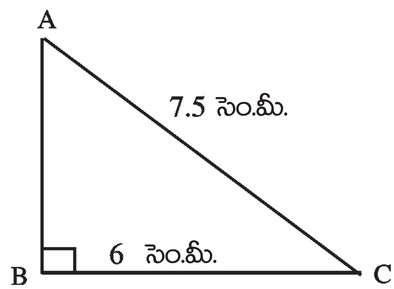
అభ్యాసం - 4 (c)

1. Δ ABC లో a = 7.5 సెం.మీ., $m\angle B = 75°$, $m\angle C = 30°$ త్రిభుజం నిర్మించండి.
2. Δ ABC లో $m\angle A = 60°$, $m\angle B = 75°$, c = 5.9 సెం.మీ. అయిన త్రిభుజం నిర్మించండి.
3. Δ ABC లో BC = 6.5 సెం.మీ. $\overline{BC}$ పై ప్రతీ సంలగ్న కోణ పరిమాణం = 75^0 త్రిభుజాన్ని నిర్మించి $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ పొడవులను కనుగొనండి.
4. Δ PQR లో PQ = 5.7 సెం.మీ. $m\angle P = 60°$, $m\angle Q = 45°$ త్రిభుజం నిర్మించండి.
5. b = 7 సెం.మీ. $m\angle A = 60°$, $m\angle B = 75°$ అయినచో ΔABC ని నిర్మించండి.

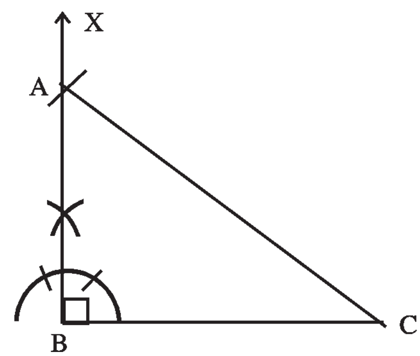
త్రిభుజ నిర్మాణం-4 :

కర్ణం, ఒక భుజముల పొడవులు ఉన్నచో లంబకోణ త్రిభుజం నిర్మించుట. (లంబకోణం-కర్ణం-భుజం)

ఉదాహరణ-4 : Δ ABC లంబకోణత్రిభుజంలో కర్ణం పొడవు 7.5 సెం.మీ., BC = 6 సెం.మీ. అయిన త్రిభుజంను నిర్మించండి.



(బొమ్మ-4.9)



(బొమ్మ-4.10)

నిర్మాణ ప్రణాళిక :-

(i) 6 సెం.మీ. పొడవు గల $\overline{BC}$ ని నిర్మించండి.

(ii) $m\angle XBC = 90°$ ఉండునట్లు ను $\overline{BX}$ నిర్మించండి.

(iii) C ని కేంద్రంగా తీసుకొని 7.5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో $\overline{BX}$ ను ఖండించునట్లు ఒక చాపం గీయండి. ఆ ఖండన బిందువు A అనుకోయండి.

(iv) $\overline{AC}$ ని కలపండి. ఇప్పుడు ΔABC ఏర్పడుతుంది.

అభ్యాసం-4 (ఘ)

1. ABC లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం $\overline{AC}$ పొడవు 5 సెం.మీ., BC = 3 సెం.మీ. త్రిభుజం నిర్మించి $\overline{AB}$ ని కొలవండి.

2. ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం పొడవు 8 సెం.మీ. ఒక భుజం పొడవు 5.1 సెం.మీ. అయిన త్రిభుజంను నిర్మించండి.

3. ΔABC లో AB = BC = 5.6 సెం.మీ., B బిందువు నుండి $\overline{AC}$ పై గీసిన లంబం D. BD = 4 సెం.మీ. అయిన త్రిభుజం నిర్మించండి.

   సూచన : Δ ABD లో $\angle$D లంబకోణ. దీని కర్ణం $\overline{AB}$ ఇవ్వబడింది. త్రిభుజ నిర్మాణం-4వ ప్రణాళికలోని విధంగా మొదట ΔABD ని నిర్మించండి. ΔABD ఆ $\overline{AD}$ తరువాత పై C బిందువును గుర్తించి ΔABD ని నిర్మించండి.

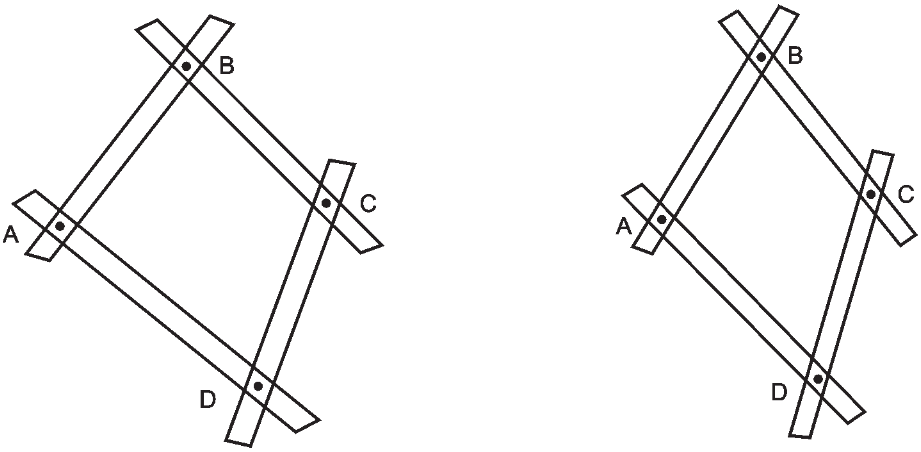
4. ΔABC లో AC = 5 సెం.మీ., $\overline{AB}$ పై $\overline{CD}$ లంబం. CD = 4 సెం.మీ. BC =6 సెం.మీ. అయిన త్రిభుజం నిర్మించండి.

4.3. చతుర్భుజ నిర్మాణం :-

మనం త్రిభుజం యొక్క ఏవైన మూడు కొలతలను తీసుకొని త్రిభుజం నిర్మించుట గూర్చి తెలుసుకున్నాం. అవి క) త్రిభుజంలోని భుజాలు ఖ) రెండు భుజాలు, వాటి అంతర కోణం గ) ఒక భుజం, రెండు కోణాలు ఘ) లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం, ఒక భుజం మొదలైనవి.

ఇప్పుడు నాలుగు కొలతలు తీసుకొని ఒక చతుర్భుజం నిర్మించుట అన్ని చోట్ల సాధ్యమౌతుందా ? అన్న ప్రశ్న వస్తుంది. త్రిభుజంలోని మూడు భుజాల పొడవుల వలే చతుర్భుజంలో నాలుగు భుజాల పొడవులు ఒక స్వతంత్రమైన కొలత. త్రిభుజంలోని మూడు భుజాల కొలతలు తెలిసినచో మనం సులభంగా చతుర్భుజన్ని నిర్మించగలుగుతాం. అదేవిధంగా చతుర్భుజంలో నాలుగు భుజాల కొలతలు తెలిస్తే చతుర్భుజాన్ని నిర్మించగలమా ?

మీరు చేయవలసిన పని



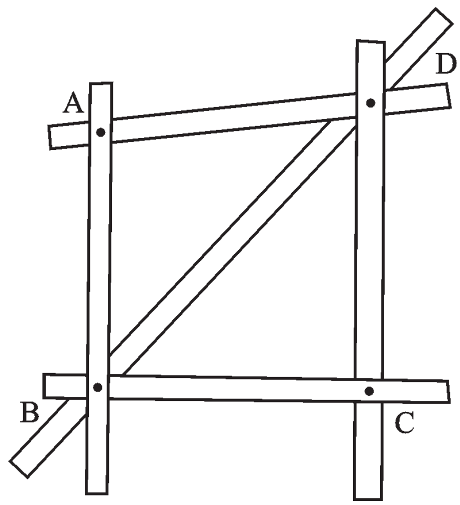
(బొమ్మ - 4.11)

(i) నాలుగు వెదురు బద్దలను (లేక కాగితపు రిబ్బను ముక్కలు తీసుకోయండి. ప్రతి బద్ద రెండు చివర లందు రెండు రంధ్రాలు చేయండి. బద్దల చివరలను జతగా బొమ్మ (క)లో చూపిన విధంగా స్క్రూతో బిగించండి. ఈ చతుర్భుజంలోని నాలుగు భుజాల పొడవులు ఇవ్వబడినవి.

(ii) ఇప్పుడు చతుర్భుజంలోని రెండు ఎదురెదురు శీర్షాలను (A, C) నొక్కండి. దీనివల్ల చతుర్భుజం ఆకారం మారిపోతుంది. కాని దాని నాలుగు భుజాల పొడవులలో మార్పు లేదు. బొమ్మ 4.11 (ఖ)ను చూపండి. ఈ విధంగా నొక్కుట ద్వారా ఒకటి కంటె అధిక ఆకారాలను పొందగలుగుతాం.

(iii) ఈ ప్రయోగం వల్ల ఏం నేర్చుకున్నారు ?

(దీన్ని బట్టి చూడగా నాలుగు కొలతలలో ఒక నిర్ధిష్టమైన చతుర్భుజ నిర్మాణం అసాధ్యమని తెలుస్తున్నది)



(బొమ్మ - 4.11- (గ))

(iv) ఇప్పుడు మరొక బద్దను తీసుకొని ఇంతకు ముందు తయారు చేసిన చతుర్భుజం యొక్క రెండు వ్యతిరేక శీర్షబిందువులు B,D లతో జత చేయండి $\overline{BD}$ చతుర్భుజం యొక్క ఒక కర్ణం అవుతుంది. (బొమ్మ - 4.11- (గ))

(v) ఇప్పుడు చతుర్భుజంను చుట్టూ నొక్కండి. దాని ఆకారంలో ఎటువంటి మార్పు రాదు.

(vi) దీన్ని బట్టి ఏం తెలుసుకున్నారు ?

(దీన్ని బట్టి చూడగా ఐదు కొలతలతో ఒక నిర్ధిష్టమైన చతుర్భుజం నిర్మించవచ్చునని తెలియుచున్నది.)

చతుర్భుజ నిర్మాణానికి సంబంధించిన విశ్లేషణ :-

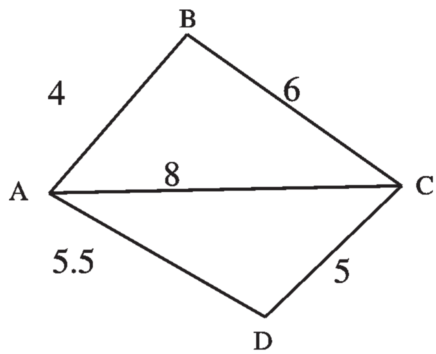
ఇచ్చిన కొలతతో చతుర్భుజాన్ని నిర్మించుటకు ముందు చతుర్భుజం యొక్క రఫ్ బొమ్మ లేక విశ్లేషణ చిత్రం నిర్మించుకోవలెను. అందులో కొలతలను గుర్తించవలెను. ఈ రఫ్ బొమ్మను చూసి చతుర్భుజ నిర్మాణానికి ఏ భాగం మొదట ఉపయోగించవలెనని తెలుసుకోవలెను. దీని వల్ల నిర్మాణం సులభమగును.

చతుర్భుజ నిర్మాణం-1 : నాలుగు భుజాలు, ఒక కర్ణం ఇచ్చినచో చతుర్భుజం నిర్మించుట :-

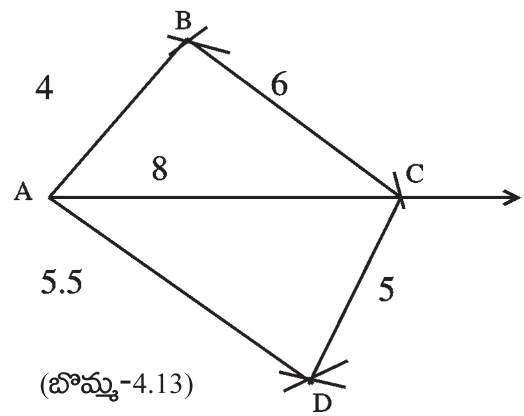
ఉదాహరణ-5 :

ABCD చతుర్భుజంలో AB=4 సెం.మీ., BC=6 సెం.మీ., CD=5 సెం.మీ. AD=5.5 సెం.మీ, కర్ణం AC = 8 సెం.మీ. అయిన ABCD చతుర్భుజంను నిర్మించండి.

విశ్లేషణ : ABCD చతుర్భుజం రఫ్ బొమ్మ గీయండి. అందులో $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{AD}$, $\overline{AC}$ కొలతలను సూచించండి. Δ ABC, ΔACD లలో ఒక్కొక్క దానికి ముందు కొలతలు ఇచ్చియుండుట వల్ల మనం కర్ణం కి రెండు ప్రక్కలందు ABC, ACD త్రిభుజాలను నిర్మించగలుగుతాం. దీని వల్ల ABCD చతుర్భుజం ఏర్పడుతుంది.



(బొమ్మ-4.12)



(బొమ్మ-4.13)

నిర్మాణ ప్రణాళిక :

(i) 8 సెం.మీ. పొడవు గల $\overline{AC}$ ని నిర్మించండి.

(ii) A ని కేంద్రంగా తీసుకొని 4 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో ఒక చాపం నిర్మించండి.

(iii) C ని కేంద్రంగా తీసుకొని 6 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో మొదటి చాపంను ఖండించునట్లు మరొక చాపాన్ని నిర్మించండి. ఆ రెండు చాపాల ఖండన $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ బిందువును B అనుకోయండి.

(iv) తిరిగి A ని కేంద్రంగా తీసుకొని 5.5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో $\overline{AC}$ కి B బిందువు ఉన్న భాగానికి వ్యతిరేక భాగంలో ఒక చాపం నిర్మించండి.

(v) C ని కేంద్రంగా తీసుకొని 5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో (ఘ)లో నిర్మించిన చాపాన్ని ఖండించునట్లు మరొక చాపం నిర్మించండి. ఆ రెండు చాపాల ఖండన బిందువులను D అనుకోయండి.

(vi) $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ లను కలపండి.

ఇప్పుడు కోరిన ABCD చతుర్భుజం ఏర్పడుతుంది.

సూచన : రఫ్ బొమ్మను బట్టి AB+BC>AC (కారణం 4 సెం.మీ.+6 సెం.మీ.+8 సెం.మీ.) AD+DC>AC (కారణం 5.5 సెం.మీ.+5 సెం.మీ.+8 సెం.మీ.) అని తెలుస్తున్నది. అందుచేత చతుర్భుజ నిర్మాణం సాధ్యమయ్యింది.

అభ్యాసం - 4(e)

1. ABCD చతుర్భుజంలో AB=4 సెం.మీ, BC=3 సెం.మీ., AD = 2.5 సెం.మీ., CD =3 సెం.మీ., BD =4 సెం.మీ. అయిన చతుర్భుజం నిర్మించండి.

2. ABCD చతుర్భుజంలో AB=BC=5.5 సెం.మీ., CD =4 సెం.మీ., AD=6.3 సెం.మీ., AC =9.4 సెం.మీ. చతుర్భుజంను నిర్మించి పొడవును కనుగొనండి.

3. ఒక రోంబస్‌లో ఒక భుజం పొడవు 4.5 సెం.మీ., ఒక కర్ణం పొడవు 6 సెం.మీ. అయిన రోంబస్‌ను నిర్మించి రెండవ కర్ణం పొడవు కనుగొనండి.

4. ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో AB = 3 సెం.మీ., BC = 4.2 సెం.మీ. కర్ణం $\overline{AC}$ =6 6 సెం.మీ. అయిన చతుర్భుజంను నిర్మించండి.

స్వయంగా చేయండి

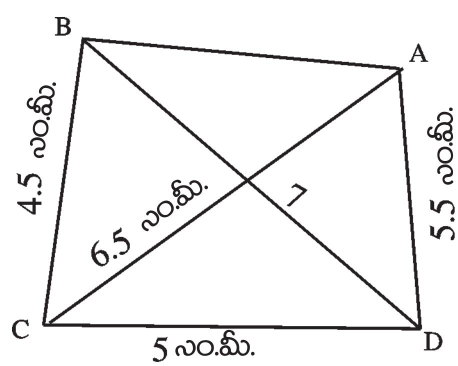
ABCD చతుర్భుజంలో AB =3 సెం.మీ., BC =4 సెం.మీ., CD =5.5 సెం.మీ., DA =6 సెం.మీ., BD =9 సెం.మీ. అయినచో చతుర్భుజంను నిర్మించండి. నిర్మాణం చేయలేనిచో కారణాలు రాయండి.

చతుర్భుజ నిర్మాణం-2 :

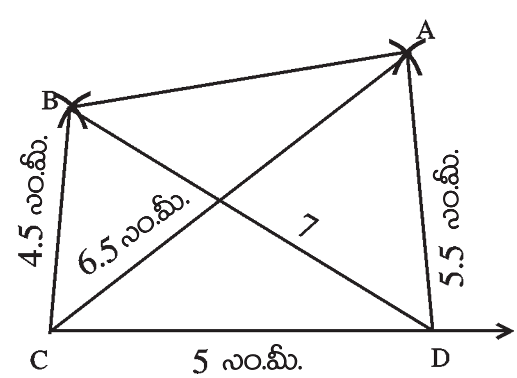
మూడు భుజాల పొడవు, రెండు కర్ణాల పొడవు తెలిసినచో చతుర్భుజం నిర్మించుట :-

ఉదాహరణ-6

ABCD చతుర్భుజంలో BC =4.5 సెం.మీ., CD =5 సెం.మీ., DA =5.5 సెం.మీ., AC =6.5 సెం.మీ., BD =7 సెం.మీ. అయిన చతుర్భుజంను నిర్మించండి.



(బొమ్మ-4.14)



(బొమ్మ-4.15)

రఫ్ బొమ్మను బట్టి చూడగా చతుర్భుజంలో లు రెండింటిలో మూడు భుజాల పొడవులు తెలుసు. అందుచేత రెండు త్రిభుజాల నిర్మాణం ద్వారా చతుర్భుజ నిర్మాణం సాధ్యమౌతుంది.

నిర్మాణ ప్రణాళిక :-

(i) 5 సెం.మీ. పొడవు గల $\overline{CD}$ నిర్మించండి

(ii) C ని కేంద్రంగా తీసుకొని 4.5 సెం.మీ. వ్యాసార్థంతో $\overline{CD}$ కి ఒక ప్రక్కన ఒక చాపం నిర్మించండి.

(iii) D ని కేంద్రంగా తీసుకొని 7 సెం.మీ. వ్యాసార్థంతో మొదటి చాపాన్ని ఖండించునట్లు మరొక చాపం నిర్మించండి. ఆ రెండు చాపాల ఖండన బిందువును B అనుకోయండి.

(iv) తిరిగి C ని కేంద్రంగా తీసుకొని 6.5 సెం.మీ., వ్యాసార్థంతో $\overline{CD}$ కి రెండవ ప్రక్కన మరొక చాపం నిర్మించండి.

(v) D ని కేంద్రంగా తీసుకొని 5.5 సెం.మీ. వ్యాసార్థంతో (ఘ)లో నిర్మించిన చాపాన్ని ఖండించునట్లు మరొక చాపాన్ని నిర్మించండి. ఆ రెండు చాపాల ఖండన బిందువును A అనుకోయండి.

(vi) లను కలపండి. ఇప్పుడు కోరిన ABCD చతుర్భుజం ఏర్పడింది

అభ్యాసం - 4(f)

1. ABCD చతుర్భుజంలో AB =7.0 సెం.మీ., BC =5.5 సెం.మీ., AD =7.4 సెం.మీ., AC =8 సెం.మీ., BD =8.5 సెం.మీ. అయిన చతుర్భుజం నిర్మించండి.

2. PQRS చతుర్భుజంలో QR =7.5 సెం.మీ., RP=PS=6 సెం.మీ., RS =5 సెం.మీ. QS =10 సెం.మీ. అయిన చతుర్భుజం నిర్మించండి.

3. BC =7.5 సెం.మీ., AC=AD=6 సెం.మీ., CD =5 సెం.మీ., BD =8 సెం.మీ. అయిన ABCD చతుర్భుజం నిర్మించండి.

4. BC =2.6 సెం.మీ., CA =4 సెం.మీ., AD =3.5 సెం.మీ., CD =2 సెం.మీ., BD =3 సెం.మీ. అయిన ABCD చతుర్భుజం నిర్మించండి.

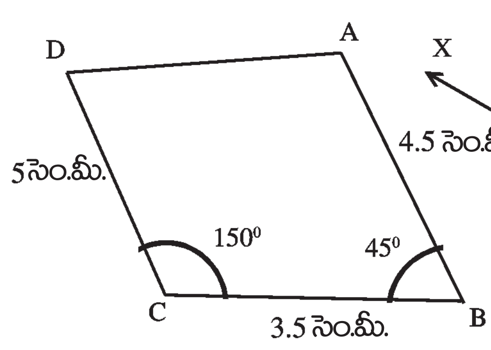
5. AB =4.5 సెం.మీ., CD =6 సెం.మీ., AD =6.3 సెం.మీ., BD =5 సెం.మీ., AC =5.5 సెం.మీ. అయిన ABCD చతుర్భుజమును నిర్మించండి.

చతుర్భుజ నిర్మాణం-3 :-

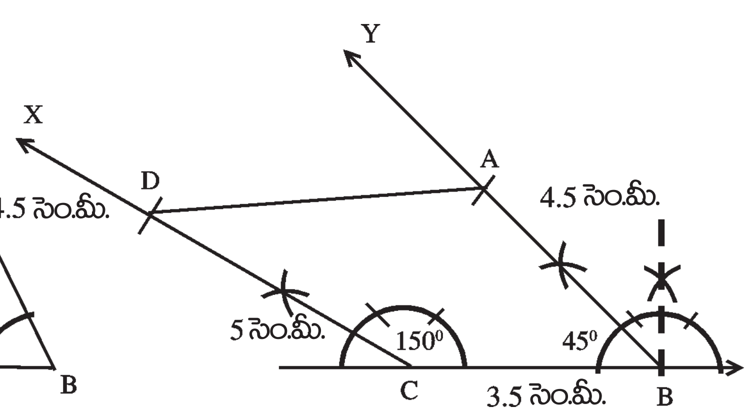
మూడు భుజాల పొడవులు, వాటి అంతర్గత కోణాల పరిమాణం ఇచ్చినచో త్రిభుజం నిర్మించుట

ఉదాహరణ-7 :-

ABCD చతుర్భుజంలో AB =4.5 సెం.మీ., BC =3.5 సెం.మీ., CD =5 సెం.మీ., $m\angle B = 45°$, $m\angle C = 150°$ అయిన చతుర్భుజం నిర్మించండి.



(బొమ్మ-4.16)



(బొమ్మ-4.17)

నిర్మాణ ప్రణాళిక :

(i) 3.5 సెం.మీ. పొడవు గల $\overline{BC}$ ని నిర్మించండి.

(ii) $m\angle BCX = 150°$ ఉండునట్లు C వద్ద $\overrightarrow{CX}$ ను నిర్మించండి.

(iii) C ని కేంద్రంగా తీసుకొని 5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో $\overrightarrow{CX}$ ను ఖండించునట్లు ఒక చాపం నిర్మించండి. ఆ ఖండన బిందువు D అనుకోయండి.

(iv) B బిందువు వద్ద $m\angle CBY=45°$ ఉండునట్లు $\overrightarrow{BY}$ ని నిర్మించండి.

(v) B ని కేంద్రంగా తీసుకొని 4.5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతలో $\overrightarrow{BY}$ ని ఖండించునట్లు చాపం గీయండి. ఖండన బిందువును A అనుకోయండి.

(vi) $\overline{AD}$ ని నిర్మించడి. దీనితో ABCD చతుర్భుజం ఏర్పడుతుంది.

అభ్యాసం - 4 (g)

1. ABCD చతుర్భుజం నిర్మించండి. అందులో AB =3.5 సెం.మీ., BC =5.5 సెం.మీ., CD =5 సెం.మీ., $m\angle B = 120°$, $m\angle C = 90°$.

2. PQRS లో PQ=QR= 3 సెం.మీ., PQ =5 సెం.మీ., $m\angle P = 90°$, $m\angle Q = 105°$ అయిన PQRS చతుర్భుజం నిర్మించండి.

3. PQRS లో $m\angle Q = 45°$, $m\angle R = 90°$, PQ = 5.5 సెం.మీ., QR =5 సెం.మీ., RS =4 సెం.మీ. అయిన చతుర్భుజం నిర్మించండి.

4. ABCD ట్రెపీజియంలో $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, AB = 3.8 సెం.మీ., BC =6 సెం.మీ., CD =4 సెం.మీ., $m\angle B = 60°$ అయిన ట్రెపీజియం నిర్మించండి.

స్వయంగా చేయండి

(i) ΔXBC లో XB =7.6 సెం.మీ., XC = 8 సెం.మీ., BC = 6 సెం.మీ.

(ii) $\overline{XB}$, $\overline{XC}$ ల మధ్య బిందువులు వరుసగా A, D లను నిర్ణయించండి.

(iii) $\overline{AD}$ ని నిర్మించండి.

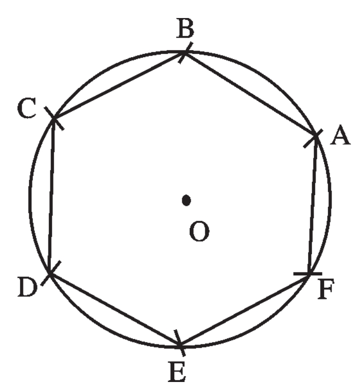
(iv) $\angle A, \angle B$ ల మధ్య ఏ సంబంధం ఉందో చూడండి.

(v) ఏర్పడ్డ ABCD చతుర్భుజం ఏ విధమైన చతుర్భుజం అగును ?

4.4. వృత్తంలో క్రమషడ్భుజం, సమబహు త్రిభుజం, సమచతురస్రంలను నిర్మించుట :-

(1) వృత్తంలో క్రమషడ్భుజం నిర్మించుట :-

ఒక బహు భుజంలోని భుజాలన్ని సమానంగాను, కోణాల పరిమాణం కూడా సమానంగా ఉన్నచో దాన్ని ఒక క్రమ బహు భూజి అందురు.ఆరు భుజులుగల క్రమ బహు భుజాలని క్రమష సర్భుజం అందురు.



(బొమ్మ-4.18)

గుర్తుంచుకోయండి :- ఒక బహు భుజి యొక్క శీర్షబిందువులు ఒక వృత్తంలో ఉన్నచో దాన్ని వృత్తాంతర్లిఖిత బహుభుజం అందురు.

ఒక వృత్తంలో ఒక అతర్లిఖితషడ్భుజం నిర్మించుటకై వృత్తంపై ఆరు బిందువులు అవసరమగును. A,B,C,D,E,F లు ఆ బిందువులు అనుకున్నచో అది ABCDEF అ క్రమషడ్భుజం అగును.

నిర్మాణ ప్రణాళిక :- బొమ్మ 4.18 (క)ని చూడండి. వృత్త వ్యాసార్థం r అనుకుందాం

(i) వృత్తంపై ఏదైనా ఒక బిందువును తీసుకొని దాన్ని A అనుకోయండి.

(ii) A ని కేంద్రంగా తీసుకొని r వ్యాసార్థంతో వృత్తంపై ఒక చాపం గీయండి. వృత్తాన్ని చాపం ఖండించిన బిందువును B అనుకోయండి. B నుండి అదే వ్యాసార్థంతో మరొక చాపం గీయండి. ఆ ఖండన బిందువు C అనుకోయండి. ఈ విధంగా D,E,F బిందువులను గుర్తించండి.

(iii) $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FA}$ ంఖా ఖండాలను నిర్మించండి. అవసరమయ్యే ABCDEF వృత్తాంతర్లిఖిత క్రమషడ్భుజం ఏర్పడుతుంది.

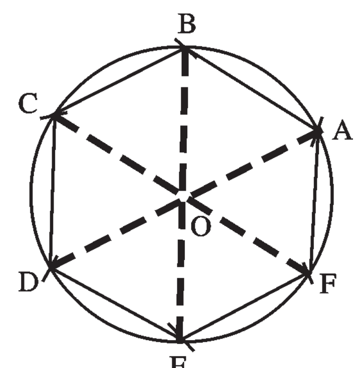
తెలుసుకోవలసిన కొన్ని విషయాలు :-

(a) F ను కేంద్రంగా తీసుకొని r వ్యాసార్థంతో చాపం నిర్మించునప్పుడు వృత్తంపై రెండు చోట్ల ఖండించును. అవి ఒకటి E కాగా మరొకటి A అవుతుంది. అందుచేత క్రమషడ్భుజంలోని 6 భుజాల పొడవు సమానం

(బొమ్మ 4.18 (ఆ)

(b) బొమ్మ 4.18 (అ)లో

OA = OB = OC = OD = OE, OF = r (వృత్త వ్యాసార్థం) అదే విధంగా AB = BC= CD= DE= EF= FA = r (నిర్మాణ సమయంలో చాపాల వ్యాసార్థం r గా తీసుకోవలెను)



(బొమ్మ–4.18(ii))

కాబట్టి క్రమషడ్భుజ శీర్ష బిందువులను వృత్త కేంద్రంతో కలిపి రేఖా ఖండాలు గీసినచో వృత్తంలో ఆరు సమబహు త్రిభుజాలు ఏర్పడును.

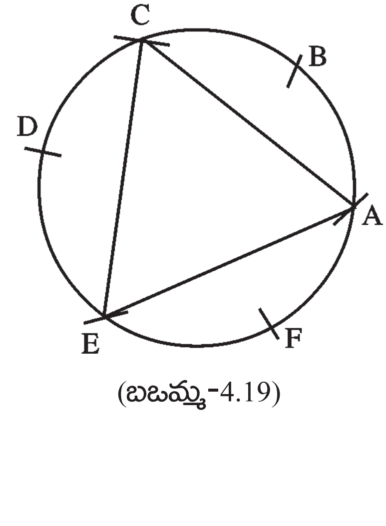
సమబహు త్రిభుజంలో ప్రతి కోణ పరిమాణం 60^0 అగుట వల్ల నిర్మించిన బహుభుజిలోని ప్రతి కోణ పరిమాణం 120^0 అగును.

2. వృత్తంలో సమబహు త్రిభుజం నిర్మించుట :

(బొమ్మ 4.19)

నిర్మాణ ప్రణాళిక :

(i) క్రమషడ్భుజి నిర్మాణ ప్రణాళికలోని (క) (ఖ) సోపానాలను అనుసరించి A,B,C,D,E,F బిందువులను వరుసగా నిర్మించవలెను.

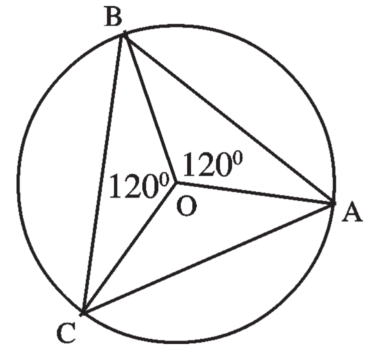


(బొమ్మ-4.19)

(ii) బిందువులను ఒక దాన్ని విడిచి ఒక దాన్ని (A,C,E) తీసుకొని $\overline{AC}, \overline{CE}, \overline{EA}$ రేఖ ఖండాలను నిర్మించవలెను. ఇప్పుడు Δ ACE వృత్తాంతర్లిఖిత సమబహు త్రిభుజం Δ BDF అగును.

షరా : బొమ్మ 4.19లో మనం మరొక సమబహు త్రిభుజాన్ని నిర్మించగలం అది ΔBDF అగును.

స్వయంగా చేయండి :



(బొమ్మ-4.20)

(i) ఒక నిర్దిష్ట వ్యాసార్ధం గల వృత్తం నిర్మించండి. దాని కేంద్ర బిందువు 'O' అనుకోయండి.

(ii) కేంద్ర బిందువు 'O' ను శీర్షబిందువుగా తీసుకొని $\angle$AOB ని నిర్మించవలెను. ఆ కోణ పరిమాణం 120^0 ఉండును (బొమ్మ 4.20)

(iii) తిరిగి 'O' ను శీర్షబిందువుగా తీసుకొని $\angle$BOC ని నిర్మించవలెను. ఆ కోయ పరిమాణం 120^0 అగును.

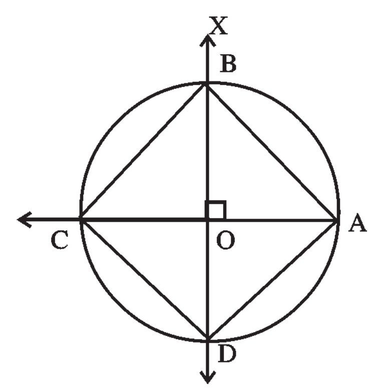
(iv) వృత్తంపై గల A,B,C లను గుర్తించి $\overline{AB}, \overline{BC}$, $\overline{CA}$ లను నిర్మించవలెను. ఇప్పుడు A,B,C త్రిభుజం సంపూర్ణమగును.

(v) ఇప్పుడు Δ ABC (సమబాసు త్రిభుజం) వృత్తాంతర్లిఖితమగును.

3. వృత్తంలో సమచతురస్రం నిర్మించుట :-

పరస్పరం లంబములుగా ఉండే రెండు వ్యాసాలను నిర్మించి వృత్తంలో సమచతురస్రం నిర్మించవచ్చును. మొదట వృత్తం నిర్మించవలెను. తరువాత కింది ప్రణాళికను అనుసరించ వలెను.

(i) వృత్త కేంద్ర బిందువు 'O' అనుకుందాం. వృత్తంపై ఏదైన ఒక బిందువును తీసుకొని, నిర్మించవలెను. $\overrightarrow{AO}$ అది వృత్తాన్ని ఖండించు బిందువును C అనుకోవలెను. $\overline{AC}$ వృత్తం యొక్క వ్యాసం అగును.



(బొమ్మ -4.21)

(ii) $\angle$AOX లంబకోణం ఉండునట్లు $\overrightarrow{OX}$ ను నిర్మించండి. $\overrightarrow{OX}$ ను వృత్తం ఖండించు బిందువును B అనుకోయండి.

(iii) $\overline{BO}$ ను నిర్మించండి. అం వృత్తాన్ని ఖండించు బిందువును D అనుకోయండి. వృత్తం యొక్క మరొక వ్యాసం ఇది $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ అగును.

(iv) $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$, $\overline{DA}$ లను నిర్మించవలెను. G కావలసిన వృత్తాంతర్లిఖత సమచతురస్రం అగును.

అభ్యాసం-4(h)

1. 4 సెం.మీ. వ్యాసార్ధం గల వృత్తం నిర్మించి దానిలో ఒక అంతర్లిఖత సమబహు త్రిభుజం నిర్మించండి.
2. 4 సెం.మీ. వ్యాసార్ధంతో వృత్తం నిర్మించి అందులో ఒక అంతర్లిఖిత సమచతురస్రం నిర్మించండి.
3. 10 సెం.మీ వ్యాసం గల వృత్తం నిర్మించి అందులో ఒక క్రమషడ్భుజంను నిర్మించండి.

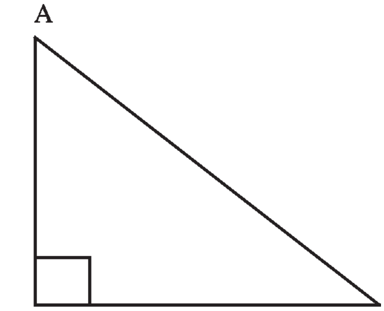
# క్షేత్ర గణితం (MENSURATION)	5వ అధ్యాయం

5.1. పరిచయం (Introduction)

సమతల చిత్రాలకు సంబంధించిన చుట్టుకొలత, వైశాల్యం కనుగొనుటకు గూర్చి క్రింది తరగతులలో మీరు తెలుసుకున్నారు. సమఘనం, దీర్ఘఘనం పరిమాణం, పార్శ్వతల, సంపూర్ణతల వైశాల్యం గూర్చి ఈ అధ్యాయంలో తెలుసుకుంటారు. త్రిభుజం, చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం కనుగొనుటకు కొన్ని సందర్భాలలో భుజాల పొడవులు, కోణాల పరిమాణం అవసరమగుచుండును. అందుచేత పైన పేర్కొన్న చిత్రాలకు సంబంధించిన విషయాలను గూర్చి తెలుసుకుందాం

5.2. పైథాగరస్ సిద్ధాంతం-దాని ప్రయోగం :-

(A) లంబకోణ త్రిభుజం :-



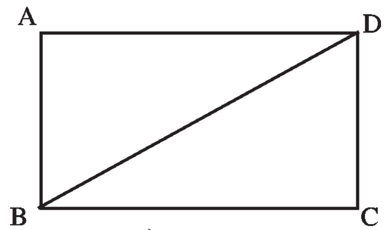
(బొమ్మ-5.1)

Δ ABC లో $\angle B$ లంబకోణం $\overline{AC}$ కర్ణం (hypotenuse) $\angle B$ సంలగ్న భుజాలు $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ లలో $\overline{BC}$ ని భూమి (base) $\overline{AB}$ ని లంబం (Perpendicular) అందురు. లంబం పొడవును త్రిభుజం ఎత్తు (height) అందురు.

పై భుజాల ఇంగ్లీషు పేర్లలోని మొదటి అక్షరాలు p, b, h ద్వారా లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క ఎత్తు, భూమి పొడవు, కర్ణం పొడవు సూచించబడును. లంబకోణ త్రిభుజంలోని భుజాల మధ్య గల సంబంధాన్ని తెలియజేయుటకు ఉపయోగపడే సుప్రసిద్ధ సిద్ధాంతం పైథాగరస్ సిద్ధాంతం' అది.

ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలోని కర్ణం పొడవు యొక్క వర్గం, దాని మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవుల వర్గముల మొత్తంతో సమానం. దాన్ని పైథాగరస్ సిద్ధాంత అందురు. (దీన్ని రుజువు చేయుటకు గూర్చి 9వ తరగతిలో తెలుసుకుంటారు)

భారతీయ గణిత శాస్త్రవేత్త బౌధ్యామనుడు (సుమారు క్రీపూ. 800లో) సాధారణ రూపంలో అనేక ఉదాహరణలిస్తూ 'ఒక దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క కర్ణంపై నిర్మించిన సమచతురస్రం వైశాల్యం దాని రెండు భుజాలపై నిర్మించిన సమచతురస్రాల వైశాల్యం మొత్తంతో సమానం అని తెలియజేసెను.



(!3ठा 5.2)

ABCD ఒక దీర్ఘచతురస్రం దాని కర్ణం BD పై నిర్మించిన సమచతురస్రం వైశాల్యం $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ లపై నిర్మించిన సమచతురస్రాల వైవాల్యం మొత్తంతో సమానం.

పైథాగరీయ త్రైయం (Phythagarean Triple)

లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క భుజాలలో గల సంబంధం $P^2 + b^2 = h^2$ మూడు గణన సంఖ్యల ద్వారా సాధ్యమౌతుంది. వాటిని పైథాగరీయ త్రైయం లేక పైథాగరీయ ట్రిపుల్ అందురు. ఉదాహరణకు $3^2 + 4^2 = 5^2$ పై విషయం వాస్తవమగును. మరొక విధంగా చెప్పాలంటే ఒక త్రిభుజంలో భుజాల పొడవులు 3,4,5 యూనిట్లు అయినచో అది ఒక లంబకోణ త్రిభుజం అగును. మరొక ప్రక్క త్రిభుజం యొక్క మూడు యూనిట్లు నాలుగు యూనిట్లు పొడవు గల భుజాల అంతర్గత కోణం లంబకోణ అయినచో మిగిలిన భుజం 5 యూనిట్లు అగును. అది లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క కర్ణం అగును.

అందుచేత బొమ్మ 5.1 నుండి $AC^2 = BC^2 + BC^2$

$$h^2 = P^2 + b^2, \; h = \sqrt{P^2 + b^2} \qquad \text{........(1)}$$

$$P^2 = h^2 - b^2, \; P = \sqrt{h^2 - b^2} \qquad \text{........(2)}$$

$$b^2 = h^2 - P^2, \; b = \sqrt{h^2 - P^2} \qquad \text{........(3)}$$

ఇచ్చుట గల (1), (2), (3) సూత్రాలను బట్టి లంబకోణ త్రిభుజంలో ఏ రెండు భుజాల పొడవులు తెలిసినచో మిగిలిన భుజం పొడవు తెలుసుకోవచ్చును.

కింది సంఖ్యాత్రయంను గుర్తుంచుకోయండి.

(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 55, 57), (9, 40, 41) ప్రతీ సంఖ్యాత్రంలోని సంఖ్యలు పరస్పరం మౌళికాలు. అందుచేత పై మూడు సంఖ్యలను మౌళికత్రయం అందురు. దాన్ని తెలుసుకొనుటకై సూత్రము వినియోగించవచ్చును.

m,n లు రెండు గణన సంఖ్యలు. అవి m>n త్రయంలోని సంఖ్యలు $m^2 - n^2$, 2mn, $m^2 + n^2$ రెండు గణన సంఖ్యలు 2,1 మరియు 2 > 1 అయినచో త్రయంలోని సంఖ్యలు $2^2 - 1^1$; $2 \times 2 \times 1$, $2^2 + 1^2$ అనగా త్రయం (3,4,5) అదే విధంగా మిగిలిన రెండు గణన సంఖ్యలను తీసుకొని పరీక్షించండి.

a,b,c లు పైథాగరస్ త్రైయం అయినచో (ka, kb,kc) ఒక్కొక్క పైథాగరీయ త్రైయం అగును. ఇచ్చట సున్నా మినహా ఒక స్థిర సంఖ్య అగును.

$k = 10$ అనుకోయండి పైథాగరీయ త్రైయం (3,4,5) అప్పుడు (30,40,50) కూడా ఒక్కొక్క పైథాగరీయ త్రైయం అగును. ఈ త్రైయంలోని సంఖ్యలు పరస్పరం మౌళికాలు కావు అందువల్ల ఇది ఒక మౌళిక త్రైయం కాదు. ఈ విధంగా అనేక పైథాగరీయ మౌళికాలను మనం నిర్ణయించవచ్చును.

షరతు : a,b,c ఒక పైథాగరీయ త్రైయం అయినచో $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$ లు కూడా త్రైయం అగును.

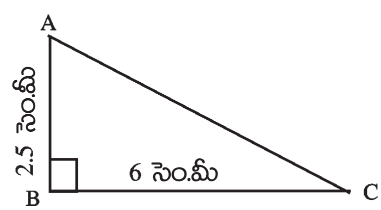
మరొక విదంగా చెప్పాలంటే ఒక త్రిభుజంలోని అతి పెద్ద భుజం పొడవు యొక్క వర్గం మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవుల వర్గాల మొత్తంతో సమానమైనచో అతి పెద్ద భుజం ఎదురుగా అండే కోణ పరిమాణం 90^0 అగును అనగా త్రిభుజం లంబకోణ త్రిభుజమగును. ఇది పైథాగరీయ సిద్ధాంతానికి వ్యతిరేక సిద్ధాంతం. ఉదాహరణకు 5,12,13 యూనిట్లు గల త్రిభుజం ఒక లంబకోణ త్రిభుజం, 13 యూనిట్లు గల భుజం ఎదురుగా ఉన్న కోణం లంబకోణం.

స్వయంగా చేయండి పైథాగరీయ త్రయాలు పదింటిని రాయండి.

ప్రయోగ ప్రశ్నావళి :-

ఉదాహరణ-1 : ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో లంబకోణంను తాకియున్న రెండు భుజాల పొడవులు వరుసగా 2.5 సెం.మీ., 6 సెం.మీ. అయినచో దాని కర్ణం పొడవు ఎంత ?

సమాధానం :- బొమ్మ 5.3లో ABC ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో CB లంబకోణం, ABC = 2.5 సెం.మీ., BC = 6 సెం.మీ. అనుకుందాం



(బొమ్మ-5.3)

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం)

$= 2.5^2 + 6^2 = 6.25 + 36 = 42.25$

$\therefore AC = \sqrt{42.25} = 6.5$

$\therefore$ కర్ణ పొడవు 6.5 సెం.మీ.

ఉదాహరణ-2 : ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాల వరుసగా 6 సెం.మీ., 4.5 సెం.మీ., 7.5 సెం.మీ. అయినచో అది లంబకోణ త్రిభుజం అగునా ? అయినచో ఏ భూమి త్రిభుజం కర్ణమగును ?

సమాధానం : ఇచ్చిన మూడు భుజాల పొడవులు 6 సెం.మీ., 4.5 సెం.మీ., 6.5 సెం.మీ. అది లంబకోణ త్రిభుజమైనచో $(6)^2 + (4.5)^2 = (7.5)^2$ అగును

ఇప్పుడు ఎడమ ప్రక్క $(6)^2 + (4.5)^2 = 36 + 20.25 = 56.25$

కాని కుడి ప్రక్క $(7.5)^2 = 56.25$

$(6)^2 + (4.5)^2 = (7.5)^2$ అందుచేత ఇది లంబకోణ త్రిభుజం అగును. ఇందులో అది పెద్ద భుజం కర్ణమగుటవల్ల దాని పొడవు 7.5 సెం.మీ.

ఉదాహరణ-3

గాలి వానకు తిన్నగా ఉన్న కొబ్బరి చెట్టు ఇరిగిపోయి, ఇరిగిన చివరి భాగం దాని మొదలునకు 6 మీ. దూరంలో నేలకు తాకెను. ఇరిగి పోయిన భాగం మొదటి భాగానికి 2 మీటర్లు అధికమైనచో చెట్టు ఎత్తు ఎంత ?

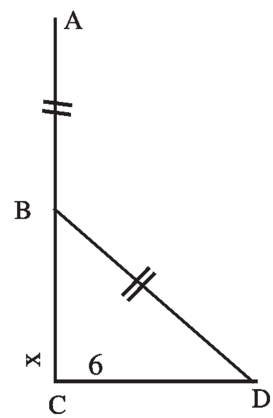
సమాధానం : చెట్టు ఎత్తు AC అనుకుందాం. అది B బిందువు వద్ద ఇరిగి చెట్టు పైభాగం A, భూమిపై D వద్ద తాకింది అనుకుందాం.

BC = x మీ. అనుకుందాం

AB = BD = (x+2) మీ.

BCD లంబకోణ త్రిభుజంలో CD = 6 మీ., BC = x మీ.

మరియు BD = x + 2 మీ.



(బొమ్మ-5.4)

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$BD^2 - BC^2 = CD^2$

$(X + 2)^2 - x^2 = 6^2$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 - x^2 = 36 \quad \therefore \ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2)$

$\Rightarrow 4x + 4 = 36 \Rightarrow 4x = 36 - 4 = 32$

$\Rightarrow x = \dfrac{32}{4} = 8$

$x = 8$

$\therefore$ చెట్టు ఎత్తు = x+x+2=(8+8+2) మీ 18 మీ

షరా :- $(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2) = x(x + 2) + 2(x + 2)$

$= x^2 + 2x + 2x + 4$

$= x^2 + 4x + 4.$

ఉదాహరణ-4 : ఒక కొలనులో తామరపువు నీటిపై 2 డెసీ.మీ. ఎత్తులో ఉన్నది గాలి వల్ల అది 8 డెసి.మీ. దూరంలో నీటిలో మునిగి పోయింది. అయిన కొలనులో నీటి లోతు ఎంత ?

సమాధానం : తామరకాడ మొదటి సిద్ధిని సూచిస్తుంది. భాగం నీటిపైన, భాగం నీటిలోపల ఉన్నది. గాలి ద్వారా కొట్టుకొని పోవుటవల్ల తరువాత గా మారిందనుకుందాం "D" బిందువు నీట మునిగింది.

$\therefore$ AB = BD, CD = 8 డెసీమీ. అనుకుందాం

$\therefore$ AB = BC + AC = $(x + 2)$ డెసీమీ.

$\therefore$ BD = x + 2 డెసి.మీ.

తామరకాడ నీటిపై లంబంగా ఉన్నది

$\therefore$ BCD లంబకోణ త్రిభుజంలో $BD^2 - BC^2 = CD^2$

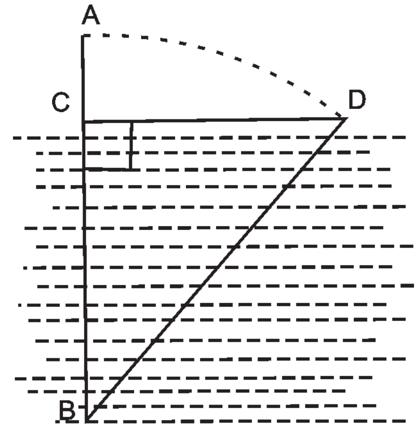
$$\Longrightarrow (x+2)^2 - x^2 = (8)^2$$

$$\Longrightarrow x^2 + 4x + 4 - x^2 = 64$$

$$\Longrightarrow 4x + 4 = 64$$

$$\Longrightarrow 4x = 60 \Longrightarrow x = \frac{60}{4} = 15$$

$\therefore$ నీటి లోతు 15 డెసీ. మీటర్లు.



(బొమ్మ –5.5)

అభ్యాసం-5 (a)

1. కొన్ని లంబకోణ త్రిభుజంలో లంబకోణంతో యున్న రెండు భుజల పొడవు ఇవ్వడమయ్యింది. పైథాగరస్ త్రైయం సహాయంతో ప్రతీ లంబకోణ త్రిభుజం కర్ణం పొడవును కనుగొనండి.

   క) 3 మీ; 4 మీ. ఖ) 8.5 సెం.మీ; 12 సెం.మీ. గ) 7 సెం.మీ; 24 సెం.మీ.

   ఘ) 8 మీ; 15 మీ. ఙ) 1.5 సెం.మీ; 2 సెం.మీ చ) 10 సెం.మీ; 24 సెం.మీ.

2. కింది లంబకోణ త్రిభుజం కర్ణం పొడవు, ఒక భుజం పొడవు ఇవ్వడమయ్యింది. రెండువ భుజం పొడవును కనుగొనండి.

   క) 2.5 సెం.మీ; 2.4 సెం.మీ ఖ) 4.1 మీ; 4 మీ గ)12.5 మీ; 10 మీ.

   ఘ) 125 మీ; 100 మీ. ఙ) 299 మీ; 276 మీ.

3. కింద కొన్ని త్రిభుజాల భుజాల పొడవులు ఇవ్వడమయ్యింది. వాటిలో ఒక్కొక్కటి ఒక్కొక్క లంబకోణ త్రిభుజమని రుజువు చేయండి.

   క) 11 సెం.మీ; 60 సెం.మీ; 61 సెం.మీ ఖ) 0.8 మీ; 1.5 మీ; 1.7 మీ.

   గ) 0.9 డె.మీ; 4 డె.మీ; 4.1 డె.మీ ఘ) 0.7 సెం.మీ; 2.4 సెం.మీ; 2.5 సెం.మీ.

4. ABC త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాల పొడవులు ఇవ్వడమయ్యింది. పరీక్ష చేసి ABC లంబకోణ త్రిభుజం అగునా కాదా ? ఒకవేళ అయినచో ఏ కోణ పరిమాణం 90^0లో రాయండి ?

   (i) AB =3 సెం.మీ; BC =4 సెం.మీ; CA =5 సెం.మీ.

   (ii) CA =5 సెం.మీ; AB =12 సెం.మీ; BC =13 సెం.మీ.

   (iii) BC =7 సెం.మీ; CA =24 సెం.మీ; AB =25 సెం.మీ.

   (iv) BC =9 సెం.మీ; AB =40 సెం.మీ; AC =41 సెం.మీ.

   (v) AB =8 సెం.మీ; BC =15 సెం.మీ; CA =17 సెం.మీ.

5. ఒక వ్యక్తి A స్థానం నుండి బయలుదెరి తూర్పు దిశగా 50 మీటర్లు వెళ్లిన తరువాత ఉత్తర దిశగా 120 మీ. వెళ్లి B అనే స్థానాన్ని చేరుకొనెను. అయిన A నుండి B దూరం ఎంత ?

6. 20 మీటర్ల ఎత్తు గల తాటి చెట్టు గాలికి పడి దాని శిఖరం చెట్టుకి 12 మీటర్లు దూరంలో ఒక స్తంభాన్ని తాకింది అయిన స్తంభం ఎత్తు ఎంత ?

7. ఒక ఇంటి గోడ అడుగు భాగంను 8 మీ దూరం నుండి ఒక నిచ్చెనను గోడపై వేయండా నిచ్చెన పైభాగం గోడ పైభాగానికి తాకెను. నిచ్చెన పొడవు 10 మీటర్లైనచో గోడ ఎత్తు ఎంత ?

8. ఒక ఇంటి ఎదురెదురు గోడల ఎత్తు వరుసగా 25 డెసిమీ., 64 డెసిమీ. రెండు గోడల పైభాగంపై అడ్డంగా ఉన్న తిన్నని కర్రపొడవు 65 డెసిమీ. అయిన ఆ ఇంటి వెడల్పు ఎంత ?

9. ఒక కొలనులో తామరపూవు నీటిపై 1 మీ. కనిపిస్తుంది. కాని గాలి ద్వారా కొట్టుకొనిపోయి మొదట ఉన్న స్థానంనకు 3 మీ. దూరంలో నీటిలో మునిగిపోయింది. అయిన కొలనులోని నీటి లోతు ఎంత ?

10. ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో ఒక భుజం పొడవు 3 సెం.మీ., దాని కర్ణం పొడవు మిగిలిన భుజం పొడవు కంటె 8 సెం.మీ. అధికం అయిన కర్ణం పొడవు ఎంత ?

(B) సమద్విబాహు త్రిభుజం :

ఏదైనా ఒక త్రిభుజంలోని రెండు భుజాల సమానమైనచో దాన్ని ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం అందురు. ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజంలో సమాన భుజాల యొక్క అంతర్గత కోణాలు కూడా పరస్పరం సమానం. దానిలోని ఒక కోణం లంబకోణం అయినచో ఆ త్రిభుజాన్ని లంబ సమద్విబాహు త్రిభుజం అందురు.

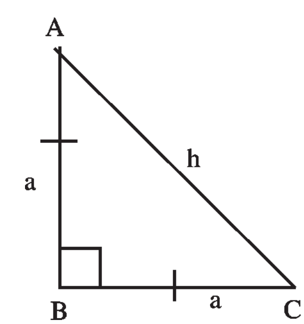
లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజంలో కర్ణం :

Δ ABC ఒక లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజం అయినచో

AB = BC = a యూనిట్లు, AC = h యూనిట్లు అనుకుందాం.

$\therefore$ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ కాబట్టి $hh^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\Rightarrow h = \sqrt{2}a \Rightarrow a = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$ యూనిట్లు



(బొమ్మ-5.6)

$$\boxed{\text{కర్ణం పొడవు (h) = భుజం పొడవు} \times \sqrt{2} \text{ లేక భుజం పొడవు} = \frac{\text{కర్ణం పొడవు}}{\sqrt{2}}}$$

లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజం చుట్టుకొలత = AB + BC + CA

$= a + a + \sqrt{2}a$

$= 2a + \sqrt{2}a = \sqrt{2}a\left(\sqrt{2}+1\right)$ యూనిట్లు

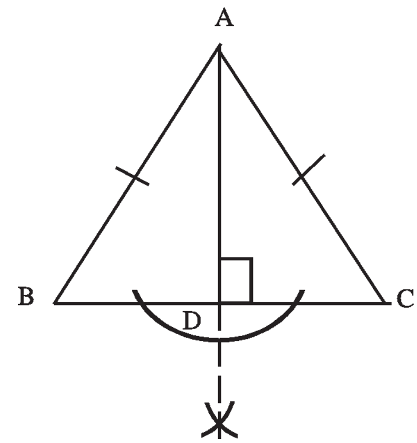
లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజం చుట్టుకొలత = $\sqrt{2} \times$ సమాన భుజాల పొడవు $\left(\sqrt{2}+1\right)$

స్వయంగా చేయండి.

మీ నోట్ పుస్తకంలో మూడు లంబకోణ త్రిభుజాలను నిర్మించండి. వాటి సమాన భుజాల పొడవు వరుసగా 3 సెం.మీ., 4 సెం.మీ., 5 సెం.మీ. ప్రతీ దాని యొక్క కర్ణం పొడవు కొలిసి $\sqrt{2}$ యొక్క సమాన విలువను ఒకటవ దశాంత స్థానం వరకు కనుగొనండి.

సమద్విబాహు త్రిభుజం ఎత్తు :

సమద్విబాహు త్రిభుజంలో రెండు సమాన భుజాల మినహా మిగిలిన భుజాన్ని భూమి అందురు. ఈ విషయం మీకు ఇది వరకే తెలుసు. ఇప్పుడు పరీక్ష ద్వారా సమద్విబాహు త్రిభుజం యొక్క భూమికి ఎదురుగా ఉన్న శీర్షబిందువు నుండి భూమిపై గీసిన లంబం గూర్చి తెలుసుకుంటారు.



(బొమ్మ-5.7)

వేరు వేరు కొలతలను తీసుకొని మూడు సమద్విబాహు త్రిభుజాలను నిర్మించండి. (బొమ్మ 5.7లో వలే గీసి పేర్లు పెట్టండి.)

ప్రతి బొమ్మలో A బిందువు నుండి $\overline{BC}$ పై $\overline{AD}$ లంబం గీయండి. త్రిభుజాలు మూడిండిని (1) (2) (3) అనుకోయండి. ప్రతి బొమ్మలోను సమాన భుజాలు $\overline{AB}$, $\overline{AC}$. ప్రతీ బొమ్మలో లను కొలిసి కింది పట్టికలో రాయండి.

బొమ్మ నెం.	BD	DC
(i)		
(ii)		
(iii)		

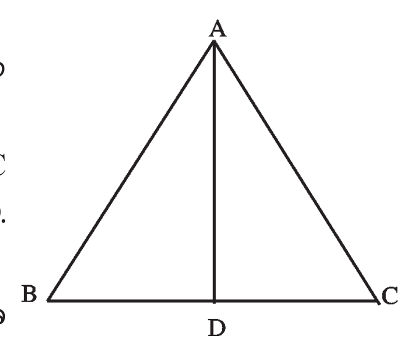
పట్టిక : **5.1**

ఈ పట్టికను బట్టి చూడగా ప్రతి బొమ్మలో BD = DC అని తెలుస్తున్నది. అనగా ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజంలో భూమికి ఎదురుగా ఉన్న శీర్షబిందువు నుండి భూమిపై గీసిన లంబం భూమిని సమద్విఖండన చేయును.

ఉపసిద్ధాంతం : ఒక సమబాహు త్రిభుజంలో ప్రతి శీర్షబిందువు నుండి దాని ఎదురుగా ఉన్న భూమిపై గీసిన లంబం ఆ భుజాన్ని సమద్విఖండన చేయును.

సమద్విబాహు త్రిభుజం ఎత్తు భూమి సమాన భుజాల మధ్య గల **సంబంధం :-**

ABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం. బొమ్మ 5.8ను చూడండి. AB=AC $\overline{BC}$ పై $\overline{AD}$ లంబం అగును. ΔABC యొక్క భూమి, $\overline{BC}$ ఎత్తు AD. AB=AC=a యూనిట్లు, B=b యూనిట్లు అనుకుందాం.



(బొమ్మ-5.8)

$\therefore$ BD = DC = $\frac{1}{2}$ b యూనిట్లు అగును. ΔADC ఒక లంబకోణ త్రిభుజం

$\therefore AD^2 = AC^2 - DC^2$

$= a^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = a^2 - \frac{1}{4}b^2 \qquad \therefore\ AD = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2}$ యూనిట్లు

సమద్విబాహు త్రిభుజం ఎత్తు = $\sqrt{(\text{సమాన భుజం పొడవు})^2 - (\text{భూమిలో సగం పొడవు})^2}$

$\sqrt{(\text{సమాన భుజం పొడవు})^2 - (\text{భూమిలో సగం పొడవు})^2}$

షరా : AB = BC = CA = a యూనిట్లు అయినచో అప్పుడు అది సమబాహు త్రిభుజం అగును. అటువంటి పరిస్థితులలో b=a అయినచో AD = $\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3} \times a}{2}$ అగును.

అనగా సమబాహు త్రిభుజం ఎత్తు = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ భుజం పొడవు

స్వయంగా చేయండి.

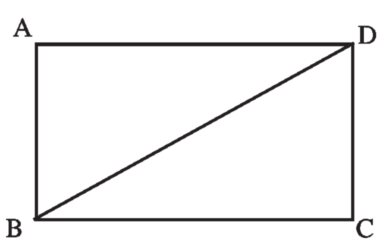
(i) Δ ABC త్రిభుజంలో AB = AC = 5 సెం.మీ., BC =8 సెం.మీ. అయిన AD ఎత్తు ఎంత ?

(ii) Δ ABC లో AC=AB=BC=4 సెం.మీ., అయిన త్రిభుజం ఎత్తు AD ఎంత ?

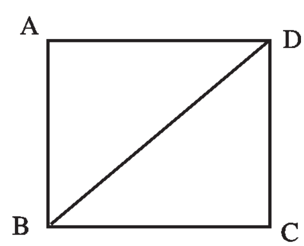
(iii) Δ ABC లో AB=AC=10 సెం.మీ., $\overline{AD} \perp \overline{BC}$; AD = 8 సెం.మీ. అయిన BC ఎంత ?

(iv) Δ ABC లో AB=BC=AC=a సెం.మీ., త్రిభుజం ఎత్తు h సెం.మీ. అయిన BC ఎంత ?

(C) దీర్ఘచతురస్రం, సమచతురస్రంల కర్ణం :



(బొమ్మ-5.9(i))



(బొమ్మ-5.9(ii))

ఒక చతుర్భుజంలోని ఎదురెదురు భుజాల పొడవు సమానంగా ఉండి ఒక్కొక్క కోణం, లంబకోణం అయినచో దాన్ని దీర్ఘ చతురస్రం అందురు. ఈ విషయాన్ని ఇది వరకే మీరు తెలుసుకున్నారు. దీర్ఘచతురస్రంలోని అన్ని భుజాల పొడవు సమానం. అయినచో దాన్ని సమచతురస్రం అందురు.

ABCD దీర్ఘచతురస్రం (బొమ్మ 5.9 (క) కర్ణం ని నిర్మించండి.

AD = BC = l యూనిట్లు, AB = C D= b యూనిట్లు, BD = h యూనిట్లు అగును-

BCD లంబకోణ త్రిభుజంలో $BD^2 = BC^2 + DC^2$ లేక $h^2 = l^2 + b^2$

$\therefore h = \sqrt{l^2 + b^2}$ అనగా దీర్ఘచతురస్రం కర్ణం = $\sqrt{(\text{పొడవు})^2 + (\text{వెడల్పు})^2}$

$l = b$ అయినచో ABCD ఒక సమచతురస్రం అగును. (బొమ్మ 5.9 (ఖ)

అందుచేత ఇచ్చట $h = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{2}$ అనగా సమచతురస్రం కర్ణం = $\sqrt{2} \times$ భుజం పొడవు

ప్రయోగ ప్రశ్నవళి :-

ఉదాహరణ-5 : ఒక లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజం కర్ణం పొడవు 20 సెం.మీ., అయిన దాని ఒక్కొక్క సమాన భుజం పొడవు ఎంత ?

సమాధానం : లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజంలో సమాన భుజాల పొడవు

$$= \frac{\text{కర్ణం పొడవు}}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} \text{ సెం.మీ}$$

$= \dfrac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$ సెం.మీ. (భిన్నంలోని హారం అకరణీయ సంఖ్య అగుట అర్ధ రహింతం అందుచేత ఎత్తు యొక్క లవం, హారంను చే గుణించడమయ్యింది

$$= \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \text{ సెం.మీ. (జవాబు)}$$

ఉదాహరణ-6 : ఒక లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క కర్ణం వర్గం 200 చ.మీ. అయినచో ఒక్కొక్క సమాన భుజం పొడవెంత ? దాని చుట్టుకొలత ఎంత ?

సమాధానం : కర్ణం పొడవు యొక్క వర్గం = 200 చ.మీ.

$\therefore$ కర్ణం పొడవు = $\sqrt{200}$ మీ = $\sqrt{2 \times 100} = 10\sqrt{2}$ మీ.

$\therefore$ సమాన భుజం పొడవు = కర్ణం పొడవు / $\sqrt{2}$ = $\dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ మీ = 10 మీ.

చుట్టుకొలత = $\sqrt{2}$ $\times$ సమాన భుజాల పొడవు $\left(\sqrt{2}+1\right) = \sqrt{2} \times 10\left(\sqrt{2}+1\right)$

అనగా $= \left(20 + 10\sqrt{2}\right)$ మీటర్లు

ఉదాహరణ-7 : ఒక సమచతురస్రంలో రెండు అభిముఖ కోణాల బిందువుల మధ్య దూరం 40 సెం.మీ. అయిన దాని చుట్టుకొలత ఎంత ?

సమాధానం : రెండు అభిముఖ (ఎదురెదురు) కోణాలు బిందువుల మధ్య దూరం = 40 సెం.మీ.

$\therefore$ అనగా కర్ణం పొడవు = $\dfrac{40}{\sqrt{2}}$ సెం.మీ. = $= \dfrac{40 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$ సెన్ణమీ.

$= \dfrac{40\sqrt{2}}{2}$ సెం.మీ. = $20\sqrt{2}$ సెం.మీ.

$\therefore$ సమచతురస్రం చుట్టుకొలత = $4\times$ భుజం పొడవు

= 4 x $20\sqrt{2}$ సెం.మీ. = $80\sqrt{2}$ సెం.మీ. (జవాబు)

ఉదాహరణ-8 : ఒక దీర్ఘచతురస్రంలోని సన్నిహిత భుజాల పొడవులు వరుసగా 120 సెం.మీ., 27 సెం.మీ. అయిన దాని కర్ణం పొడవు ఎంత ?

సమాధానం : సన్నిహిత భుజాల పొడవులు 120 సెం.మీ., 27 సెం.మీ.

$\therefore$ కర్ణం పొడవు $= \sqrt{120^2 + 27^2}$ సెం.మీ. = $\sqrt{3^2\left(40^2 + 9^2\right)}$ సెం.మీ.

= $\sqrt{(3^2 \times 41)^2}$ సెం.మీ. (9, 40, 41 పైథాగరస్ త్రైయం)

= 3×41 సెం.మీ. =123 సెం.మీ. (జవాబు)

ఉదాహరణ-9 : 20 సెం.మీ. భుజం గల సమబాహు త్రిభుజం ఎత్తు ఎంత ?

సమాధానం : సమబాహు త్రిభుజం ఎత్తు = ప్రతీ భుజం పొడవు $\times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

= $24 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ సెం.మీ. = $12\sqrt{3}$ సెం.మీ. (జవాబు)

ఉదాహరణ-10 : ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజంలో భూమి 36 సెం.మీ. సమాన భుజం పొడవు 82 సెం.మీ. అయిన ఎత్తు ఎంత ?

సమాధానం : ΔABC లో AB=AC= 82 సెం.మీ. BC = 36 సెం.మీ., $\overline{AD}, \overline{BC}$ పై లంబం

$\therefore$ BD = $\dfrac{BC}{2} = \dfrac{36}{2}$ సెం.మీ = 18 సెం.మీ.

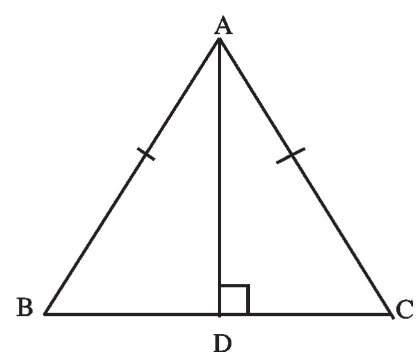
ADB లంబకోణ త్రిభుజంలో

AD = $\sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{82^2 - 18^2}$ సెం.మీ.

= $\sqrt{(82+18)(82-18)}$ సెం.మీ.

= $\sqrt{100 \times 64}$ సెం.మీ. = $10 \times 8 = 80$ సెం.మీ.

$\therefore$ ఎత్తు = 80 సెం.మీ. (జవాబు)



(బొమ్మ-5.10)

ఉదాహరణ-11 : ఒక సమబాహు త్రిభుజం ఎత్తు $30\sqrt{3}$ అయిన దాని చుట్టుకొలత ఎంత ?

సమాధానం : సమబాహు త్రిభుజం ఎత్తు = = $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times$ భుజం పొడవు

$\Longrightarrow$ భుజం పొడవు = ఎత్తు $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = 30\sqrt{3} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = 60$ = సెం.మీ.

$\therefore$ సమబాహు త్రిభుజం చుట్టుకొలత = 3 x భుజం పొడవు

= 3 x 60 =180 సెం.మీ.

అభ్యాసం - 5 (b)

1. సమబాహు త్రిభుజంలో

(i) భూమి 10 సెం.మీ. సమాన భుజం 13 సెం.మీ. అయిన ఎత్తు ఎంత ?

(ii) సమాన భుజాల పొడవు 41 సెం.మీ., ఎత్తు 9 సెం.మీ. అయిన భూమి పొడవు ఎంత ?

(iii) భూమి పొడవు 14 సెం.మీ., ఎత్తు 24 సెం.మీ. అయిన సమాన భుజాల పొడవు ఎంత ?

(iv) ఎత్తు 12 సెం.మీ. భూమి పొడవు ఎత్తు కంటె 2 సెం.మీ. తక్కువ అయిన సమాన భుజం పొడవు ఎంత ?

2. **ABC** లంబకోణ త్రిభుజంలో $m\angle B = 90°$, $AB = BC$

(i) $\overline{AB} = 8$ 8 సెం.మీ. కర్ణం $\overline{AC}$ పొడవు ఎంత ?

(ii) $\overline{AB} = 7$ 7 సెం.మీ. అయిన $\overline{AC}$ పొడవు ఎంత ?

(iii) కర్ణం $\overline{AC}$ పొడవు 40 సెం.మీ. అయిన $\overline{BC}$ పొడవు ఎంత ?

(iv) కర్ణం $\overline{AC}$ పొడవు 25 సెం.మీ. అయిన $\overline{AB}$ పొడవు ఎంత ?

3. (i) ఒక సమచతురస్రం భుజం పొడవు 7 సెం.మీ. అయిన కర్ణం పొడవు ఎంత ?

(ii) ఒక సమచతురస్రం కర్ణం పొడవు 18 సెం.మీ. అయిన భుజం పొడవు ఎంత ?

(iii) ఒక సమచతురస్రం కర్ణం పొడవు $22\sqrt{2}$ సెం.మీ. అయిన దాని చుట్టుకొలత ఎంత ?

(iv) ఒక సమచతురస్రం భుజం 2 సెం.మీ. పెరిగినచో కర్ణం పొడవు ఎంత పెరుగును ?

4. ఒక దీర్ఘచతురస్రంలోని లంబకోణాన్ని భుజాల పొడవులు ఇవ్వడమయ్యింది. వాటి కర్ణం పొడవులను కనుగొనండి.

(i) 75 మీ; 40 మీ (ii) 14 మీ; 48 మీ.

5. ఒక సమబాహు త్రిభుజం చుట్టుకొలత 24 సెం.మీ. అయిన ఎత్తు ఎంత ?

6. ఒక సమబాహు త్రిభుజం యొక్క ఒక శీర్షబిందువు నుండి ఎదురుగా ఉన్న భుజంనకు గల దూరం $15\sqrt{3}$ డెసిమీటర్లు అయిన దాని చుట్టుకొలత ఎంత ?

7. ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజంలో భూమి పొడవు 96 సెం.మీ., ఎత్తు 14 సెం.మీ. అయిన ప్రతీ సమాన భుజం పొడవు ఎంత ? దాని చుట్టుకొలత ఎంత ?

8. ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజంలో ప్రతీ సమాన భుజం పొడవు 51 సెం.మీ.లు మూడవ భుజంపై గీసిన ఎత్తు 45 సెం.మీ. అయిన మూడవ భుజం పొడవు ఎంత ?

9. ఒక లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజం చుట్టుకొలత $8(\sqrt{2}+1)$ మీటర్లు అయిన దాని ఒక్కొక్క సమాన భుజం పొడవు ఎంత ?

10. ఒక సమచతురస్రం భుజం పొడవు 5 సెం.మీ. పొడిగించినచో దాని చుట్టుకొలత ఎంత పెరుగును. కర్ణం పొడవు ఎంత పెరుగును ?

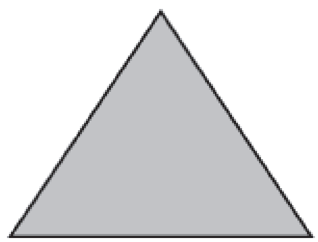
5.2 క్షేత్రం - వైశాల్యం (Region and area)

త్రిభుజాకార క్షేత్రం :

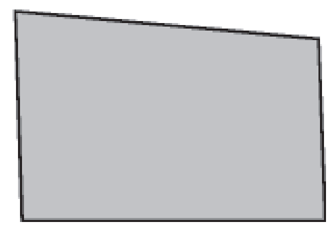
ఒక త్రిభుజం దాని అంతర్భాగం కలియక వల్ల త్రిభుజాకార క్షేత్రం (Triangular region) ఏర్పడుతుంది. (బొమ్మ (5.11.క)

చతుర్భుజాకార క్షేత్రం :

ఒక చతుర్భుజం అంతర్భాగంలో దాని నాలుగు భుజాల కలియక వల్ల చతుర్భుజాకార క్షేత్రం ఏర్పడుతుంది (బొమ్మ 5.11.ఖ)



(బొమ్మ-5.11(i))



(బొమ్మ-5.11(ii))

త్రిభుజాకార క్షేత్రం చతుర్భుజాకార క్షేత్రం గూర్చి ఇది వరకే తెలుసుకున్నాం. అదే విధంగా పంచభుజాకార, షడ్భుజాకార క్షేత్రాలను గూర్చి కూడా తెలుసుకున్నాం. త్రిభుజాకార క్షేత్రం యొక్క వైశాల్యాన్ని క్లుప్తంగా త్రిభుజ వైశాల్యం అని అంటాం. అదే విధంగా చతుర్భుజ వైశాల్యం పంచభుజ వైశాల్యం మొదలైన వాటిని అంటాం.

క్షేత్రం : (Region) యొక్క కొలతక్షేత్రం కొలతను వైశాల్యం (Area) అందురు.

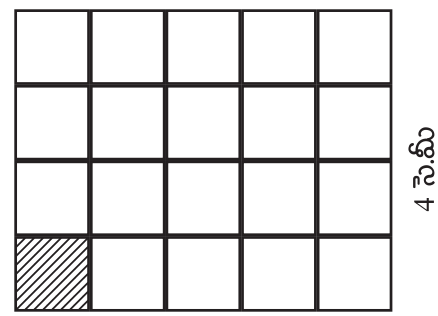
స్వీకృత సిద్ధాంతం-1 : ప్రతీ బహుభుజి ద్వారా మూసిన క్షేత్రం (Closed region) నకు ఒక నిర్దిష్టమైన వైశాల్యం గలదు. ఇది ధనాత్మక వాస్తవ సంఖ్య

స్వీకృత సిద్ధాంతం-2 : ఒక బహుభుజి ద్వారా మూసియున్న క్షేత్రం లేక స్థలం యొక్క వైశాల్యం దాన్ని ఏర్పరచిన త్రిభుజాకార క్షేత్రాల వైశాల్యాల మొత్తంతో సమానం.

5.2.1. వైశాల్యపు కొలతలు : (వైశాల్య సూత్రాల క్రమవికాసం)

(i) క్షేత్రం లేదా స్థలం కొలుచుటకు మొదట కొల ప్రమాణంను నిర్ణయించుకోవలెను. ఒక సమచతురస్రం భుజం పొడవు ఏ ప్రమాణంలో ఉంటుందో దాని వైశాల్యం అదే చదరపు ప్రమాణంగా తీసుకోవలసి యుంటుంది. ఉదా.-1 సెం.మీ. పొడవు భుజం గల సమచతురస్ర వైశాల్యం 1 చ.సె.మీ. అవుతుంది. అదే విధంగా భుజం పొడవు 1 మీ. అయిన దాని వైశాల్యం 1 చ.మీ. అవుతుంది.

(ii) ఒక దీర్ఘచతురస్రంలో ఒక యూనిట్ పరిమాణంలో దాని భుజంనకు సమాంతరంగా రేఖలను గీసి దాన్ని కొన్ని యూనిట్ చదరపు క్షేత్రాలుగా విభజించండి. ఈ చిన్న సమచతురస్రాలను లెక్కిస్తే వచ్చే సంఖ్య, దీర్ఘచతురస్రం పొడవు, వెడల్పులు గుణించుటవల్ల వచ్చే లబ్దంతో సమానమగును. ఒకవేళ పొడవు 5 సెం.మీ., వెడల్పు 4 సెం.మీ. అయినచో దీర్ఘచతురస్రంలో 1 సెం.మీ. వెడల్పుతో సమాంతర రేఖలను నిలువుగా అడ్డంగా గీసి ఏర్పడిన చిన్న గదులను లెక్కించినచో 20 అగును. ఒక్కొక్క దాని భుజం 1 సెం.మీ ఉండును.



(బొమ్మ-5.12)

బొమ్మ 5.12లో పొడవు, వెడల్పులో సమానం ఉన్న 5.4లతో 20 సంఖ్య లభించింది. దీన్ని బట్టి చూడగా దీర్ఘచతురస్రం వైశాల్యం పొడవు, వెడల్పుల లబ్దం అని తెలుస్తుంది.

అనగా 20 చ.సె.మీ = 5 సె.మీ × 4 సె.మీ.

సాధారణంగా దీర్ఘచతురస్రం పొడవు l యూనిట్లు, వెడల్పు b యూనిట్లు అయినచో

దీర్ఘచతురస్రం వైశాల్యం = a చ.యూనిట్లు

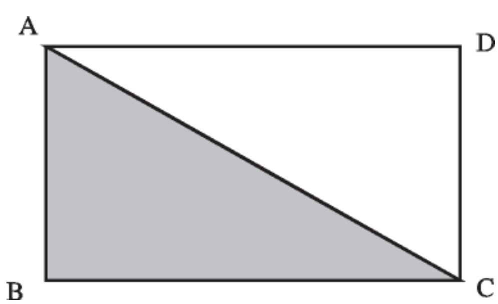
సమచతురస్రం భుజం a యూనిట్లు అయినచో

సమచతురస్రం వైశాల్యం = a^2 చ.యూనిట్లు

(iii) దీర్ఘచతురస్రం కర్ణం దాన్ని రెండు భాగాలుగా విభజించుటవల్ల రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు ఏర్పడతాయి. అందువల్ల ABC లంబకోణ త్రిభుజ వైశాల్యం

= $\frac{1}{2}$ × ABCD దీర్ఘచతురస్రం వైశాల్యం

= $\frac{1}{2}$ × పొడవు × వెడల్పు = $\frac{1}{2} \times BC \times AB$



(బొమ్మ-5.13)

అనగా లంబకోణ త్రిభుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × లంబకోణాన్ని తాకుతున్న రెండు భుజాల పొడవుల లబ్దం

ప్రయోగ ప్రశ్నావలి :-

ఉదాహరణ-1 : ఒక సమచతురస్రం వైశాల్యం 948.64 చ.డెకా.మీ. అయినచో దాని చుట్టూ కంచె వేయుటకు 1 మీటరుకి 40 రూ. చొప్పున ఎంత ఖర్చు అగును ?

సమాధానం : సమచతురస్ర వైశాల్యం = 948.64 చ.డెకా.మీ.

= 948.64 × 100 చ.మీ. = 94864 చ.మీ.

∴ సమచతురస్రం భుజం పొడవు = $\sqrt{94864}$ మీ. = 308 మీ.

∴ సమచతురస్రం చుట్టుకొలత = 4 × 308 మీ. = 1232 మీ.

ఒక మీటరు కంచె వేయుటకు ఖర్చు = 40 రూ.లు

1232 మీ. కంచె వేయుటకు ఖర్చు = (40×1232) రూ. = 49280 రూ.లు (జవాబు)

ఉదాహరణ-2 : ఒక దీర్ఘచతురస్రం పొడవు, వెడల్పునకు మూడు రెట్లు. దాని వైశాల్యం 711.48 చ.మీ. అయిన దాని పపొడవు ఎన్ని సె.మీ.లు

సమాధానం : 711.48 చ.మీ.=711.48x10000 చ.సె.మీ.=7114800 చ.సె.మీ.

దీర్ఘచతురస్రం వెడల్పు = x సె.మీ. అనుకుందాం (1 చ.మీ. =10000చ.సె.మీ.)

∴ పొడవు = 3a సె.మీ.

∴ దీర్ఘచతురస్రం వైశాల్యం = పొడవు (3a × a) వెడల్పు = $3a^2$ చ.సె.మీ.

ప్రశ్న ప్రకారం $3a^2 = 7114800$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{7114800}{3} = 2371600 \Rightarrow a = \sqrt{2371600} = 1540$$

∴ దీర్గచతురస్రం వెడల్పు =1540 సె.మీ. పొడవు = 3 × 1540 = 4620 సె.మీ. (జవాబు)

ఉదాహరణ-3 : 65 మీ. భుం గల ఒక సమచతురస్రకారపు తోట లోపల నాలుగు అంచులనుయిన తాకుతూ 2.5 మీ. వెడల్పు గల బాట వేయుటకు చ.మీ. 1కి 5 రూ. చొ.న ఎంత ఖర్చు అగును.

సమాధానం : ABCD ఒక సమచతురస్రకారపు తోట దాని లోపల అంచులననుయిన తాకుతూ చుట్టూ బాట గలదు. దాన్ని ప్రక్కన గల బొమ్మలో చూపించడమయ్యింది

(బొమ్మ 5.14)

EFGH ఒక సమచతురస్రం

EFGH సమచతురస్రం భుజం పొడవు = 65 – 2 × 2.5 మీ.

= (65 – 5) మీ. = 60మీ.

∴ రోడ్డు వైశాల్యం = ABCD సమచతురస్ర వైశాల్యం – EFGH సమచతురస్ర వైశాల్యం

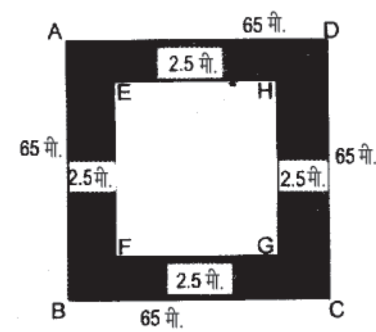
= (65 × 65 – 60 × 60) చ.మీ. = (4225 – 3600) చ.మీ

= 625 చ.మీ.

1 చ.మీ. రోడ్డు వేయుటకు ఖర్చు=5.00 రూ.లు

625 చ.మీ. వేయుటకు ఖర్చు = 625 × 5 రూ.

= 3125 రూ. (జవాబు)



(బబమ్మ-5.14)

అభ్యాసం - 5 (c)

1. ఒక సమచతురస్రం వైశాల్యం 900 చ.మీ. అయిన దాని చుట్టుకొలత ఎంత ?

2. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారపు గడ్డి మైదానం పొడవు వెడల్పునకు రెండు రెట్లు-దాని వైశాల్యం 800 చ.మీ. అయిన దాని పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనండి.

3. ఒక సమచతురస్రాకార స్థలం 139876 చ.మీ. దాని చుట్టు కంచె వేయుటకు ప్రతీ మీటరుకి 15 రూ. చొప్పున ఎంత ఖర్చు అగును.

4. ఒక సమచతురస్రాకారపు తోట భుజం పొడవులను దాని లోపల అంచులను తాకుతూ చుట్టూ 1 మీ. వెడల్పు గల బాట గలదు. అయిన (క) బాట వైశాల్యం ఎంత (ఖ) దాని బాగు చేయుటకు 1 చ.మీ. 1కి 240 చొ.న ఎంత ఖర్చు అగును ?

5. 5 మీ. $\times$ 3 మీ. కొలతలు గల ఇంటికి నేలపై టైల్సు అమర్చుటకై 60 సె.మీ $\times$ 5 సె.మీ. కొలతలు గల ఎన్ని టైల్సు అమర్చడమగును ?

6. రాము 20 మీ $\times$ 24 మీ. ఆకారంలో గల స్థలం కొనెను. శ్యామ్ 22 మీ $\times$ 22 మీ. ఆకారంలో గల స్థలం కొనెను. అయిన ఆ రెండు స్థలాల చుట్టుకొలతలు వైశాల్యంలో గల భేదాలు ఎంతో కనుగొనండి.

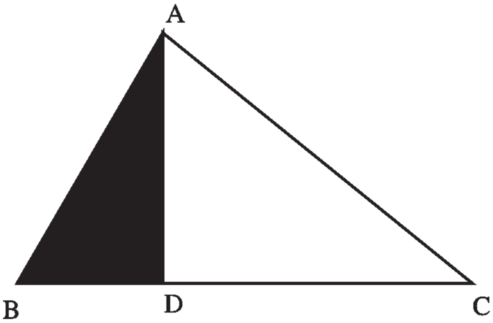
7. ఒక దీర్ఘచతురస్రం పొడవు 125 మీ., వెడల్పు 60 మీ. దాని లోపల పొడవు ఒక అంచునకు వెడల్పు రెండు అంచులకు తాకుతూ 2 మీటర్లు వెడల్పు గల బాట గలదు. అయిన మాట వైశాల్యం ఎంత ?

8. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారపు మైదానంలో 2 మీ. వెడల్పు గల బాటలు ఒక దానికి మరొకటి లంబకోణాకారం ఖండించుకొనుచున్నాయి. దీర్ఘచతురస్రం పొడవు 72 మీ. వెడల్పు 48 మీ. అయిన బాటల వైశాల్యం ఎంత ?

5.3 త్రిభుజ వైశాల్యం :-

(A) ఏదైనా ఒక త్రిభుజ వైశాల్యం కనుగొనుట :

లంబకోణ త్రిభుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times$ లంబకోణంను తాకియున్న భుజాల లబ్ధం శ్వీకృత సిద్ధాంతం-2ను వినియోగించుకోవచ్చును. ప్రక్కన గల ABC త్రిభుజ వైశాల్యం కనుగొనుటకై $\overline{AD}$ లంబం $\overline{BC}$ భూమిపై గీయవలెను. దాని వల్ల ఆ త్రిభుజం ADB, ADC అనే రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలుగా విభజింపబడును.



(బొమ్మ-5.15)

ABC వైశాల్యం $= \Delta ABD$ వైశాల్యం + ΔADC వైశాల్యం

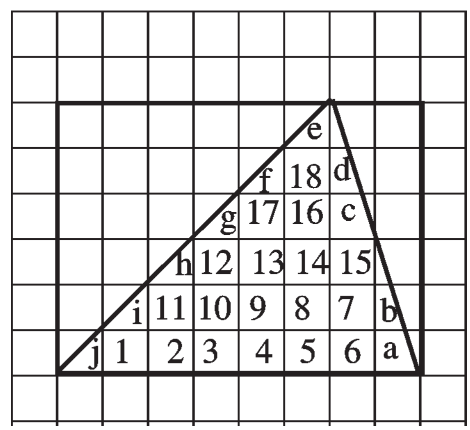
$$= \frac{1}{2} \times BD \times AD + \frac{1}{2} \times DC \times AD$$

$$= \frac{1}{2} \times (BD + DC) \times AD = \frac{1}{2} \times BD \times AD$$

$= \frac{1}{2} \times$ భూమి పొడవు $\times$ ఎత్తు

త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ భూమి $\times$ ఎత్తు
$\therefore$ భూమి = $\frac{2 \times \text{వైశాల్యం;}}{\text{ఎత్తు}}$ ఎత్తు $\frac{2 \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{భూమి}}$

మీరు చేయవలసిన పని :-



1. ఒక సమచతురస్రాకార లేక గ్రాఫ్ కాగితంపై ఒక త్రిభుజం నిర్మించండి. (గ్రాఫ్ కాగితంలోని ప్రతి చిన్న గది వైశాల్యం 1 చ.సె.మీ.)
2. త్రిభుజం అంతర్భాగంలో గల సంపూర్ణ చదరపు గదులను లెక్కించండి.
3. త్రిభుజంలోని సగం లేక సగానికి పైభాగం గల చదరపు గదులను లెక్కించండి.
4. 2,3 సోపానాలలోని గదుల సంఖ్య మొత్తం కనుగొనండి.
   (**షరా :** సగభాగం ఉన్న రెండు గదులను ఒక గదిగాను, సగానికి పైబడి ఉన్న గదిని ఒక పూర్ణ గదిగాను, తీసుకోవలెను) తరువాత త్రిభుజం అంతర్భాగంలోని చదరపు గదులను చదరపు యూనిట్లుగా తీసుకోవలెను.
5. త్రిభుజం యొక్క భూమి ఎత్తులను బొమ్మలో గుర్తించవలెను. వాటి లబ్దాలో సగాన్ని కనుగొనవలెను. దాన్ని చ. యూనిట్లలో తెలియజేయవలెను.
6. సోపానం 4,5 లో లభించిన జవాబులను బట్టి ఒక సిద్ధాంతం చేయవలెను.

సిద్ధాంతం : త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ భూమి పొడవు x ఎత్తు

7. త్రిభుజంలోని భూమి పొడవు, ఎత్తులను దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు, వెడల్పుగా తీసుకొని వైశాల్యం ఎంత అగునో చదరపు యూనిట్లలో తెలియజేయండి.
8. దీర్ఘచతురస్రం వైశాల్యానికి త్రిభుజం వైశాల్యానికి మధ్య ఎటువంటి సంబంధం గలదు ?

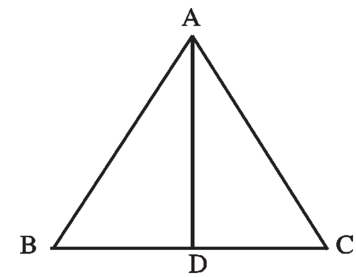
సంబంధం : దీర్ఘచతురస్రం వైశాల్యం = 2 $\times$ త్రిభుజ వైశాల్యం

షరా : (ఏదైనా ఒక సమతల క్షేత్ర వైశాల్యాన్ని ఇదే పద్ధతిలో కనుగొనవలెను)

(B) సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యం :

సమబాహు త్రిభుజం భూమి పొడవు a యూనిట్లు అయినచో దాని ఎత్తు

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$ a యూనిట్లు అగును.



(బొమ్మ-5.16)

ABC సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ భూమి పొడవు x ఎత్తు

$= \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ చ.యూనిట్లు

సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యం యూనిట్లు, భుజం పొడవు = $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ యూనిట్లు .... (1)

ఎత్తు ఇచ్చినపుడు, సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ (ఎత్తు)^2.........(2)

(2)లోని సూత్రాన్ని స్వయంగా చేసి రుజువు చేయండి.

(C) ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాలు తెలిసినచో వైశాల్యం కనుగొనుట :-

ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాల పొడవు వరుసగా a,b,c యూనిట్లు అయినచో, దాని చుట్టుకొలత

$2s = a + b + c \Longrightarrow s = \frac{a+b+c}{2}$ అనగా సగం చుట్టుకొలత $= \frac{a+b+c}{2}$

త్రిభుజ వైశాల్యం $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ చ. యూనిట్లు (CS =సగం చుట్టుకొలత)

ఇది హెరెన్స్ సూత్రం (Heren's Formula) గా పిలువబడుచున్నది. ఆర్యభట్‌కు కూడా ఈ సూత్రం తెలుసునని తెలియుచున్నది.

వైశాల్యంలో వాడుకలో ఉన్న యూనిట్లు		
పొడవు యూనిట్లు	**చదరమైనచో**	**వైశాల్య యూనిట్లు**
1 మీ.=10 డెసీ.మీ.	$\Rightarrow$ 1 చ.మీ	= 100 చ.డెసి.మీ.
1 మీ.=100 సె.మీ.	$\Rightarrow$ 1 చ.మీ.	= 10,000 చ.సె.మీ.
1 డెకామీ.=10మీ.	$\Rightarrow$ 1 చ.డెకా.మీ.	= 100 చ.మీ = 1 ఏమర్
1 హెక్టామీటర్=100మీ	$\Rightarrow$ 1 చ.హెక్టామీటర్లు	= 1 హెక్టారు =10,000 చ.మీ.

ప్రయోగ ప్రశ్నావళి :-

ఉదాహరణ-1 : ఒక త్రిభుజాకార స్థలం వైశాల్యం 54 ఏయర్లు. దాని భూమి పొడవు 27 మీ. అయిన ఎత్తు ఎంత ?

సమాధానం : త్రిభుజ వైశాల్యం=64 ఏయర్లు=5.4 ×100 చ.మీ. = 540చ.మీ. భూమి పొడవు 27 మీ.

$\therefore$ త్రిభుజం ఎత్తు = $\frac{2 \times \text{వైశాల్యం}}{\text{భూమి పొడవు}} = \frac{2 \times 540}{27} = 40$ మీ. (జవాబు)

ఉదాహరణ-2 : ABC లంబకోణ త్రిభుజంలో $\angle B$ లంబకోణం, AB=60 డెసి.మీ., BC=45 డెసి.మీ అయిన $\overline{AC}$ పై లంబం $\overline{BD}$ పొడవు ఎంత ?

సమాధానం : AB = 60 డెసీ.మీ., BC = 45 డెసీ.మీ.

$\therefore$ కర్ణం $\overline{AC}$ పొడవు $= \sqrt{60^2 + 45^2}$ డెసీ.మీ. $= \sqrt{15^2(4^2 + 3^2)}$ డెసీ.మీ.

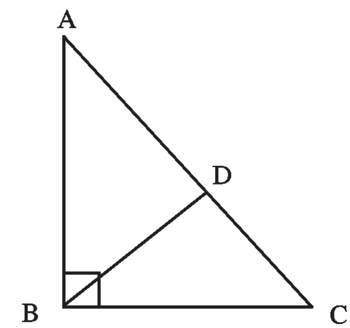
$= \sqrt{15^2 x 5^2}$ డెసీ.మీ.

$= \sqrt{15^2 x 5^2}$ = 75 డెసీ.మీ.

ΔABC వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times AB \times BD$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 60 \times 45 = \frac{1}{2} \times 75 \times BD$

$\Rightarrow BD = \frac{60 \times 45}{75} = 36$ డెసీ.మీ. (జవాబు)



(బొమ్మ-5.17)

ఉదాహరణ-3 : ఒక సమబాహు త్రిభుజంలో ఒక్కొక్క భుజం పొడవు 16 సెం.మీ. అయిన (i) దాని ఎత్తు ఎంత ? (ii) వైశాల్యం ఎంత ?

సమాధానం : (i) సమబాహు త్రిభుజం ఎత్తు = భుజం పొడవు $\times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ సెం.మీ. = $8\sqrt{3}$ సెం.మీ. (జవాబు)

(ii) సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యం = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times$ (భుజం పొడవు)^2

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 16^2$ చ.సె.మీ. = $64\sqrt{3}$ చ.సె.మీ. (జవాబు)

మరొక పద్ధతి : సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{\sqrt{3}} \times$ (ఎత్తు)2

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \times (8\sqrt{3})^2$ చ.సె.మీ = $\frac{64 \times 3}{\sqrt{3}}$ చ.సె.మీ. = $64\sqrt{3}$ చ.సె.మీ. (జవాబు)

ఉదాహఋణ-4 : ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాల పొడవులు వరుసగా 37 మీ., 41 మీ., 50 మీ. అయిన దాని పెద్ద భుజం నుండి ఎదురుగా ఉన్న కోణంనకు గీసిన లంబం పొడవు ఎంత ?

సమాధానం : త్రిభుజం మూడు భుజాల పొడవులు 39 మీ., 41 మీ., 50 మీ.

త్రిభుజ, యొక్క సగం చుట్టుకొలత= $S = \frac{39+41+50}{2}$ మీ. = $\frac{130}{2}$ మీ = 65 మీ.

త్రిభుజ వైశాల్యం $= \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$ చ.మీ

$= \sqrt{65(65-39)(65-41)(65-50)}$ చ.మీ

$= \sqrt{65 \times 26 \times 24 \times 15}$ చ.మీ

$= \sqrt{13 \times 5 \times 13 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}$ చ.మీ

$= 13 \times 5 \times 3 \times 2 \times 2 = 780$ చ.మీ.

త్రిభుజంలో పెద్ద భుజం పొడవు = 50 మీ.

ఎదురుగా ఉన్న కోణంనకు గీసిన లంబం పొడవు = r మీ. అనుకుందాం

$\therefore$ త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times 50 \times x$ చ.మీ.

ప్రశ్నను బట్టి = $= \frac{1}{2} \times 50 \times x = 780$

$\Rightarrow x = \frac{780 \times 2}{50}$ మీ. = 31.20 మీ.

లేక పెద్ద భుజం పై గీసిన లంబం = $\frac{2 \times \text{వైశాల్యం}}{\text{పెద్ద భుజం పొడవు}}$

$= \frac{780 \times 2}{50}$ = 31.20 మీటర్లు (జవాబు)

అభ్యాసం - 5 (d)

1. త్రిభుజం భుమి పొడవు 2.55 డెసీ.మీ. ఎత్తు 68 సె.మీ. అయిన వైశాల్యం ఎంత ?
2. ఒక త్రిభుజాకారంలో ఉన్న పార్కు ఒక భుజం పొడవు 288 మీ. ఆ భూమిపై నుండి ఎదురుగా ఉన్న కోణంనకు గీసిన లంబం పొడవు 115 మీ. అయిన దాని వైశాల్యం ఎంత ?
3. రెండు సమబాహు త్రిభుజాల భుజాల పొడవు ఇవ్వడమయ్యింది. వాటి వైశాల్యాలు కనుగొనండి.

   (i) $14\sqrt{2}$ సె.మీ. (ii) $8\sqrt{6}$ మీటర్లు
4. రెండు సమబాహు త్రిభుజాల ఎత్తు లివ్వడమయ్యింది. వాటి వైశాల్యాలు కనుగొనండి.

   (i)12 డెసీ.మీ. (ii) $36\sqrt{3}$ మీటర్లు
5. కింది సమద్విబాహు త్రిభుజాల వైశాల్యం కనుగొనండి.
   - (i) భూమి పొడవు 42 సె.మీ., సమాన భుజాల పొడవు 25 సె.మీ.
   - (ii) భూమి పొడవు 22 మీ., సమాన భుజాల పొడవు 61 మీ.
   - (iii) భూమి పొడవు x సె.మీ., సమాన భుజాల పొడవు y సె.మీ.
6. ΔABC లో $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ లు వరుసగా $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ లపై లంబాలు BC =30 సె.మీ, CA =35 సె.మీ. AD =25 సె.మీ. అయిన $\overline{BE}$ ఎంత ?
7. రెండు త్రిభుజాలలో ఒక దాని భూమి, ఎత్తులు రెండవ దాని భూమి ఎత్తులకు వరుసగా రెండు వంతులు, మూడు వంతులు. అయిన ఆ రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యం అనుపాతాన్ని కనుగొనండి ?

   త్రిభుజం భూమి r,2r ఎత్తు y, 2y గా తీసుకోవలెను)
8. ఒక లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజం కర్ణం పొడవు 120 డెసీ.మీ. అయిన దాని వైశాల్యం ఎంత ?

9. ఒక లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజం వైశాల్యం 484 చ.మీ. అయిన దాని కర్ణం పొడవు ఎంత ?

10. అన్ని త్రిభుజ భుజాల పొడవులు ఇవ్వబడినవి. వాటి వైశాల్యాలు కనుగొనండి.

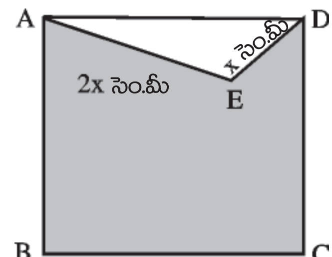
 (i) 13 సెం.మీ., 14 సెం.మీ., 15 సెం.మీ.

 (ii) 25 సెం.మీ., 26 సెం.మీ., 17 సెం.మీ.

 (iii) 39 మీ., 42 మీ., 45 మీ.

11. ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాల పొడవు 10 సెం.మీ., 17 సెం.మీ., 21 సెం.మీ., అయిన త్రిభుజ వైశాల్యం ఎంత ? త్రిభుజంలోని పొడవైన భుజం పై నుండి ఎదురుగా ఉన్న కోణంనకు గీసిన లంబం పొడవు ఎంత ?

12. ప్రక్కన గల ABCD ఒక సమచతురస్రం. AED లంబకోణ త్రిభుజంలో $\overline{AE}$ భుజం పొడవు 2x సెం.మీ., $\overline{ED}$ భుజం పొడవు x సెం.మీ. AED త్రిభుజ వైశాల్యం 16 చసె.మీ. అయిన ABCDEA వైశాల్యం ఎంత ?



(బొమ్మ-5.18)

13. ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో లంబకోణంను తాకియున్న ఒక భుజం పొడవు 44 మీ. మిగిలిన రెండు భుజాల మొత్తం 88 మీ. అయిన దాని వైశాల్యం ఎంత ?

14. ఒక లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజంలో పెద్ద భుజం పొడవు 56 సెం.మీ. ఆ భుజంపై లంబకోణం శీర్షబిందువునకు గీసిన లంబం పొడవు ఎంత ?

15) ఒక లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజంలో లంబకోణాన్ని, తాకియున్న ఒక భుజం పొడవు 96 సె.మీ., అయిన లంబకోణ శీర్షబిందువు నుండి కర్ణంపై గీసిన లంబం పొడవు కనుగొనండి.

5.4 సమాంతర చతుర్భుజం, రోంబస్ వైశాల్యం :-

క) సమాంతర చతుర్భుజం :-

ఒక చతుర్భుజంలోని ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరమైనచో దాని ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అందురు.

సమాంతర చతుర్భుజానికి సంబంధించిన కొన్ని ధర్మాలు కింద నీయడమయ్యింది. అవసరాన్ని అనుసరించి వాటిని వినియోగించుకొవలెను.

ఏదైనా ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో

 (i) ఎదురెదురు భుజాల పొడవులు సమానం.

 (ii) అభిముఖ (ఎదురెదురు) కోణాల పరిమాణం సమానం.

(iii) రెండు కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొనును.

(iv) ప్రతీ కర్ణంపై ఎదురుగా ఉన్న రెండు కోణాలను గీసిన లంబాల పొడవులు పరస్పరం సమానం.

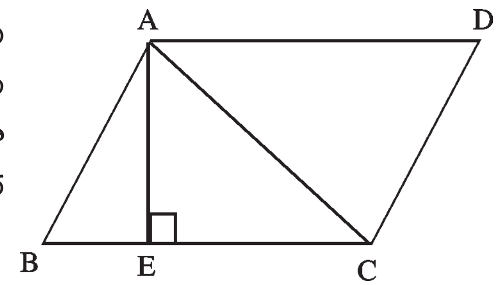
(v) ప్రతీ కర్ణం సమాంతర చతుర్భుజాన్ని సమాన వైశాల్యం గల రెండు త్రిభుజాలు ఏర్పడును.

(vi) రెండు కర్ణాల ద్వారా నాలుగు సమాన వైశాల్యం గల త్రిభుజాలు ఏర్పడును.

(vii) దీర్ఘచతురస్రం, సమచతురస్రం, రోంబస్ కూడా ఒక్కొక్క సమాంతర చతుర్భుజమగును. అందుచేత పై ధర్మాలన్నీ వాటికి కూడా వర్తించును.

సమమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనుట :-

సమాంతర చతుర్భుజంలో ఒక కర్ణం నిర్మించినచో అది సమాన వైశాల్యం గల రెండు త్రిభుజాలుగా విభజింపబడును. రెండు కర్ణాలు నిర్మించినచో నాలుగు సమాన వైశాల్యం గల త్రిభుజాలుగా మారును. ఒక త్రిభుజ వైశాల్యం కనుగొనుట ద్వారా సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనవచ్చును.



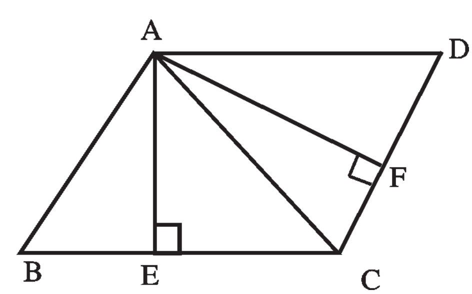
(బొమ్మ-5.19)

సమాంతర రేఖల మధ్య దూరాన్ని లేక లంబం పొడవుని దాని ఎత్తు అందురు. బొమ్మ 5.19లో $\overline{BC}$ భూమిపై $\overline{AE}$ లంబం. $\overline{AE}$ పొడవు AE ని సమాంతర చతుర్భుజ ఎత్తు అందురు.

సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనే విధానాన్ని పరిశీలించండి.

(A) ఒక భుజం పొడవు, ఆ భుజంపై గల ఎత్తు తెలిసినచో సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనుట :-

ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో A బిందువు నుండి $\overline{BC}$ పై లంబం $\overline{AE}$ ని నిర్మించండి. $\overline{AC}$ కర్ణం నిర్మించండి. ఇప్పుడు ABCD సమాంతర చతుర్భుజం $\overline{AC}$ కర్ణం ద్వారా సమాన వైశాల్యం గల రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించబడుతుంది.



(బొమ్మ-5.20)

Δ ABC వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times BC \times AE$

$\therefore$ ABCD సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం

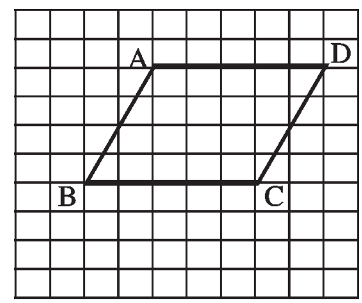
$= 2 \times \Delta$ ABC వైశాల్యం

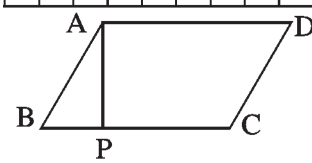
$= 2 \times \frac{1}{2} \times BC \times AE = BC \times AE$

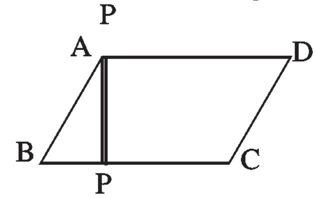
అదే విధంగా A బిందువు నుండి $\overline{DC}$ పై లంబం $\overline{AF}$ ను నిర్మించినచో ABCD సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం = DC x AF

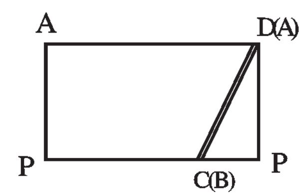
అనగా సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం=ఒక భుజం పొడవు ఆ భుజంపై గీసిన ఎత్తు

మీరు చేయవలసిన పని :









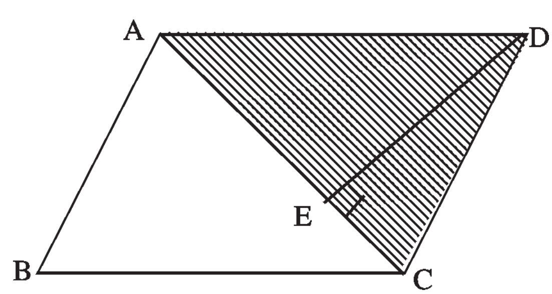
1. ఒక గ్రాఫ్ కాగితం తీసుకొని దానిపై ఒక సమాంతర చతుర్భుజం నిర్మించండి. తరువాత సమాంతర చతుర్భుజం ఉన్న భాగాన్ని కాగితం నుండి వేరు చేస్తు కత్తిరించండి.
2. కాగితాన్ని మడతపెట్టి $\overline{BC}$ పై P బిందువును నిర్మించండి. $\overline{AP}$, $\overline{BC}$ పై లంబం అగును.
3. $\overline{AP}$ అంచు మీదుగా కాగితంను కత్తిరించండి. అది ABCD నుండి వేరౌతుంది.
4. ABP త్రిభుజ భాగాన్ని ABCD నుండి తొలగించిన తరువాత ABP త్రిభుజాకార భాగాన్ని ABCD తో కలపండి. (బొమ్మలో చూపిన విధంగా) జిగురుతో దాన్ని కలపండి. దాని వల్ల $\overline{DC}$ అంచు $\overline{AB}$ అంచుతో కతిరించవలెను.
5. ఇప్పుడు ఏర్పడిన దీర్ఘచతురస్రం వైశాల్యం ABCD ....
6. .... కలిపి చూడండి. ఏం తెలుసుకున్నారు ?

(B) ఒక కర్ణం పొడవు, దానికి ఎదురుగా ఉన్న ఏదైనా ఒక బిందువు నుండి దానిపై గీసిన లంబం పొడవు తెలిసినచో సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనుట:-

ప్రక్కన గల ABCD సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కర్ణం $\overline{AC}$, D బిందువు నుండి దానిపై నిర్మించిన $\overline{DE}$ పొడవు ఇచ్చినచో ABCD సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం

$= 2 \times \Delta$ ACD వైశాల్యం

$= 2 \times \frac{1}{2} \times AC \times DE = AC \times DE$

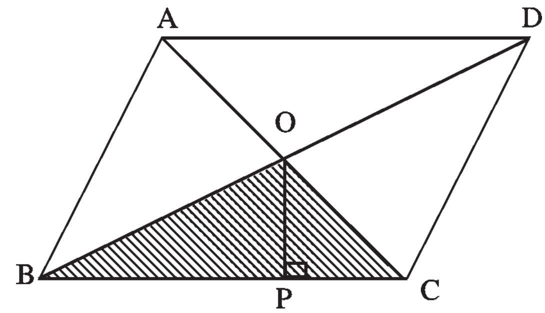


(బొమ్మ-5.21)

అనగా **సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = ఒక కర్ణం పొడవు × ఆ కర్ణంపై దానికి ఎదురుగా ఉండే ఒక బిందువు నుండి గీసిన లంబం పొడవు.**

(C) ఒక భుజాన్ని, రెండు కర్ణాల ఖండన బిందువు నుండి ఆ భుజంపై గీసిన లంబం పొడవు తెలిసినచో సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనుట :-

ప్రక్కన గల బొమ్మ ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో $\overline{BC}$ భూమి, ఆ భుజంపై రెండు కర్ణాల ఖండన బిందువు 'O' నుండి గీసిన లంబం $\overline{OP}$ ల పొడవులు ఇవ్వడమయ్యింది.



(బొమ్మ-5.22)

ABCD సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం

$= 4 \times \Delta$ ODC వైశాల్యం

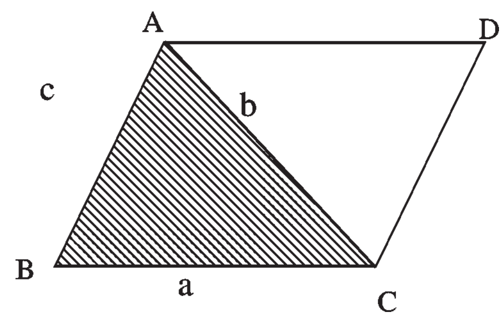
(∴ రెండు కర్ణాలు పరస్పరం ఖండించుకొనుట వల్ల సమాంతర చతుర్భుజం సమాన వైశాల్యం గల నాలుగు త్రిభుజాలుగా విభజన అవుతుంది.)

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times BC \times OP = 2 \times BC \times OP$$

∴ సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం =2 x ఒక భుజం పొడవు x రెండు కర్ణాల ఖండన బిందువు నుండి ఎదురుగా ఉన్న భుజంపై గీసిన లంబం పొడవు.

(D) రెండు సన్నిహిత భుజాలు, ఒక కర్ణం పొడవు తెలిసినచో సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనుట ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో

AC = b యూనిట్లు, BC = a యూనిట్లు, AB = C యూనిట్లు అయినచో



(బొమ్మ-5.23)

∴ ABC Δ యొక్క సగం చుట్టుకొలత S అయినచో

$s = \frac{a+b+c}{2}$ యూనిట్లు అగును.

∴ ABC Δ యొక్క వైశాల్యం యూనిట్లు

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ యూనిట్లు

ABCD సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం $= 2 \times \Delta$ ABC వైశాల్యం

$= 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ చ.యూనిట్లు

అనగా సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = $2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

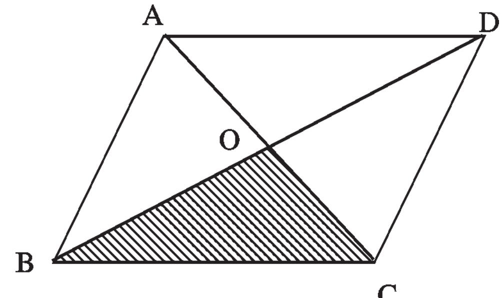
ఇచ్చట సమాంతర చతుర్భుజంలోని రెండు సన్నిహిత భుజాల పొడవు a యూనిట్లు కర్ణం పొడవు b యూనిట్లు అయినచో $s = \frac{a+b+c}{2}$ అగును.

(E) రెండు కర్ణాలు, ఒక భుజం పొడవు తెలిసినచో, సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనుట:-

ABCD సమాంతర చతురస్రం యొక్క BC, AC, BD ఇవ్వడమయ్యింది. $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ కర్ణాలు రెండు 'O' బిందువు వద్ద.

ఖండించుకొనును. ΔABC లో $OB=\frac{BD}{2}$, $CO=\frac{AC}{2}$ BC ఇవ్వడమయ్యింది.

ఇప్పుడు ΔOBC యొక్క మూడు భుజాల పొడవులు తెలియుటవల్ల $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ సూత్రం ప్రయోగించి వైశాల్యం కనుగొనవచ్చును.



(బొమ్మ-5.24)

ABCD సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = 4 × ΔOBC యొక్క వైశాల్యం

ఉదాహరణ-1 : ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో భూమి 25 సె.మీ. భూమిపై గీసిన లంబం పొడవు 12 సె.మీ. అయిన సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనండి.

సమాధానం : సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం=భూమిxఎత్తు = (25x12) చ.మీ.=300 చ.సె.మీ. (జవాబు)

ఉదాహరణ-2 : ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో ఒక కర్ణం పొడవు 75 సె.మీ. కర్ణంనకు ఒక ప్రక్కన గల కోణం నుండి కర్ణంపై గీసిన లంబం పొడవు 12 సె.మీ. అయిన సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనండి.

సమాధానం : సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం=కర్ణం పొడవుxకర్ణంపై గీసిన లంబం పొడవు

= 75 సె.మీ.x12 సె.మీ. = 900 చ.సె.మీ. (జవాబు)

ఉదాహరణ-3 : ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో ఒక భుజం పొడవు 25 సె.మీ. రెండు కర్ణాలు ఖండించుకున్న ఖండన బిందువు నుండి ఆ భుజంపై గీసిన లంబం పొడవు 4.5 సె.మీ. అయిన సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం కనుగొనండి.

సమాధానం : బొమ్మ 5.25లో ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో రెండు కర్ణాల ఖండన బిందువు 'O' నుండి $\overline{BC}$ భుజంపై గీసిన లంబం $\overline{OE}$ యొక్క పొడవు = 4.5 సె.మీ., BC = 25 సె.మీ.

ΔABC వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times BC \times OE$

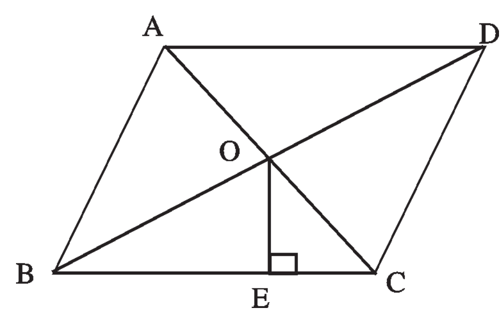
= $\frac{1}{2} \times 25 \times 4.5$ సె.మీ. = $\frac{112.5}{2}$ చ.సె.మీ.

$\therefore$ ABCD సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం

= $4 \times \Delta$ OBC వైశాల్యం

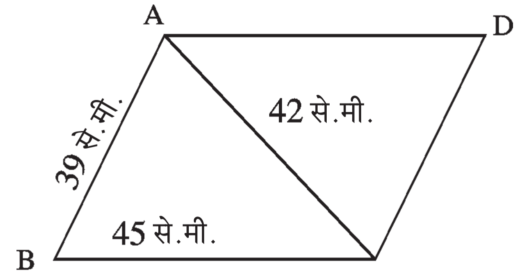
= $4 \times \frac{112.5}{2}$ చ.సె.మీ.

= 225 చ.సె.మీ. (జవాబు)



(బొమ్మ-5.25)

ఉదాహరణ-4 :



(आकृति-5.27)

ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలోని రెండు సన్నిహిత భుజాల పొడవులు 39 సె.మీ., 45 సె.మీ. అందులో ఒక కర్ణం పొడవు 42 సె.మీ. అయిన సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం ఎంత ?

సమాధానం : ఇచ్చిన సమాంతర చతుర్భుజంలో, BC=a =45 సె.మీ.

AC=b =42 సె.మీ., AB=c =39 సె.మీ.

ΔABC యొక్క సగం చుట్టుకొలత

$= s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{45+42+39}{2}$ సె.మీ. = 63 సె.మీ.

Δ ABC వైశాల్యం=

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{63(63-45)(63-42)(63-39}$ చ.సె.మీ.

$= \sqrt{63\times 18\times 21\times 24}$ చ.సె.మీ.

$= \sqrt{21\times 3\times 3\times 6\times 21\times 6\times 2\times 2}$ చ.సె.మీ.

= 21 × 3 × 6 × 2 = 756 చ.సె.మీ.

ABCD సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం = 2 × Δ ABC వైశాల్యం

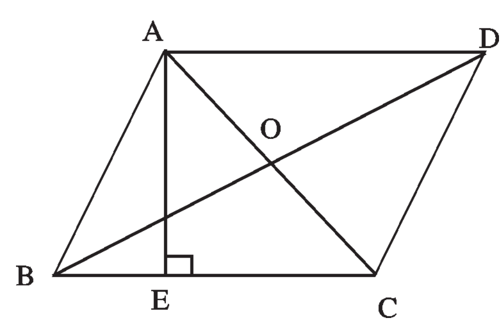
$= 2\times 756$ చ.సె.మీ. = 1512 చ.సె.మీ. (జవాబు)

ఉదాహరణ-5 :- ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో రెండు కర్ణాలు పొడవులు వరుసగా 34 సె.మీ., 78 సె.మీ., ఒక భుజం పొడవు 44 సె.మీ. అయిన దాని ఎదురెదురు భుజాల మధ్య గల లంబం పొడవు ఎంత ?

సమాధానం :- ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో BC =44 సె.మీ., BD =78 సె.మీ., AC =34 సె.మీ. $\overline{AC}, \overline{BD}$ ల ఖండన బిందువు 'O' అగును.

$\therefore$ OB $= \dfrac{BD}{2} = \dfrac{1}{2} \times 78$ సె.మీ. = 39 సె.మీ.

OC $= \dfrac{AC}{2} = \dfrac{1}{2} \times 34$ సె.మీ. = 17 సె.మీ.



(आकृति-5.27)

ΔABC యొక్క సగం చుట్టుకొలత

$= s = \dfrac{39+44+17}{2}$ సె.మీ.

$= \dfrac{100}{2}$ సె.మీ. = 50 సె.మీ.

Δ OBC వైశాల్యం $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{50(50-39)(50-44)(50-47)}$ చ.సె.మీ.

$= \sqrt{50 \times 11 \times 6 \times 3}$ చ.సె.మీ

$= \sqrt{5 \times 5 \times 2 \times 11 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11}$ చ.సె.మీ.

$= 5 \times 2 \times 11 \times 3 = 330$ చ.సె.మీ.

$\therefore$ ABCD సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం $= 4 \times \Delta$OBC వైశాల్యం

$= 4 \times 330$ చ.సె.మీ. $=1320$ చ.సె.మీ.

$\overline{AE}$ లంబం పొడవు = $\dfrac{\text{సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం}}{\text{భూమి } \overline{BC} \text{ పొడవు}} = \dfrac{1320}{44}$ సె.మీ. $= 30$ సె.మీ (జవాబు)

అభ్యాసం - 5 (e)

1. కింది కొలతలు గల సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనండి.
   (i) ఒక భుజం పొడవు 4 డెసీ.మీ, ఆ భుజంపై నిర్మించిన ఎత్తు 1 డెసీ.మీ. 8 సె.మీ.
   (ii) ఒక భుజం పొడవు 2 మీ. 55 సె.మీ., ఆ భుజంపై నిర్మించిన ఎత్తు 1 మీ. 4 సె.మీ.
   (iiii) ఒక కర్ణం పొడవు 12 మీ. దానికి ఒక ప్రక్కన గల ఒక కోణం శీర్షబిందువు నుండి కర్ణంపై నిర్మించిన లంబం పొడవు 4 మీ.
2. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలోని రెండు సన్నిహిత భుజాలు, ఒక కర్ణం పొడవు వరుసగా 26 మీ., 28 మీ., 30 మీ. అయిన దాని వైశాల్యం ఎంత ?
3. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో రెండు కర్ణాల పొడవులు204 సె.మీ., 252 సె.మీ ఒక భుజం పొడవు 60 సెం.మీ. అయిన దాని వైశాల్యం ఎంత ?
4. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలోని రెండు కర్ణాల పొడవు క్రమంగా 34 సె.మీ., 50 సె.మీ. ఒక భుజం పొడవు 26 మీ. అయిన ఆ భూమిపై ఎదురుగా ఉన్న భుజం నుండి గీసిన లంబం పొడవు ఎంత ?
5. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో రెండు సన్నిహిత భుజాలు, ఒక కర్ణం పొడవులు వరుసగా 20 సె.మీ., 42 సె.మీ., 34 సె.మీ. అయిన అందులో పెద్ద భుజం పై నిర్మించిన ఎత్తును కనుగొనండి.

2. రోంబస్ :

నిర్వచనం : ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలోని రెండు సన్నిహిత భుజాల పరస్పరం సమానమైనచో దాన్ని రొంబస్ (Rhombus) అందురు.

రోంబస్‌ను గూర్చి కొన్ని విషయాలు :

(i) రోంబస్ ఒక స్వతంత్రమైన చతుర్భుజం (అన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలు రొంబస్ కావు)

(ii) దీని నాలుగు భుజాలు పొడవులు సమానం.

(iii) దీని కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకొనును.

(iv) ప్రతీ రోంబస్‌లోని రెండు కర్ణాల పరస్పరం ఖండించుకొనుటవల్ల నాలుగు లంబకోణ త్రిభుజాలు ఏర్పడును. కొన్ని త్రిభుజాలు వైశాల్యం సమానంగా ఉండును.

(v) ప్రతీ కర్ణం రెండు ఎదురెదురు కోణాలను సమద్విఖండన చేయును.

(vi) రోంబస్‌లోని రెండు జతల సమాంతర భుజాల మధ్య దూరం (లంబం లేక ఎత్తు) పరస్పరం సమానం.

రోంబస్ వైశాల్యం :

(A) రెండు కర్ణాలు తెలిసినచో రోంబస్ వైశాల్యం కనుగొనుట :-

ABCD రోంబస్‌లో ల పొడవులు ఇవ్వడమయ్యింది. రోంబస్‌లోని రెండు కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకొనునని మనకు తెలుసు. బొమ్మ 5.28 లో AO = CO, BO = DO $\overline{BO} \perp \overline{AC}$ और $\overline{DO} \perp \overline{AC}$

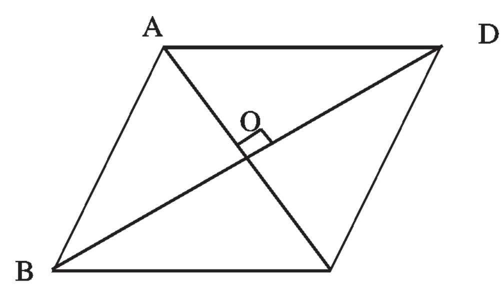
ABCD రోంబస్ వైశాల్యం

= 2 × ΔABC వైశాల్యం

$= 2 \times \frac{1}{2} \times AC \times BO$

$= AC \times BO$

$= AC \times \frac{BD}{2} = \frac{1}{2}\ (AC \times BD)$



(బబమ్మ-5.28)

కర్ణాల రెండింటిలో ఒక దాని పొడవు d, రెండువ దాని పొడవు d_2 అనుకున్నచో రోంబస్ వైశాల్యం = $= \frac{1}{2} d_1 d_2$

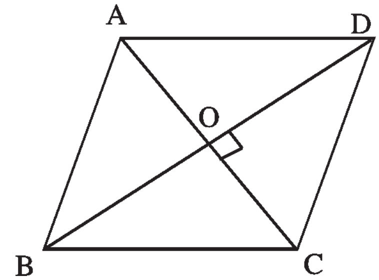
అనగా (రోంబస్ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × రెండు కర్ణాల పొడవుల లబ్దం)

షరా : 1) రోంబస్ ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అగుటవల్ల సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్య సూత్రాలన్ని రోంబస్ వైశాల్యం కనుగొనుటకు ఉపయోగపడతాయి.

(B) రోంబస్ రెండు కర్ణాల పొడవులు తెలిసినచో భుజం పొడవు కనుగొనుట :-

ABCD రోంబస్‌లో రెండు కర్ణాలు $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ లు పరస్పరం 'O' బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును.

$AC=d_1$ (మొదటి కర్ణం) $BD=d_2$ (రెండవ కర్ణం) అనుకుందాం.



(బొమ్మ-5.29)

$$CO = \frac{d_1}{2}, \; BD = \frac{d_2}{2}$$

$\therefore$ BOC లంబకోణ త్రిభుజంలో

$$BC = \sqrt{CO^2 + BO^2} = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$$

అనగా రోంబస్ ఒక భుజం పొడవు = $\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$

(రోంబస్ ఒక భుజం పొడవు = $\frac{1}{2}\sqrt{(\text{మొదటి కర్ణం పొడవు})^2+(\text{రెండవ కర్ణం పొడవు})^2}$

షరా : (2) రోంబస్‌లోని రెండు కర్ణాలు, ఒక భుజం మధ్య ఏ రెండు కొలతలు తెలిసినా మూడవ దాని కనుగొన వచ్చును.

ప్రశ్నావళి :

ఉదాహరణ-1 :-

ఒక రోంబస్‌లో రెండు కర్ణాల పొడవులు వరుసగా 16 సె.మీ., 12 సె.మీ. అయినచో దాని వైశాల్యం, భుజం పొడవు, ఎత్తును కనుగొనండి.

సమాధానం : రోంబస్ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × రెండు కర్ణాల లబ్ధం

$= \frac{1}{2} \times 16 \times 12$ చ.సె.మీ. = 96 చ.సె.మీ.

రోంబస్ యొక్క ప్రతీ భుజం పొడవు=

రోంబస్ వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + 12^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{4^2(4^2 + 3^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 5^2}$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$ సె.మీ.

వైశాల్యం= $\frac{\text{సె.మీ.}}{\text{భుజం పొడవు}} = \frac{96}{10}$ సె.మీ. = 9.6 సె.మీ. (జవాబు)

ఉదాహరణ-2 :-

ఒక రోంబస్‌లో ప్రతీ భుజం పొడవు 13 మీటర్లు, ఒక కర్ణం పొడవు 24 మీ. అయిన రెండవ కర్ణం పొడవు, వైశాల్యం కనుగొనండి.

సమాధానం :-

రోంబస్ మొదటి కర్ణం (d_1) = 24 మీ.

రెండవ కర్ణం $(d_2)=2x$ మీ అనుకుందాం

రోంబస్ భుజం పొడవు $= \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{24}{2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{2}\right)^2} = \sqrt{(12)^2 + (x)^2}$

$\Rightarrow$ (భుజం పొడవు)^2 $= (12)^2 + (x)^2 \Rightarrow (13)^2 = (12)^2 + (x)^2$

$\Rightarrow 169 = 144 + x^2 \Rightarrow 144 + x^2 = 169$

$\Rightarrow x^2 = 169 - 144 = 25 \quad \therefore x = 5$ మీ.

రెండవ కర్ణం పొడవు = 2 x 5 మీ. = 10 మీ.

రోంబస్ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ రెండు కర్ణాల లబ్దం

$= \frac{1}{2} \times 24 \times 10 = 120$ చ.మీ. (జవాబు)

అభ్యాసం - 5(f)

1. రోంబస్ యొక్క రెండు కర్ణాల పొడవులు దిగువున ఇవ్వడమయ్యింది. అయిన వాటి వైశాల్యం కనుగొనండి.
(i) 16 సె.మీ; 20 సె.మీ. (ii) 20 మీ; 15.4 మీ. (iii) $8\sqrt{2}$ మీ; $4\sqrt{2}$ మీ.
2. రోంబస్ యొక్క కర్ణాల పొడవులు ఇవ్వడమయ్యింది. వాటి భుజాలను కనుగొనండి.
(i) 40 సె.మీ; 30 సె.మీ. (ii) 14 మీ; 48 మీ. (iii) 1.6 సె.మీ; 3 సె.మీ (iv) 1.8 మీ; 2.4 మీ.
3. ఒక రోంబస్ వైశాల్యం 840 చ.మీ. దాని ఒక కర్ణం పొడవు 42 మీ. అయిన రెండవ కర్ణం పొడవు, చుట్టుకొలత కనుగొనండి.
4. ఒక రోంబస్‌లో ఒక కర్ణం పొడవు రెండవ కర్ణం పొడవుకు 3 రెట్లు. దాని వైశాల్యం 1944 చ.మీ. అయిన రెండు కర్ణాల పొడవును కనుగొనండి.
5. ఒక రోంబస్ వైశాల్యం $684\sqrt{3}$ చ.సె.మీ. దాని ఒక కోణం పరిమాణం 60^0 అయిన దాని చిన్న కర్ణం పొడవు ఎంత ?
6. రోంబస్ నందు ఒక కర్ణం పొడవు దాని ప్రతీ భుజం పొడవుతో సమానం. దాని చుట్టుకొలత 48 సె.మీ. అయిన వైశాల్యం ఎంత ?
7. ఒక రోంబస్ చుట్టుకొలత 16 మీ. దాని ఒక కర్ణం 6 మీ. అయిన రెండవ కర్ణం, వైశాల్యం కనుగొనుట.

5.5. ట్రెపీజీయం (Trapezium) :

నిర్వచనం : ఒక చతుర్భుజంలోని ఒక జత ఎదురెదురు భుజాలు పరస్పరం సమాంతరమైనచో దాన్ని ట్రెపీజీయం అందురు. (రెండవ జత భుజాలు అసమంతరం)

ట్రెపీజీయం ధర్మాలు :

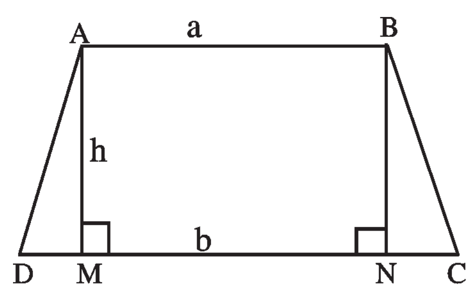
ట్రెపీజీయం అసమాంతర భూజల మధ్య బిందువును కలుపు రేఖఖండం, సమాంతర భుజాల రెండింటికి సమాంతరం. దాని పొడవు సమాంతర భుజాల మొత్తం పొడవులో సగంతో సమానం. (రుజువు తరువాత తరగతిలో తెలుసుకుందాం)

ఒక జత ఎదురెదురు భుజాలు గల చతుర్భుజం ట్రెపీజీయం అగును. ట్రెపీజీయం ఆకృతి వైశాల్యంను క్లుప్తంగా ట్రెపీజీయం వైశాల్యం అందుము.

ప్రక్కన గల ABCD చతుర్భుజంలో $\overline{AB}, \overline{DC}$ లు పరస్పరం సమాంతరాలు. అందుచేత ఇది ఒక ట్రెపీజీయం అగును.

AB = a యూనిట్లు,, DC=b యూనిట్లు అనుకుందాం.

$\overline{AM}, \overline{BN}$ లు వరుసగా A, B బిందువులు నుండి $\overline{DC}$ పై లంబాలు $\overline{AM}, \overline{BN}$ ల పొడవులు సమానం. ఆ రెండు ట్రెపీజీయం యొక్క ఎత్తు (n) అగును.



(బొమ్మ-5.30)

ట్రెపీజీయం వైశాల్యం :-

ABCD ట్రెపీజీయం వైశాల్యం =

= Δ AMD వైశాల్యం + Δ BNC వైశాల్యం + AMNB దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం

$= \frac{1}{2} \times DM \times AM + \frac{1}{2} \times CN \times BN + MN \times AM.$

$= \frac{1}{2} DM \times h + \frac{1}{2} CN \times h + MN \times h$ ($\because$ AM = BN = h యూనిట్లు)

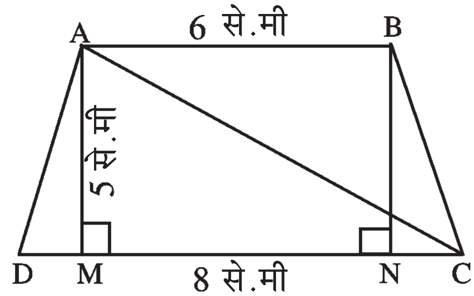
$= \frac{1}{2} h (DM + NC + 2MN) = \frac{1}{2} h (DM + MN + NC + MN)$

$= \frac{1}{2} h (DC + MN) = \frac{1}{2} (DC + AB \times h)$ ($\because$ MN = AB)

$= \frac{1}{2} (AB + DC) \times h = \frac{1}{2} (a + b) \times h$ యూనిట్లు

(ట్రెపీజీయం వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times$ సమాంతర భుజాల మొత్తం పొడవు $\times$ ఎత్తు (లేక) సమాంతర భుజాల మధ్య బిందువులను కలువు రేఖ ఖండం పొడవు $\times$ ఎత్తు)

స్వయంగా చేయండి.

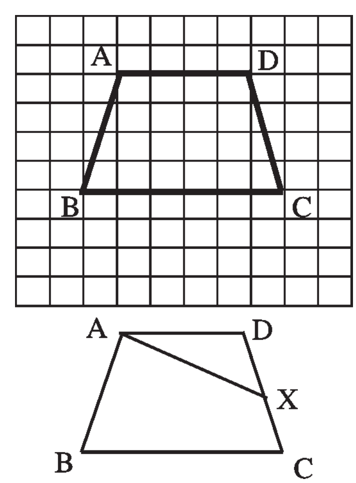


(బొమ్మ-5.31)

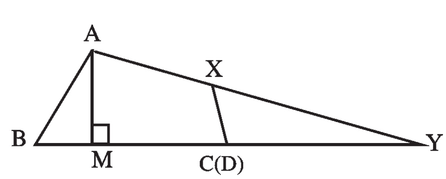
1. ఇచ్చిన చతుర్భుజంలో $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $AM \perp DC$ మరియు $BN \perp DC$
   (i) Δ ADC వైశాల్యం ఎంత ?
   (ii) Δ ABC వైశాల్యం ఎంత ?
   (iii) ABCD చతుర్భుజం వైశాల్యం ఎంత ?
   (iv) Δ ADM, ΔBNC రెండింటి వైశాల్యం మొత్తం ఎంత ?
   (v) AMNB దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం ఎంత ?
   (vi) సోపానం (iv) (v) లలో కనుగొన్న జవాబు నుండి చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనండి.
   (vii) సోపానం (iii) (vi) లందు లభించిన జవాబు కలిపిన ఏమగును ?

2. పైన గల బొమ్మ (5.31)లో
   (i) $\overline{AD}$ కి సమాంతరంగా $\overline{BL}$ ను గీయండి. అది $\overline{DC}$ ని L బిందువు వద్ద ఖండించవలెను.
   (ii) ఏర్పడ్డ ABLD సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం ఎంత ?
   (iii) ఏర్పడ్డ ΔLBC వైశాల్యం ఎంత ?
   (iv) ఏర్పడ్డ ABCD ట్రెపీజీయం వైశాల్యం ఎంత ?

(మీరు చేయవలసిన పని)



1. ఒక గ్రాఫ్ కాగితం పై ఒక ట్రెపీజీయంను నిర్మించండి. తరగతి ట్రెపీజీయంను గ్రాఫ్ కాగితం నుండి కత్తిరించి వేరు చేయండి.
2. ట్రెపీజీయం కాగితాన్ని మడత పెట్టి $\overline{DC}$ మధ్య బిందువును 'x' అనుకోయండి.
3. $\overline{AX}$ అంచు ద్వారా ట్రెపీజీయంను కత్తిరించి రెండు భాగాలు చేయండి. Δ ADX ను కింది బొమ్మలో చూపిన విధంగా ఉంచండి. $\overline{XD}$ అంచు $\overline{CX}$ అంచును తాకుతూ ఉండవలెను.



4. ఏర్పడ్డ ABY త్రిభుజ వైశాల్యం ఇచ్చిన ABCD ట్రెపీజీయం వైశాల్యంతో సమాంతర అంచా ? అయినచో ఎందుచేత ?
5. సోపానం (1) నుండి గ్రాఫ్ కాగితంలో నిర్మించిన ట్రెపీజీయం వైశాల్యం కనుగొనండి. తరువాత సోపానం (4) నందు గల వైశాల్యంతో కలపండి. ఏమౌతుందో చూడండి.

ఉదాహరణ-1 : ఒక ట్రెపీజీయంలో రెండు సమాంతర భుజాల పొడవులు 50 సె.మీ., 38 సె.మీ. ఎత్తు 15 సె.మీ. అయిన దాని వైశాల్యం ఎంత ?

సమాధానం :- సమాంతర భుజాల పొడవు a =50 సె.మీ., b =38 సె.మీ. ఎత్తు (h)=15 సె.మీ.

$\therefore$ ట్రెపీజీయం వైశాల్యం $=\frac{1}{2}(a+b)\times h$

$=\frac{1}{2}(50+38)\times 15$ చ.సె.మీ. = 600 చ.సె.మీ. (జవాబు)

ఉదాహరణ-2 : ఒక ట్రెపీజీయం వైశాల్యం 810 చ.సె.మీ. సమాంతర భుజాల పొడవులు 37 మీ, 17 మీ. అయిన దాని ఎత్తు ఎంత ?

సమాధానం : ఇచ్చట a =37 మీ., b =17 మీ., ఎత్తు = h చ.మీ. అయిన

ట్రెపీజీయం వైశాల్యం $=\frac{1}{2}(a+b)\times h$ చ.సె.మీ.

$=\frac{1}{2}(37+17)\times h=810, \Longrightarrow \frac{1}{2}(54)\,h=810,$

$\Longrightarrow 27h=810, \Longrightarrow h=\frac{810}{27}=30=$ చ.మీ.

$\therefore$ ఎత్తు = 30 మీటర్లు

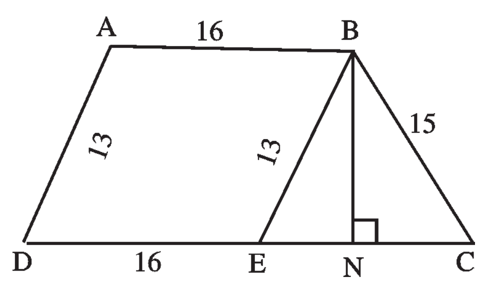
ఉదాహరణ-3 : ఒక ట్రెపీజీయం వైశాల్యం 48 చ.మీ. అసమాంతర భుజాల మధ్య బిందువులను కలిపిన రేఖాఖండం మొడవు 12 మీ. అయిన ట్రెపీజీయం ఎత్తు ఎంత ?

సమాధానం : అసమాంతర భుజాల మధ్య బిందువులను కలపిని రేఖఖండం x ఎత్తు

ట్రెపీజీయం వైశాల్యం = $=12\times h=48, \Longrightarrow h=\frac{48}{12}=4$ మీ

$\therefore$ ఎత్తు = 4 మీటర్లు (జవాబు)

ఉదాహరణ-4 : ఒక ట్రెపీజీయంలో సమాంతర భుజాల పొడవులు 16 మీ. 30 మీ. అసమాంతర భుజాల పొడవులు 13 మీ., 15 మీ. అయిన దాని వైశాల్యం ఎంత ?



(బొమ్మ-5.32)

సమాధానం : ABCD ట్రెపీజీయంలో $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$

AB =16 మీ, DC = 30 మీ.

BC =15 మీ., AD =13 మీ., $\overline{BE}\parallel\overline{AD}$ (నిర్మాణం)

ఇప్పుడు ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం

$\Longrightarrow$ BE = AD = 13 మీ; Dt = AB = 16 మీ, EC= DC - Dt = (30-16) మీ = 14 మీ.

Δ BEC యొక్క సగం చుట్టుకొలత = $S=\frac{15+14+13}{2}$ సె.మీ = 21 మీ

ΔBCC వైశాల్యం $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)}$ చ.సె.మీ.

$=\sqrt{21\times 6\times 7\times 8}$ చ.సె.మీ. = 84 చ.సె.మీ.

ΔBEC ఎత్తు BN = $\dfrac{2 \times \text{వైశాల్యం}}{\text{భూమి పొడవు}} = \dfrac{2\times 84}{14}$ మీ = 12 మీ.

భూమి పొడవు

$\therefore$ ABCD ట్రెపీజీయం ఎత్తు = BN =12 మీ.

$\therefore$ ABCD ట్రెపీజీయం వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ (AB + DC) BN = $\frac{1}{2}$ $(16 + 30) \times 12$ = 12 చ.మీ.

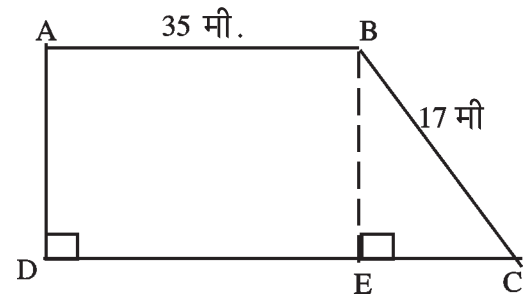
$$= \frac{1}{2}\times 46 \times 12 \text{ చ.మీ.} = 276 \text{ చ.మీ.}$$ (జవాబు)

ఉదాహరణ-5 : ఒక ట్రెపీజీయంలో సమాంతర భుజాల పొడవులు 30 మీ., 50 మీ. దాని అసమాంతర భుజాలలో ఒకటి సమాంతర భుజాలపై లంబం కాగా మరొక దాని పొడవు 17 మీ. అయిన ట్రెపీజీయం వైశాల్యం కనుగొనండి.

సమాధానం :

ABCD ట్రెపీజీయంలో $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AD} \perp \overline{DC}$

$\overline{BE} \perp \overline{DC}$ నిర్మించవలెను. ABCD ఒక దీర్ఘ చతురస్రం, DE = AB = 35 మీ. EC = DC – DE = (50 – 35) = 15 మీ.



(బొమ్మ-5.33)

BEC లంబకోణ త్రిభుజంలో మీ.

BE = $\sqrt{BC^2 - EC^2} = \sqrt{17^2 - 15^2}$

= $\sqrt{(17+15)(17-15)} = \sqrt{32\times 2} = 8$ మీ.

$\therefore$ ట్రెపీజీయం ఎత్తు = h = 8 మీ.

a = 35 మీ., b =50 మీ. (సమాంతర భుజాల పొడవులు)

ట్రెపీజీయం వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$(a + b)h = (35 + 50) × 8 చ.మీ.

= $\frac{1}{2}$ × 85 × 8 చ.మీ. = 340 చ.మీ. (జవాబు)

అభ్యాసం-5(g)

1. కింది కొలతలను బట్టి ట్రెపీజీయం వైశాల్యం కనుగొనండి.

   (i) రెండు సమాంతర భుజాల మొడవులు 25 మీ., 45 మీ., ఎత్తు=18 మీ.

   (ii) అసమాంతర భుజాల మధ్య బిందువులను కలుపు రేఖాఖండం పొడవు 27 మీ. సమాంతర భుజాల మధ్య దూరం 16 మీటర్లు.

   (iii) సమాంతర భుజాల మొత్తం పొడవు 75 సె.మీ. ట్రెపీజీయం ఎత్తు = 24 సె.మీ.

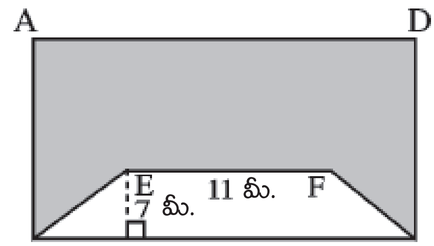
2. ఒక ట్రెపీజియం వైశాల్యం 150 చ.మీ. ఎత్తు 5 మీ. దాని సమాంతర భుజాల పొడవుల మధ్య భేదం 6 మీ. అయిన ఒక్కొక్క సమాంతర భుజం పొడవు ఎంత ?

3. ఒక ట్రెపీజియం వైశాల్యం 3840 చ.మీ. దాని ఎత్తు 48 మీ. దాని అసమాంతర భుజాల మధ్య బిందువులు రెండింటిని కలుపుతూ గీసిన రేఖాఖండం పొడవును కనుగొనండి.

4. ఒక ట్రెపీజియంలోని సమాంతర భుజాల పొడవులు 41 సె.మీ., 57 సె.మీ. దాని అసమాంతర భుజాలలో ఒకటి సమాంతర భుజాల లంబం మరొక దాని పొడవు 20 సె.మీ. అయిన దాని వైశాల్యం ఎంత ?

5. ఒక ట్రెపీజియం సమాంతర భుజాల పొడవులు 24 మీ., 80 మీ. దాని అసమాంతర భుజాలలో ఒక్కొక్క దాని పొడవు 30 మీ. అయిన దాని వైశాల్యం ఎంత ?

6. ప్రక్కన గల బొమ్మలో ABCD ఒక దీర్ఘ చతురస్రం $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$, $\overline{EK} \perp \overline{BC}$, AD = 15 మీ. EK = 7 మీ., EF = 11 మీ. దానిలో నాడ గల భాగం వైశాల్యం 80 చ.మీ. అయినచో $\overline{AB}$ ని కనుగొనవలెను.

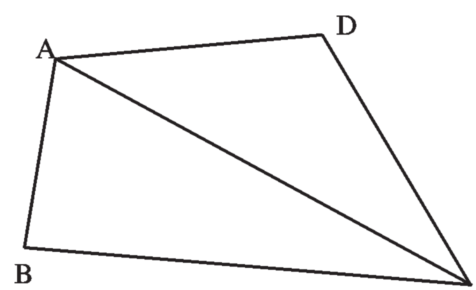


(బొమ్మ-5.34)

5.6. చతుర్భుజ వైశాల్యం :-

సాధారణ చతుర్భుజ వైశాల్యానికి ఎటువంటి ప్రత్యేకమైన సూత్రం లేదు. ఒక చతుర్భుజంలోని కర్ణం ద్వారా ఏర్పడి రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యం మొత్తమే ఆ చతుర్భుజం వైశాల్యంతో సమానమౌతుంది.

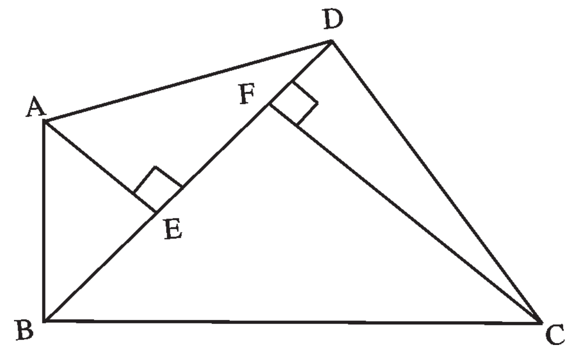
ప్రక్కన గల ABCD చతుర్భుజంలో $\overline{AC}$ కర్ణం వల్ల ΔABC, ΔADC రెండు త్రిభుజాలు ఏర్పడ్డాయి. ఆ రెండు త్రిభుజాల మొత్తం వైశాల్యం ఆ చతుర్భుజం వైశాల్యమగును.



(బొమ్మ-5.35)

(A) ఒక కర్ణం పొడవు, ఆ కర్ణంపై ఎదురుగా ఉన్న కోణంనకు గీసిన లంబం పొడవు తెలిసినచో చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనుట :-

ABCD చతుర్భుజంలో $\overline{BD}$ కర్ణంపై ఎదురుగా ఉన్న కోణం యొక్క A బిందువు నుండి, C బిందువు నుండి గీసిన లంబాలు వరుసగా $\overline{AE}$, $\overline{CF}$ లు



(బొమ్మ-5.36)

$\therefore$ ABCD చతుర్భుజ వైశాల్యం

= ΔABD వైశాల్యం + ΔBCD వైశాల్యం

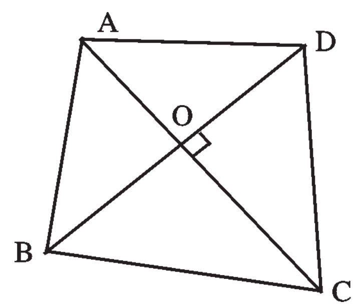
$= \frac{1}{2} \times BD \times AE + \frac{1}{2} \times BD \times CF$

$= \frac{1}{2}\ BD\ (AE + CF)$

అనగా (చతుర్భుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ $\times$ ఒక కర్ణం పొడవు $\times$ ఆ కర్ణం ఎదురుగా ఉన్న కోణాలు శీర్షబిందువులకు గీసిన లంబాల పొడవుల మొత్తం)

(B) పరస్పరం లంబమయ్యే రెండు కర్ణాల కొలతలు తెలిసినచో చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనుట:-

బొమ్మ 5.37లో గల చతుర్భుజం ABCD లో కర్ణాలు $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ లు పరస్పరం 10^0 బిందువు వద్ద ఖండించుకొన్నవి.



(బొమ్మ-5.37)

చతుర్భుజం ABCD వైశాల్యం = ΔABC వైశాల్యం + ΔADC వైశాల్యం

$= \frac{1}{2} \times AC \times BO + \frac{1}{2} \times AC \times DO$

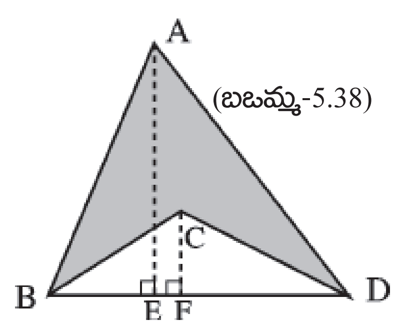
$= \frac{1}{2} AC\ (BO + DO) = \frac{1}{2} AC \times BD$

అనగా (కర్ణాలు రెండు పరస్పరం లంబమైనచో చతుర్భుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ $\times$ రెండు కర్ణాల లబ్దం)

(C) ఒక ప్రత్యేకమైన చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనుట :-

బొమ్మ 5.38లో గల చతుర్భుజం యొక్క కర్ణం $\overline{BD}$ యొక్క ఏ భాగం కూడా చతుర్భుజం అంతర్భాగమందు లేదు. అందుచేత రెండు కోణాలు పరస్పరం ఖండించుకోలేవు. బొమ్మను బట్టి చూడగా ABCD చతుర్భుజ వైశాల్యం వైశాల్యంΔABD, ΔBCD భేదం అగును.

A,C బిందువుల నుండి $\overline{BD}$ పైగల లంబాలు వరుసగా $\overline{AE}$, $\overline{CF}$ లు.



(బొమ్మ-5.38)

ABCD చతుర్భుజం వైశాల్యం = Δ ABD వైశాల్యం – Δ BCD వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2} \times BD \times AE - \frac{1}{2} \times BD \times CF$$

$$= \frac{1}{2} \times BD\ (AE - CF)$$

అనగా (చతుర్భుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ $\times$ బాహ్యా కర్ణం పొడవు $\times$ ఆ కర్ణంపై ఎదురుగా ఉన్న కోణ బిందువుల నుండి గీసిన రెండు లంబాల పొడవుల భేదం)

ప్రశ్నావళి :-

ఉదాహరణ-1 : ఒక చతుర్భుజం యొక్క కర్ణం పొడవు 12 మీ., ఆ కర్ణంపై బాహ్యా కోణాల నుండి గీసిన లంబాల పొడవులు 6 మీ., 7 మీ. అయిన చతుర్భుజ వైశాల్యం ఎంత ?

సమాధానం : చతుర్భుజ వైశాల్యం $=\frac{1}{2}\times$ కర్ణం పొడవు $\times$ లంబాల పొడవుల

$= \frac{1}{2} \times 6\ (6 + 7) = 6 \times 13\ = 78$ మొత్తం

ఉదాహరణ-2 : రెండు కర్ణాల పరస్పరం ఖండించుకొని ఒక చతుర్భుజం యొక్క బాహ్యా కర్ణం పొడవు 35 సె.మీ. ఆ కర్ణంపై దాని కెదురుగా ఉన్న కోణముల నుండి గీసిన రెండు లంబాల పొడవులు 18 సె.మీ., 8 సె.మీ. అయిన చతుర్భుజం వైశాల్యం ఎంత ?

సమాధానం : చతుర్భుజం యొక్క ఒక కర్ణం బాహ్యా కర్ణమైనచో దాని

వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\times$బాహ్యాకోణ పొడవు x దాని పై గీంసిన లంబాలు పొడవు

$= \frac{1}{2} \times 35 \times (18 - 8)\ = \frac{1}{2}\times 35 \times 10 = 175$ భేదం

ఉదాహరణ-3 : ఒక చతుర్భుజంలో ఒక కర్ణం పొడవు 75 సె.మీ. దాని వైశాల్యం 900 చ.సె.మీ. దాని కర్ణంపై ఎదురుగా ఉన్న కోణాల నుండి గీసిన రెండు లంబాలతో ఒక దాని పొడవు మరొక దానికి 3 వంతులు. అయిన ఆ రెండు లంబాలు పొడవులు కనుగొనండి.

సమాధానం : చిన్న లంబం పొడవు = x సె.మీ. అనుకుందాం

$\therefore$ పెద్ద లంబం పొడవు = $3x$ సె.మీ.

ఇచ్చిన కర్ణం పొడవు = 75 సె.మీ.

$\therefore$ చతుర్భుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ $\times$ కర్ణం పొడవు $\times$ కర్ణం పైగల రెండు లంబాల పొడవుల మొత్తం

$= \frac{1}{2} \times 75 \times (x + 3x)$ చ.సె.మీ.

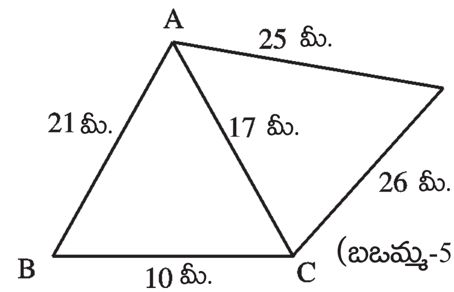
$= \frac{1}{2} \times 75 \times 4x$ చ.సె.మీ $= 150x$ చ.సె.మీ.

ప్రశ్న ప్రకారం, $150x = 900, \Longrightarrow x = \frac{900}{150} = 6$

$\therefore$ ఒక లంబం పొడవు = 6 సె.మీ.

రెండవ లంబం పొడవు = 6 x 3 సె.మీ., 15 సె.మీ. (జవాబు)

ఉదాహరణ-4 :-



(బొమ్మ-5.39)

ABCD చతుర్భుజంలో $\overline{AC}$ కర్ణం పొడవు = 17 మీ.

AB = 21 మీ., BC =10 మీ., CD = 26 మీ., DA =25 మీ. అయిన చతుర్భుజం వైశాల్యం కనుగొనండి.

సమాధానం : ΔABC యొక్క సగం చుట్టుకొలత

$= s = \frac{10+17+21}{2}$ మమీ.=24 మీ.

ΔABC వైశాల్యం $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{(24(24-10)(24-17)(24-21)}$ చ.మీ.

$= \sqrt{24\times14\times7\times3}$ చ.మీ. $= \sqrt{3\times4\times2\times2\times7\times7\times3}$ చ.మీ.

$= (3 \times 2 \times 2 \times 7)$ చ.మీ. $= 84$ చ.మీ.

ΔACD యొక్క సగం చుట్టుకొలత$= s = \frac{17+25+26}{2}$ मी. $= 34$ చ.మీ.

ΔACD వైశాల్యం $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{34(34-17)(34-25)(34-26)}$ చ.మీ.

$= \sqrt{34\times17\times9\times8}$ व.मी. $= \sqrt{17\times2\times17\times3\times3\times2\times2\times2}$ చ.మీ.

$= (17 \times 2 \times 3 \times 2)$ व.मी. $= 240$ చ.మీ.

$\therefore$ చతుర్భుజంలో వైశాల్యం Δ ABC వైశాల్యం + Δ ACD వైశాల్యం

$= 80 + 204 = 288$ చ.మీ. (జవాబు)

ఉదాహరణ-5 : ఒక చతుర్భుజంలోని రెండు కర్ణాల పొడవులు 36 డెసి.మీ., 21 డెసి.మీ. రెండు కర్ణాల పరస్పరం లంబకోణంలో ఖండించుకొనును. అయిన చతుర్భుజ వైశాల్యం ఎంత ?

సమాధానం : రెండు కర్ణాల పరస్పరం లంబకోణంలో ఖండించుకొనును.

$\therefore$ చతుర్భుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ రెండు కర్ణాల లబ్ధం

$= \frac{1}{2} \times 36 \times 21$ చ.డెసి.మీ.

=378 చ.డెసి.మీ. (జవాబు)

అభ్యాసం-5 (h)

1. ఒక చతుర్భుజంలో ఒక కర్ణం పొడవు 78 సె.మీ. దానిపై ఎదురుగా ఉన్న కోణాల నుండి గీసిన లంబాల పొడవులు 23 సె.మీ., 42 సె.మీ. అయిన చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనండి.

2. కర్ణాలు పరస్పరం ఖండించుకొని ఒక చతుర్భుజం బాహ్య కర్ణం పొడవు 43 సె.మీ. అ కర్ణంపై ఎదురుగా ఉన్న రెండు కోణాల నుండి గీసిన లంబాల పొడవులు 19 సె.మీ., 9 సె.మీ. అయిన చతుర్భుజం వైశాల్యం కనుగొనండి.

3. ఒక చతుర్భుజంలో రెండు కర్ణాల పరస్పరం లంబకోణంలో ఖండించుకొనును. ఆ రెండు కర్ణాల పొడవులు 40 డెసి.మీ., 45 డెసి.మీ. అయిన చతుర్భుజ వైశాల్యమెంత ?

4. ఒక చతుర్భుజంలోని రెండు కర్ణాల పొడవుల మొత్తం 50 మీ. వాటి అంతర్గత కోణాలు లంబకోణాలు. ఒక కర్ణం పొడవు మరొక కర్ణం పొడవునకు 4 రెట్లు. అయిన చతుర్భుజం వైశాల్యం కనుగొనండి.

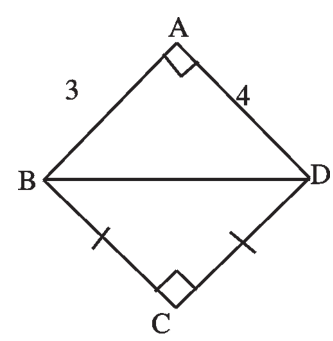
5. ఒక చతుర్భుజంలో భుజాల పొడవుల 16 సె.మీ., 30 సె.మీ., 50 సె.మీ., 52 సె.మీ. మొదటి రెండు భుజాల అంతర్గత కోణం లంబకోణం. అయిన చతుర్భుజం వైశాల్యం కనుగొనండి.

6. ఒక చతుర్భుజంలో ఒక కోణం లంబకోణం. లంబకోణాన్ని తాకియున్న రెండు భుజాల పొడవులు 12 మీ., 16 మీ. చతుర్భుజంలోని మిగిలిన ఒక్కొక్క భుజాల పొడవు 26 మీ. అయిన దాని వైశాల్యం ఎంత ?

7. ABCD చతుర్భుజంలో AB =75 సె.మీ., BC =78 సె.మీ., CD =63 సె.మీ., DA =30 సె.మీ., AC =51 సె.మీ. అయిన చతుర్భుజ వైశాల్యం ఎంత ?

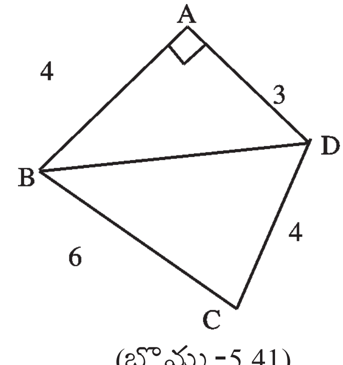
8. ABCD చతుర్భుజంలో AB =21 సె.మీ., BC =16 సె.మీ., AD =20 సె.మీ. $m\angle BAD = m\angle CBD = 90^\circ$ అయిన చతుర్భుజం వైశాల్యం ఎంత ?

9. బొమ్మ 5.40లో ABCD ఒక చతుర్భుజం. BC=CD అయినచో $\overline{BC}, \overline{CD}$ ల పొడవు, ABCD చతుర్భుజం వైశాల్యం కనుగొనండి.



(బొమ్మ -5.40)

10. బొమ్మ 5.41లో $\angle BAD$ ఒక లంబకోణం AB = 4 సె.మీ., AD =3 సె.మీ., DC =4 సె.మీ., BC =6 సె.మీ. అయినచో ABCD చతుర్భుజం వైశాల్యం ఎంత ?



(బొమ్మ -5.41)

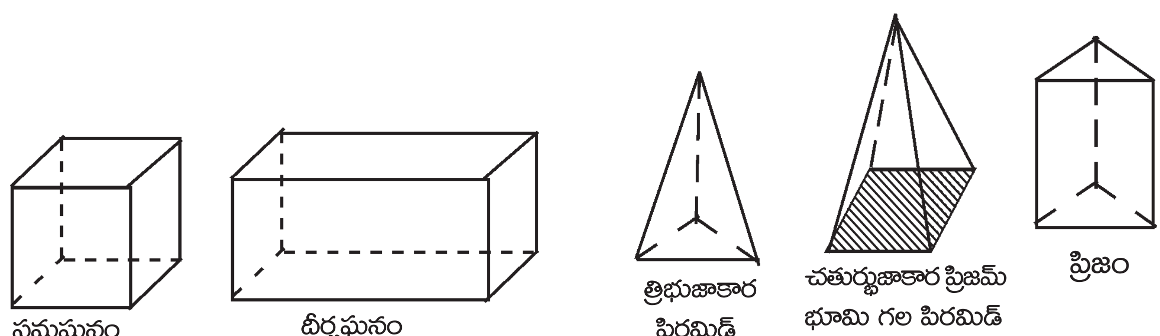
5.7 ఘన పదార్థాలు - వాటి ఆకృతులు (Solid and its shape)

క్రింది తరగతిలో మీరు త్రిభుజం, దీర్ఘచతురస్రం, సమాంతర చతుర్భుజం, వృత్తం మొదలైన వాటిని గూర్చి తెలుసుకున్నారు. వీటిని సంబంధించిన చాలా విషయాలు తెలుసుకున్నారు. ఈ చిత్రాలు ఒక సమతలంపై నిర్మించబడతాయి. అందుచేత ఆ సమతల చిత్రాలను 2.D లేక ద్వి-మాత్రిక (Two-Dimentional) ఆకృతి చిత్రాలు అందురు. మరొక ప్రక్క సమఘనం, దీర్ఘఘనం, ప్రిజమణ, సిలెండర్, కోన్, గోళం మొదలైన ఒక సమతలంలో ఉండవు. అనగా వీటిని ఒక సమతలంలో ఉండినచో దాని ఒక ప్రక్కను లేక దానిలో కొంత భాగాన్ని మాత్రమే సమతలంలో ఉండి మిగిలిన భాగం లేక ప్రక్కల సమతలానికి వెలుపల అండును. ఈ వస్తువును త్రిమాత్రికలు లేక 3-D ఆకృతి వస్తువులు అందురు. ఈ వస్తువులు ఘన పదార్థాలు (Solid) అందురు.

వచ్చే పేరాలలో త్రి-మాత్రిక వస్తువులు లేక ఘన పదార్థాల చిత్రాలు ఒక సమతలంలో నిర్మించి ఘన వస్తువుల శీర్ష అంచు, పార్శ్వలకు సంబంధించి తెలుసుకుంటారు. ఘన వస్తువుల (హమతల పార్శ్వం గలవి) శీర్షం, అంచు పార్శ్వముల సంఖ్యను తీసుకొని యులర్ సూత్రం వాస్తవాన్ని ఎలా తెలుసుకోవలసిన అవసరం ఉన్నది.

5.8 బహు ఫలకం (Polyhedron)

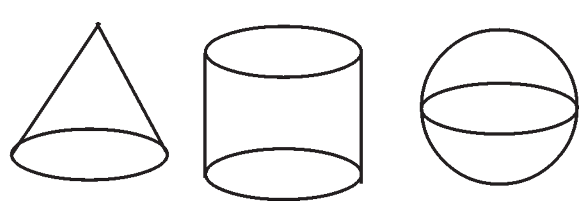
ఇవన్ని త్రి-మాత్రిక (ఘన) వస్తువులు చిత్రాలు. వీటిని పరిశీలించినచో ప్రతిది కొన్ని బహుభుజాకార సమతలాలు ద్వారా ఏర్పడినవి. వాటిని మనం ఘన వస్తువుల యొక్క ఒక్కొక్క పార్శ్వం (Face) అని అంటాం. రెండు పార్శ్వములు



(బొమ్మ-5.42)

కలిసి ఒక్కొక్క రేఖా ఖండం ఏర్పడుతుంది. ఆ రేఖా ఖండాలను ఘన వస్తువుల అంచు (Edge) లు అందురు. తిరిగి రెండు లేక అంతకంటె అధిక అంచులు కలిసి ఘన పదార్థాల శీర్షం (Vertex) ఏర్పడుతుంది. ఇటువంటి ఘనపు వస్తువులను ఒక్కొక్క బహుఫలకం (Polyhedron) అందురు. కాని కింది ఘనపు వస్తువుల బొమ్మలను పరిశీలిస్తే ఇవి ఒక్కొక్కటి సమతల, వక్రతలములు గల ఘనపు వస్తువులని తెలుస్తున్నది.

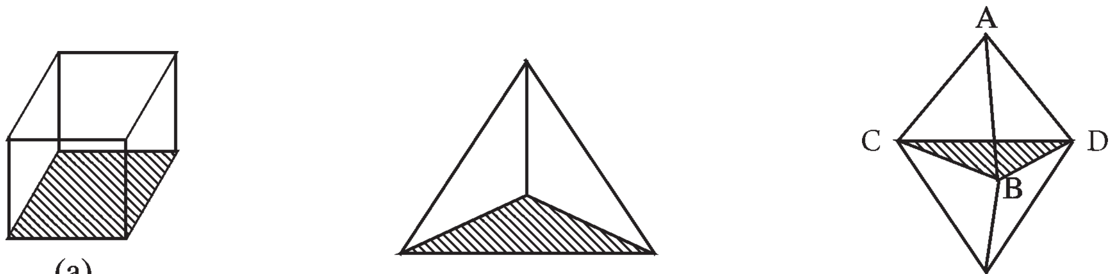
ఈ ఘనపు వస్తువులన్నింటికి పార్శ్వ సమతలాలు లేవు. అందుచేతనే వీటిని బహుపురకాలు అని అందురు.


(బొమ్మ-5.43)

5.8.1. క్రమ బాహు ఫలకాలు (Regular Polyherons)

ఒక బహుఫలకం పార్శ్వాలు క్రమ బహుభుజి ద్వారా ఏర్పడి సమాన సంఖ్య గల పార్శ్వాలు కలయిక వల్ల ఘన పదార్థాల శీర్షాలు ఏర్పడినచో అటువంటి బహుఫలకాన్ని క్రమ బహు ఫలకం అందురు.

ఉదాహరణకు సమఘనం, టెట్రాహెడ్రన్ త్రిభుజాకార పిరామిడ్ అందులో ప్రతీ పార్శ్వ సమబాహు త్రిభుజం మొదలైన ఒక్కొక్క క్రమ బహుఫలకం అగును.



(a) (b) (బొమ్మ-5.44) (c)

బొమ్మ 5.44 (క) (ఖ)లో ఘన పదార్థాల అన్ని పార్శ్వములు క్రమ బహుభుజి, సమాన సంఖ్యలోని పార్శ్వములు కలిసి ఒక్కొక్క హీర్షం ఏర్పడుతుంది.

బొమ్మ 5.44 (గ)లో గల ఘన పదార్థాల అన్ని పార్శ్వాలు క్రమ బహు భుజలు కాని A శీర్షం మూడు పార్శ్వములు కలిగియుండునో శీర్షం ఏర్పడగా, నాలుగు పార్శ్వముల కలయికతో B శీర్షం ఏర్పడింది.

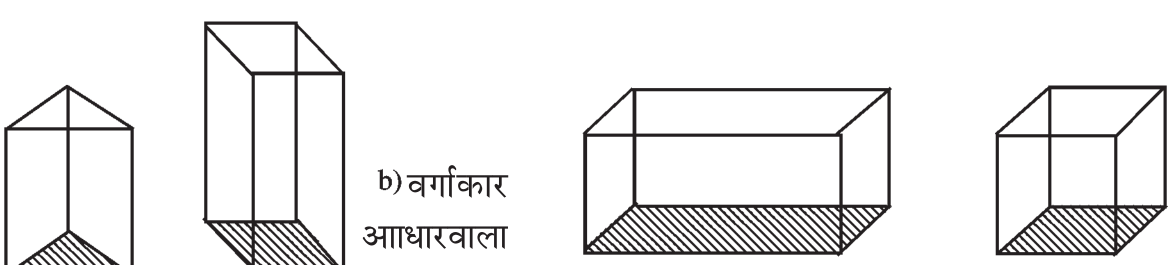
5.8.2 బహు ఫలకాలలో రకాలు :

పైన మనం పేర్కొన్న ఘనపు వస్తువులతో కొన్ని సమతల ఉపరితలాలు గలవి కాగా మరికొన్ని సమతల, వక్రతల ఉఫరితలాలు గలవి. ఇప్పుడు ఘనపు వస్తువులను రెండు రకాలుగా విభజింపవచ్చును. అవి క) బహుఫలకాలు ఖ) బహుఫలకాలు కానివి.

ఒక ఘనపు వస్తువు యొక్క పార్శ్వములు ఒక్కొక్క బహుభుజిలో ఏర్పడినచో దాన్ని బహుఫలకమని అలా కాని వాటిని బహుఫలకాలు కానివి అని అందురు. మరొక విధంగా చెప్పాలంటే బహుఫలకాలు కాని ఘనపు వస్తువులు అన్ని పార్శ్వములు సమతల ఉపరితలములలు కలివికాదు. ఉదాహరణకు కోన్, సిలిండర్, గోళకం ఇటువంటివి. బహుఫలకాలు భూమి, పార్శ్వ తలాలు భేదాన్ని బట్టి ముఖ్యంగా రెండు రకాలుగా విభజింపవచ్చును. అవి 1) ప్రిజం 2) పిరామిడ్

1. ప్రిజిమ్ (Prism)

ప్రిజిమ్ ఒక బహుఫలకం. దీని భూమి, పైపార్శ్వతలం సర్వసమానాలు. (సమాన వైశాల్యం గాని) బహుభుజి ఇతర పార్శ్వాలు సమాంతరాలు.



(a) ప్రిజం

b) वर्गाकार आधारवाला प्रिज्म

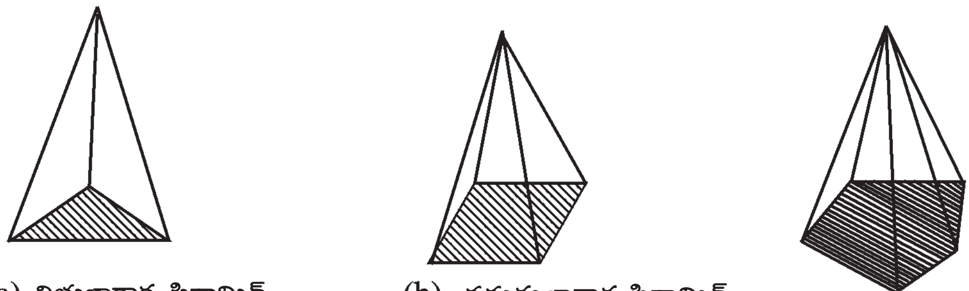
(c) त्रिभुजाकार प्रिज्म

(d) घन प्रिज्म (घनाभ)

సమాంతరాలు. ప్రిజిమ్ భూమి లేక ఆధారం త్రిభుజాకారంలో, చతుర్భుజాకారంలో, పచభుజాకారంలో ఉండును. ఆధారాన్ని బట్టి ప్రిజిమ్ పేరు ఉంటుంది.

2. పిరామిడ్ (Pyramid) :-

పిరామిడ్ జూక బహుఫలకం. దీని భూమి ఒక బహుభుజి పార్శ్వతలాలు. త్రిభుజాకారంలో ఉండి. ఒక సాధారణ శీర్షం (Vertex) ఉండును.



(a) త్రిభుజాకార పిరామిడ్ (b) చతుర్భుజాకార పిరామిడ్ (c) పంచభుజాకార ప్రిజిమ్

బ౨మ్మ-5.45)

ఙర్తుంచుకోయండి : ఒక ప్రిజిమ్ లేక పిరామిడ్ యొక్క పేరు దాని భూమిని ఆధారం చేసుకొని యుండును.

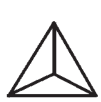
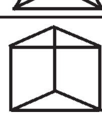
షరా :- 1) త్రిభుజాకార పిరామిడ్‌లోని ప్రతీ పార్శ్వం ఒక్కొక్క సమబాహు త్రిభుజమైనచో దాన్ని టెట్రాహెడ్రాన్ (Tetrahedron) అందురు

2) సమచతురస్రాకారంలోని ప్రిజిమ్ యొక్క పతి పార్శ్వం ఒక సమచతురస్రాకార క్షేత్రం అయినచో దాన్ని సమఘనం (Cube) అందురు.

5.9. బహుఫలకర శీర్షాలు, పార్శ్వాలు, అంచులు (Vertices, Faces and edges of a Polyhedron)

ప్రతీ బహుఫలకం కొన్ని బహుభుజాకార క్షేత్రాలలో ఏర్పడుతుంది. వాటిని బహుఫలకం యొక్క పార్శ్వం (Face) అందురు. పార్శ్వం ఖండనాలు ఒక్కొక్క రేఖా ఖండమగును. వీటిని అంచులు (Edges) అందురు. రెండు కంటె అధిక అంచుల ఖండనం వల్ల ఒక బిందువు ఏర్పడుతుంది. దాన్ని బహుఫలకం యొక్క శీర్షం (Vertex) అందురు.

ఒక త్రిభుజాకార పిరామిడ్, త్రిభుజాకార ప్రిజిమ్ యొక్క శీర్షాల, పార్శ్వాలు అంచులు సంఖ్యను నిర్ణయించండి.

బహుఫలకం	శీర్షాల సంఖ్య (V)	పార్శ్వాలు సంఖ్య (F)	అంచుల సంఖ్య (E)
 త్రిభుజాకార పిరామిడ్	4	4	6
 త్రిభుజాకార ప్రిజిమ్	6	5	9

పట్టిక - 5.2

5.9.1 యూలర్ యొక్క సూత్రం (Euler's formula)

స్విస్ గణిత శాస్త్రవేత్త లియోనార్డ్ యూలర్, (Leonard Euler, 17.7-1783) ఒక బహుఫలకం శీర్షం (V) పార్శ్వం (F), అంచు (t) యొక్క సంఖ్యలను తీసుకొని మొదటి సారి వాటి మధ్య గల సంబంధాన్ని సూత్ర రూపంలో ప్రకటించెను.

ఆ సూత్రం $V + F - E = 2$

కింది పట్టికను పరిశీలించండి. పైన ఇచ్చిన బహుఫలకాలు చిత్రాల నుండి బహుఫలకం శీర్షాలు, పార్శ్వాలు, అంచుల సంఖ్యను కనుగొని కింది పట్టికలో రాయండి. పట్టికలోని అంశాలతో $V + f - E = 2$ సూత్రంను రుజువు చేయండి.

బహుఫలకం	శీర్షాల సంఖ్య (v) అ	పార్శ్వాల సంఖ్య (f)	అంచుల సంఖ్య (E)	V+P-E
టెట్రాహెడ్రాన	4	4	6	2
దీర్ఘఘనం	8	6	12	2
పంచభుజాకార ప్రిజమ్	10	7	15	2
త్రిభుజాకార ప్రిజమ్	6	5	9	2
చతుర్భుజాకార పిరామిడ్	5	5	8	2

పట్టిక- **5.3**

పై పట్టికను పరిశీలించగా కింది విషయాలు తెలుస్తున్నాయి ?

గుర్తుంచుకోయండి :

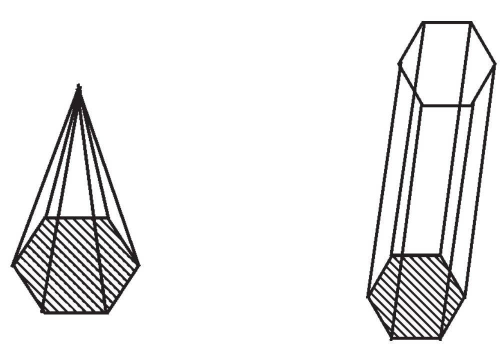
1. (a) ఒక ప్రిజిమ్ శీర్షాల సంఖ్య, దాని భూమి భుజాల సంఖ్యకు రెండు వంతులు
   (b) ఒక పిరామిడ్ శీర్షాల సంఖ్య, దాని భూమి భుజాల సంఖ్యకు 1 అధికం
2. (a) ఒక ప్రిజిమ్ పార్శ్వాల సంఖ్య దాని భూమి భుజాల సంఖ్యకు 2 అధికం.
   (b) ఒక పిరామిడ్ పార్శ్వాల సంఖ్య దాని భూమి భుజాల సంఖ్యకు 1 అధికం.

ఉదాహరణ-1 : కింది బహుఫలకాల శీర్ష బిందువుల సంఖ్యను, పార్శ్వాలు, అంచులు సంఖ్యలను కనుగొని ని రుజువు చేయండి.

జవాబు :

బొమ్మ (క)లో గల బహుఫలకంలోని శీర్షాల సంఖ్య (v) =7, పార్శ్వాలు (f) =7, అంచులు (t)ొ12

$\therefore V + F - E = 2$



(బొమ్మ -5.47)

బొమ్మ (ఖ)లో గల బహుఫలకంలోని శీర్షాల (v) =12, పార్శ్వాలు (f) =8, అంచులు (E) = 18

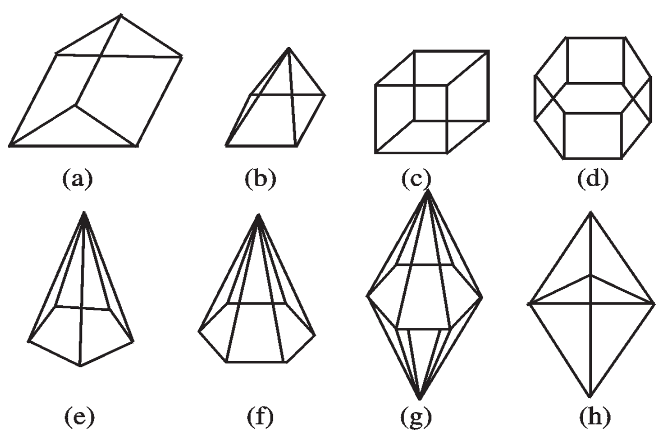
$\therefore$ V + F – E = 12 + 8 – 18 = 2

షరా : కొన్ని సందర్భాలలో v,f,t కనుగొనుట కష్టంగా ఉంటుంది. ఎందుకంటే బహు ఫలకాలు బొమ్మలు గీయుట కష్టంగా ఉండును. 10 భుజాలు గల బహుభుజి పిరామిడ్, 12 భుజాలు గల బహుభుజ ప్రిజిమ్ వంటివి నిర్మించుట కష్టంగా ఉంటుంది. బొమ్మలను నిర్మించుకుండానే ఏదైన ఒక బహుఫలకం శీర్షాలు (v) , పార్శ్వాలు (f) అంచు (t) లు సంఖ్యలను కనుగొనవచ్చును. కింది ఉదాహరణ చూడండి.

ఉదాహరణ-2 : ఒక అష్టభుజాకార బహుభుజి పిరామిడ్ శీర్షాల, పార్శ్వాలు, అంచుల సంఖ్యలను కనుగొనండి. పార్శ్వాల సంఖ్య (f) = బహుభుజిలోని శీర్షాల సంఖ్య (f) = బహుభుజిలోని భుజాల సంఖ్య +1=8+1=9, పార్శ్వాల సంఖ్య (f) = బహుభుజిలోని భుజాల సంఖ్య +1=8+1=9 అంచుల సంఖ్యను కనుగొనుటకై V+F–E =2 ను ప్రయోగించవలెను.

$\therefore 9 + 9 - E = 2 \implies E = 18 - 2 = 16$

$\therefore$ బహుభుజలోని అంచుల సంఖ్య (t) =16 (జవాబు)



बहुफलक	E	V	F	V+F-E
(a)				
(b)				
(c)				
(d)				
(e)				
(f)				
(g)				
(h)				

పట్టిక - **5.4**

అభ్యాసం-5(i)

1. **ఖాళీలను పూర్తి చేయండి.**

   క) ఒక షడ్ భుజాకార పిరామిడ్‌లోని పార్శ్వాల సంఖ్య ______________

   ఖ) టెట్రాహెడ్రాల్ యొక్క శీర్షాల సంఖ్య ______________

   గ) ఎనిమిది అంచుల గల ఒక పిరామిడ్ పార్శ్వాల సంఖ్య ______________

   ఘ) ఒక చతుర్భుజాకార ప్రిజిమ్ శీర్షాల సంఖ్య ______________

   ఙ) ఒక పంచభుజాకార ప్రిజిమ్ అంచుల సంఖ్య ______________

   చ) భుజాలు గల బహుభుజ పిరామిడ్ పార్శ్వాల సంఖ్య ______________

   ఛ) భుజాలు గల బహుభుజ పిరామిడ్ శీర్షాల సంఖ్య ______________

   జ) ఒక బహుఫలకంలోని అంచులు 12, పార్శ్వాలు 6 అయిన శీర్షాలు ______________

   ఝ) ఒక బహుఫలకంలో అంచులు 30 శీర్షాలు 12 అయిన పార్శ్వాలు ______________

   ఞ) ఒక త్రిభుజాకార పిరామిడ్‌లోని శీర్షాలు ______________ పార్శ్వాలు ______________ అంచులు ______________

2. ఒక బహుఫలకంలో శీర్షాలు, పార్శ్వులు క్రమంగా 7,10 అయిన దాని అంచులు ఎన్ని ?

3. ఒక బహుఫలకంలోని పార్శ్వాలు, అంచులు క్రమంగా 6,12 అయిన దాని అంచులు ఎన్ని ?

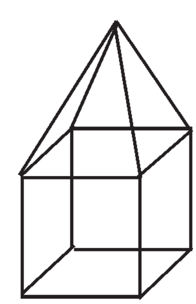
4. ఒక సమచతురస్రాకార ప్రిజిమ్, సమఘనం మధ్య గల భేదాలను బొమ్మ ద్వారా చూపించండి.

5. ఏదైన ఒక బహుఫలకం తీసుకొని దాని శీర్షాలు, పార్శ్వాలు మొత్తం అంచుల సంఖ్యకు 2 అధికమని చూపండి.

6. యూలర్ (Euler) సూత్రాన్ని ప్రయోగించి పట్టికలోని ఖాళీ గదులను పూర్తి చేయండి.

పార్శ్వాల సంఖ్య		5	20
శీర్షాల సంఖ్య	6		12
అంచుల సంఖ్య	12	9	

(పట్టిక-5.5)

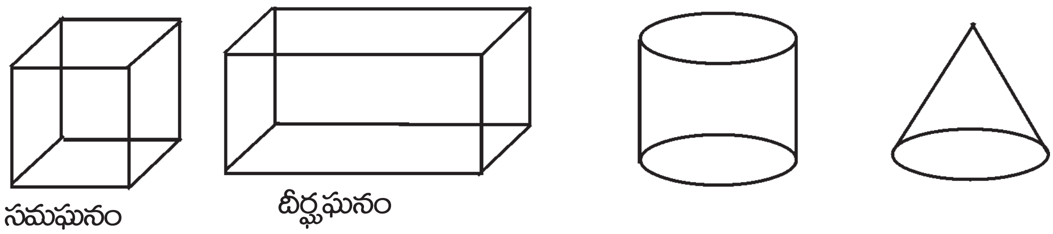


(బొమ్మ-5.48)

7. ప్రక్కన గల బొమ్మలోని శీర్షాలు, పార్శ్వాలు, అంచుల సంఖ్యను కనుగొని యూలర్ సూత్రం పరీక్షించండి.

5.10 ఘనపు వస్తువుల (బహు ఫలకాల) ఉపరితల వైశాల్యం (Surface area of a polyhedron) :-

బహు ఫలకాలను గూర్చి తెలుసుకున్నారు. సమఘనం, దీర్ఘఘనం మొదలైన బహుఫలకాల పార్శ్వాలు, సమతల ఉపరితలాలు కాగా సిలిండర్, కోన్ మొదలైన ఘనపు వస్తువులు (బహుఫలకాలు కానివి) పార్శ్వాలు వక్రతలాలు.



(బొమ్మ-5.49)

దీర్ఘఘనం, సమఘనం వంటి త్రి-మాత్రిక (Three-Dimensional) లేక 3-D వస్తువులను పరిమిత పార్శ్వతల క్షేత్రాలు అందురు. ప్రతీ పార్శ్వతలానికి వైశాల్యం గలదు.

పార్శ్వాలు ద్వి-మాత్రికలు (Two-Dimensional) లేక 2-D లు అయినపుడు పార్శ్వతల వైశాల్యం కనుగొనుటకు రెండు మాత్రికలు (పొడవు-వెడల్పు) అవసరమగును.

510.1 వైశాల్యం కొలతలు :-

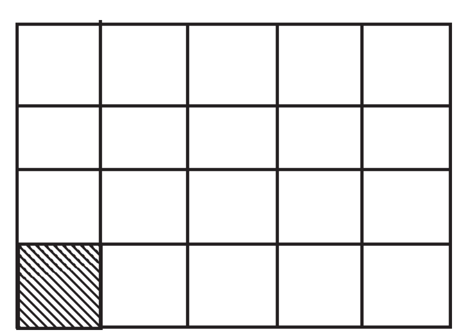
(i) వైశాల్యం కనుగొనుటకు మొదటి ప్రమాణం లేక యూనిట్‌ను నిర్ణయించవలెను. సమచతురస్రంలో ప్రతీ భుజం పొడవు ఒక యూనిట్ అయినచో వైశాల్యం ఒక చదరపు యూనిట్ అగును. 1 సె.మీ. పొడవు గల సమచతురస్ర వైశాల్యం 1 చ.సె.మీ. అగును. అదే విధంగా 1 మీ. పొడవు భుజం గల సమచతురస్రం వైశాల్యం 1 చ.మీ. అగును.

(ii) ఒక దీర్ఘచతురస్రంలో 1 యూనిట్ వెడల్పులో దాని భుజాలకు సమాంతరంగా రేఖలను గీసి దాన్ని కొన్ని యూనిట్లు చదరపు క్షేత్రాలుగా మార్చండి. ఈ చిన్న చదరపు క్షేత్రాలు లేక గదులు ద్వారా లభించే సంఖ్య, దీర్ఘచతురస్రం పొడవులో, వెడల్పుల లబ్ధంతో సమానం అవుతుంది. 5 సె.మీ. పొడవు, 4 సె.మీ. వెడల్పు గల దీర్ఘచతురస్రంలో 1 సె.మీ. తేడాలో దాని భుజాలకు సమాంతరంగా సరళరేఖలను గీయుటవల్ల దీర్ఘ చతురస్రంలో 1 సె.మీ. పొడవు గల సమచతురస్రాలు 20 ఏర్పడును. ఆ సంఖ్య బొమ్మ పొడవు వెడల్పుల లబ్ధం 5x4=20తో సమానం

అనగా 20 సమచతురస్రాలు = 5 సె.మీ. x 4 సె.మీ.

∴ దీర్ఘచతురస్రం దాని వైశాల్యం

= (పొడవు x వెడల్పు) చ. యూనిట్లు = a^2



(బొమ్మ-5.50)

$l \times b$ చ. యూనిట్లు. సమచతురస్రం భుజం పొడవు a యూనిట్లు అయినచో సమచతురస్ర వైశాల్యం (భుజం పొడవు) చ. యూనిట్లు=a^2

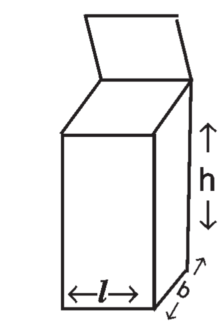
సమఘనం యొక్క ప్రతీ పార్శ్వం ఒక్కొక్క సమచతురస్రం, దీర్ఘఘణం యొక్క ప్రతీ పార్శ్వం ఒక్కొక్క దీర్ఘచతురస్రం అవుతుంది. ఎందుకంటె సమఘనం, దీర్ఘఘనం వరుసగా సమచతురస్రాకార, దీర్ఘచతురస్రాకార ప్రిజిమ్‌లు. ఇవి ఒక్కొక్కటి ఒక్కొక్క బహుఫలకాలు అగును.

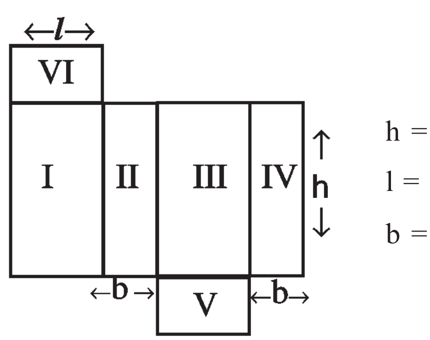
5.10.2 ఉపరితల వైశాల్యం (Surface area)

ఒక దీర్ఘఘనాకారంలో ఉన్న ఇంటిని పరిశీలించండి. ఇంటిలోనికి వెళ్లండి. ఇంటిలో పై కప్పు, నేల మినహ నాలుగు గోడలను చూడగలుగుతారు. పై కప్పు, నేల మినహ మిగిలిన నాలుగు పార్శ్వాలు ఇంటి యొక్క పార్శ్వతలాలు అనుకుంటాం. వీటన్నింటి కొలతలను పార్శ్వతల వైశాల్యం అందురు.

అదే విధంగా ఒక ఘనాకార పెట్టె యొక్క కప్పును, కింది భాగాన్ని విడిచి పెట్టినచో నాలుగు పార్శ్వతలలను చూడగలరు. ఇంటి నాలుగు గోడలను రంగు వేయుట, పెట్టె లోపల నాలుగు ప్రక్కలగు రంగు వేయుట మొదలైనవి అవసరమగుచుండును. ఆ సమయంలో పార్శ్వతల వైశాల్యం కనుగొనవలసి ఉంటుంది. వైశాల్యం కనుగొనుట ద్వారా చున్నం లేక రంగు వేయు పరిమాణం దానికి అనుగుణంగా చేయవలసిన ఖర్చు పరిమాణం నిర్ణయించుకోగలుగుతాం.

ఇప్పుడు దీర్ఘఘనం యొక్క పార్శ్వతల వైశాల్యం, సంపూర్ణతల వైశాల్యం కనుగొనుట గుర్చి తెలుసుకుందాం.





(బొమ్మ-5.51)

పెట్టె యొక్క ఆరు పార్శ్వాలలో (క) (గ)ల వైశాల్యం సమగనం (ఖ) (ఘ) మిగిలిన రెండు పార్శ్వాల వైశాల్యం సమానం. నేల, పైకప్పు (ఙ) (చ)ల వైశాల్యం సమానం.

దీని ప్రతీ పార్శ్వం ఒక్కొక్క దీర్ఘచతురస్రం అగుటవల్ల దాని వైశాల్యం కనుగొనవలెను. దీర్ఘఘనం యొక్క అన్ని తలముల వైశాల్యం అనగా సంపూర్ణతల వైశాల్యం (Whole surface area) క) యొక్క వరశాల్యం + ఖ) యొక్క వైశాల్యం + గ) యొక్క వైశాల్యం + ఘ) యొక్క వైశాల్యం + ఙ) యొక్క వైశాల్యం + చ) యొక్క వైశాల్యం

$= l \times h + b \times h + l \times h + b \times h + l \times b + l \times b$

$= 2\ (l \times h + b \times h + l \times b)$ ......(i)

దీర్ఘఘనం పార్శ్వతల వైశాల్యం (Lateral surface area)

క) యొక్క వైశాల్యం + ఖ) యొక్క వైశాల్యం + గ) యొక్క వైశాల్యం + ఘ) యొక్క వైశాల్యం

$= l \times h + b \times h + l \times h + b \times h$

$= 2l \times h + 2b \times h = 2h\ (l + b)$ .... (ii)

సూత్రం : దీర్ఘఘనం సంపూర్ణతల వైశాల్యం

= 2 (పొడవు x ఎత్తు + వెడల్పు x ఎత్తు + పొడవు x వెడల్పు

పార్శ్వతల వైశాల్యం = 2 x ఎత్తు (పొడవు + వెడల్పు)

ఉదాహరణ-3 : ఒక కర్ర పెట్టె పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు క్రమంగా 20 సె.మీ., 15 సె.మీ. అయిన దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యం కనుగొనండి.

సమాధానం ఇచ్చట l =20 సెం.మీ., b =15 సెం.మీ., h = 10 సె.మీ

సంపూర్ణతల వైశాల్యం = 2(lh + bh + lb)

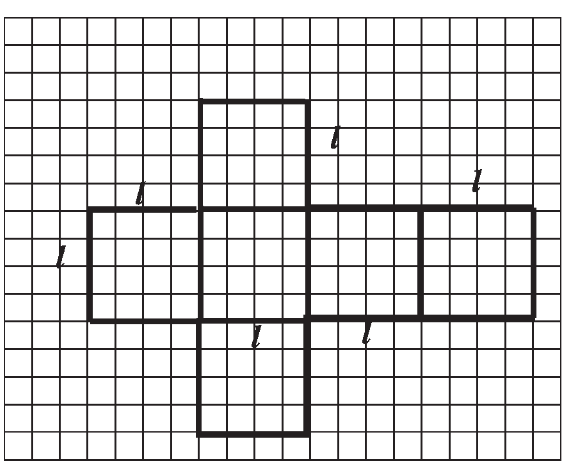
= 2 (20 x 10 + 15 x 10 + 20 x 15) చ.సె.మీ.

= 2 (200 + 150 + 300) చ.సె.మీ.

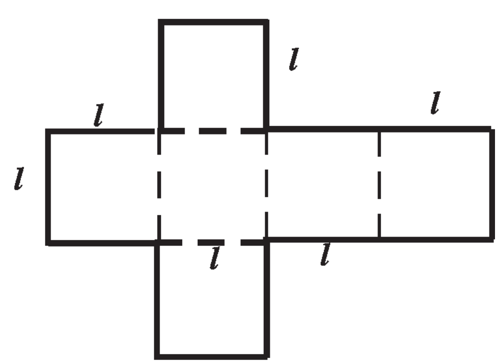
= 2 x 650 = 1300 చ.సె.మీ.

మీరు చేయవలసిన పని :-

1. ఒక గ్రాఫ్ కాగితం తీసుకొని బొమ్మలో చూపిన విధంగా సమచతురస్రాలను నిర్మించి కత్తిరించి వేరు చేయండి.



(బొమ్మ-5.52)

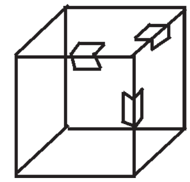


(బొమ్మ-5.53)

2. డాట్‌లు ఉన్న భాగంలో కాగితాన్ని మడత పెట్టి ఒక బహుఫలకంను తయారుచేయండి.

3. ఇప్పుడు ఇవి ఏ ఘన పదార్థంగా మారింది ?

(కాని గళ్ల సమఘనాకారపు ఘన పదార్థంగా మారింది)



(బొమ్మ−5.54)

4. ఇచ్చిన నమునా (set) వల్ల ఏర్పడిన పార్శ్వతలాల సంఖ్యను, ప్రతీ పార్శ్వతల వైశాల్యంను కనుగొనండి.

5. సమఘనం భుజం పొడవు 1 యూనిట్లు అయినచో పార్శ్వతల వైశాల్యం సంపూర్ణతల వైశాల్యం కనుగొనండి. దీని పార్శ్వతల వైశాల్యం=4t , సంపూర్ణతల వైశాల్యం=$6l^2$?

ఉదాహరణ-4 : ఒక సమఘనం భుజం పొడవు 10 సెం.మీ. దాని సమతల వైశాల్యం పార్శ్వతల వైశాల్యంను కనుగొనండి.

సమధానం : సమఘనం భుజం పొడవు = l =10 సెం.మీ.

$\therefore$ (సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 6l^2 = 6 \times (10)^2 = 600$ చ.సె.మీ.

(పార్శ్వతల వైశాల్యం $= 4l^2 = 4(10)^2 = 400$ చ.సె.మీ.

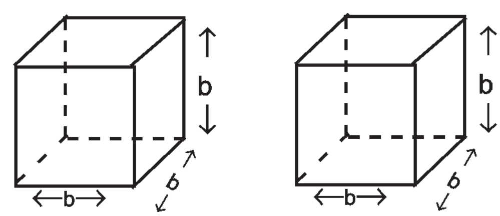
స్వయంగా చేయండి.

1. రెండు సమఘనాలను తీసుకోయండి. వాటి భుజం పొడవు G యూనిట్లు

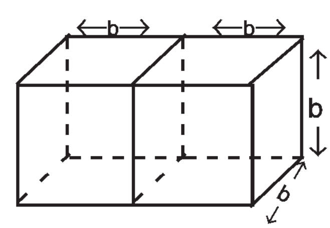
2. రెండు సమఘనాలను కలిపి మరొక సమఘణం తయారుచేయండి.

3. కొత్త ఘనపదార్థం ఉపరితల వైశాల్యం మొత్తం కనుగొనండి.

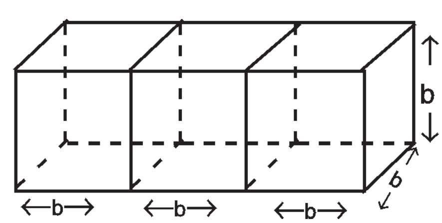
4. ఒక రకపు మూడు సమఘనాలను కలిపి కొత్త ఘనపరిమాణాన్ని తయారు చేయండి. దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యం కనుగొనండి.



(బొమ్మ-5.55)



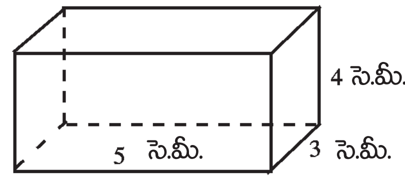
(బొమ్మ−5.56)



(బొమ్మ-5.57)

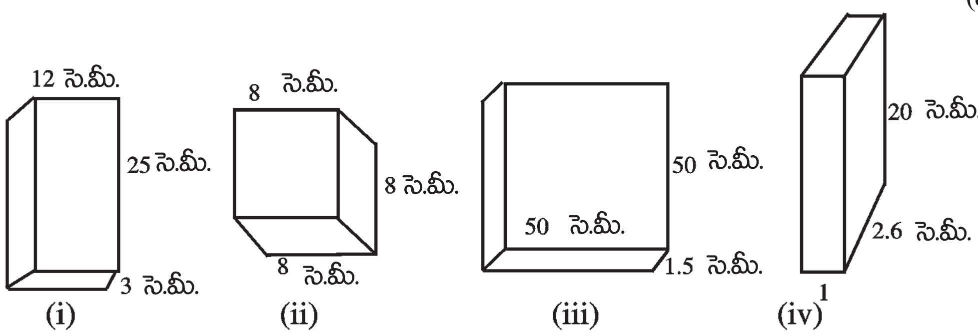
అభ్యాసం-5 (j)

1. ప్రక్కన ఒక దీర్ఘఘనం బొమ్మ ఇవ్వడమయ్యింది. దాని రెండు నకలు (Net) లను గీయండి.



(బొమ్మ-5.58)

2. కింది దీర్ఘఘనాలు, సమఘనాల కొలతలను బట్టి ఒక్కొక్క దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యం కనుగొనండి.



(బొమ్మ-5.59)

3. ఒక దీర్ఘఘనం, పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు వరుసగా 15 సె.మీ., 20 సె.మీ., 10 సె.మీ. అయిన దాని పార్శ్వతల వైశాల్యం, సంపూర్ణతల వైశాల్యం కనుగొనండి.

4. ఒక సమఘనాకార పెట్టె పొడవు 25 సె.మీ. అయిన దాని ప్రక్కతల, సంపూర్ణతల వైశాల్యంను కనుగొనండి.

5. రెండు సమఘనాలను కలిపి ఒక దీర్ఘఘనం తయారుచేయడమయ్యింది. సమఘనం భుజం పొడవు 30 సెం.మీ. దీర్ఘఘనం పార్శ్వతల వైశాల్యంల మొత్తమెంత ?

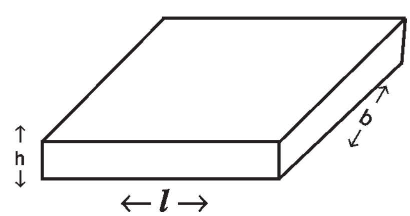
6. కారుబోర్డుతో తెరచియున్న ఒక సమఘనాకారపు పెట్టెను తయారుచేయండి. పెట్టె పొడవు 18 సె.మీ. అయిన దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యం ఎంత ?

7. ప్రక్కన గల బొమ్మలను చూడండి.

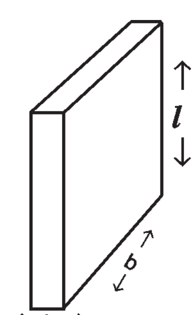
   (i) దీర్ఘఘనం సంపూర్ణతల వైశాల్యం

   =పార్శ్వతల వైశాల్యం + 2 $\times$ భూమి వైశాల్యం

   (ii) 5.60 బొమ్మలోని భూమిని ఎత్తుగాను, ఎత్తుని భూమిగాను తీసుకున్నచో దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యంలో మార్పు వస్తుందా ?



(బొమ్మ-5.60)



(బొమ్మ-5.61)

5.11. ఘనపు వస్తువు (బహుఫలకం) యొక్క ఘనఫలం (Volume of a polyhedron)

ప్రతీ రోజు మనకు పుస్తకం, ఇసుక, రాయి ముక్క, బంతి, ఇనుపగొట్టం, రూలుకర్ర, బాక్సు మొదలైన వస్తువులతో సంబంధం ఉంటుంది. ఏదైనా ఒక పదార్థాన్ని సమతల భూమిపై ఉంచినచో కొంతభాగం భూమిని తాకుతూ మిగిలిన భాగం శూన్యం, గాలి లేక నీరు నందు స్థానం ఆక్రమించియున్నచో ఆ పదార్థాన్ని ఘన పదార్థం అందురు. దాన్ని గూర్చి మీకు తెలుసు.

ప్రతీ ఘనపదార్థం గాలిలో, నీటిలో లేక శూన్యంలో కొంత స్థానం ఆక్రమిస్తుంది. మీ ఆక్రమిత స్థాన పరిమాణం ఆ ఘన పదార్థం యొక్క ఘనపరిమాణం అందురు.

రెండు రేఖ ఖండాలను వాటి పొడవుల ద్వారాను, రెండు సమచతురస్రాలు లేక దీర్ఘచతురస్రాలను వాటి వైశాల్యం ద్వారాను సరిపోల్చుట మనకు తెలుసు. అదే విధంగా రెండు ఘన పదార్థం మధ్య సరిపోల్చుట అవి నీరు, గాలి లేక శూన్యంలో ఆక్రమించిన స్థానం అనగా వాటి ఘన పరిమాణం ద్వారా జరుగును. (ఘనపరిమాణం (volume) ఒక ఘన పదార్థం గాలి, నీరు లేక శూన్యంలో ఆక్రమించియున్న స్థాన పరిమాణంను ఆ వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణం (Amount of space occupied by the solid is called volume).

5.11.1. ఘన పరిమాణం యూనిట్‌లు (Units of volume)

ఒక స్థలం వైశాల్యాన్ని చతురస్ర యూనిట్లులో తెలియజేస్తున్నట్లే ఒక ఘనపు వస్తువు ఘనపరిమాణంను తెలియజేయుటకై ఘనపు యూనిట్లనున ఉపయోగించవలెను. ఒక స్థలం యొక్క వైశాల్యం కనుగొనుటకై దాన్ని 1 యూనిట్ భుజాలుగా విభజించునట్లు ఒక ఘన పదార్థం యొక్క ఘనపరిమాణం తెలుసుకొనుటకై దాని 1 యూనిట్ సమఘనములుగా విభజించవలెను.

1 ఘ.సె.మీ. అనగా 1 సె.మీ. భుజం గల ఒక సమఘనం ఆక్రమించిన స్థలం అని అర్థం. అదే విధంగా 1 ఘ.మీ. అంటే 1 మీ. భుజం గల సమఘనం ఆక్రమించిన స్థలం పరిమాణం.

ఘనపరిమాణ యూనిట్లు

1000 ఘనపు మిల్లీమీటర్లు (ఘ.మి.మీ) = 1 ఘ.సె.మీ.

1000 ఘ.సె.మీ. = 1 ఘ.డెసి.మీ.

1000 ఘ.డెసి.మీ. = 1 ఘ.మీ.

1000 ఘ.మీ. = 1 ఘ.డెకా.మీ.

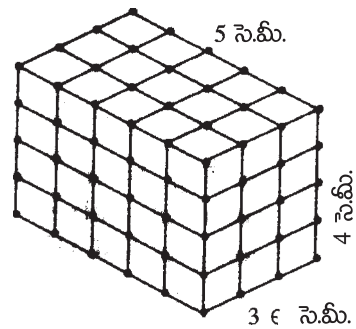
1000 ఘ.డెకా.మీ. = 1 ఘ.హెక్టా.మీ.

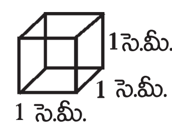
1000 ఘ.హెక్టా.మీ. = 1 ఘ.కి.మీ.

షరా : మనం కేవలం సమచతురస్రం లేక దీర్ఘచతురస్రం భూమి గల ప్రిజిమ్ అనగా సమఘనం, దీర్ఘఘనం యొక్క ఘనపరిమాణం కనుగొనుట కవసరమయ్యే సూత్రాలనే తెలుసుకుందాం.

5.11.2. దీర్ఘఘనం, సమఘనంల ఘన పరిమాణం :-

1. దీర్ఘఘనం ఘన పరిమాణం





ప్రక్కన గల బొమ్మను చూడండి.

ఇది ఒక దీర్ఘఘనం బొమ్మ. దీని పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తు వరుసగా 5 సెం.మీ., 3 సెం.మీ., దీన్ని 1 సెం.మీ. పొడవు గల ఎన్ని సమఘనాలుగా విభజించగలం.

దీర్ఘఘనం 1 సెం.మమీ. పొడవు గల 60 సమఘనాలుగా మారింది. 1 సెం.మీ. పొడవు గల సమఘనం ఘనపరిమాణం 1 ఘ.సె.మీ. అని మనకు తెలుసు.

ఇచ్చిన దీర్ఘఘనం ఘనపరిమాణం = 60 ఘ.సె.మీ.

= 5 సె.మీ x 4 సెం.మీ. x 3 సెం.మీ.

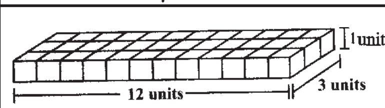
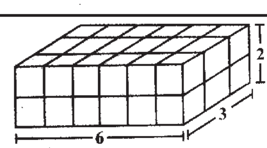
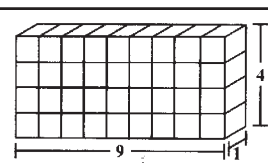
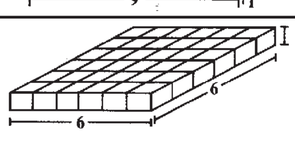
దీన్ని బట్టి చూడగా కింది విషయం తెలుస్తున్నది.

దీర్ఘఘన ఘన పరిమాణం

= పొడవు x వెడల్పు x ఎత్తు లేదా భూమి వైశాల్యం x ఎత్తు

మీరు చేయవలసిన పని

సమాన పొడవు గల 36 సమఘనాలను తీసుకోయండి. వివిధ పద్ధతులలో ఈ సమాన ఘనపరిమాణంను సమఘనాలుగా అమర్చండి. కింది పట్టికను పూర్తి చేయండి.

	దీర్ఘఘనం	పొడవు	వెడల్పు	ఎత్తు	$l \times b \times h$
(i)		12	3	1	12×3×1=36 యూనిట్లు
(ii)					
(iii)					
(iv)					

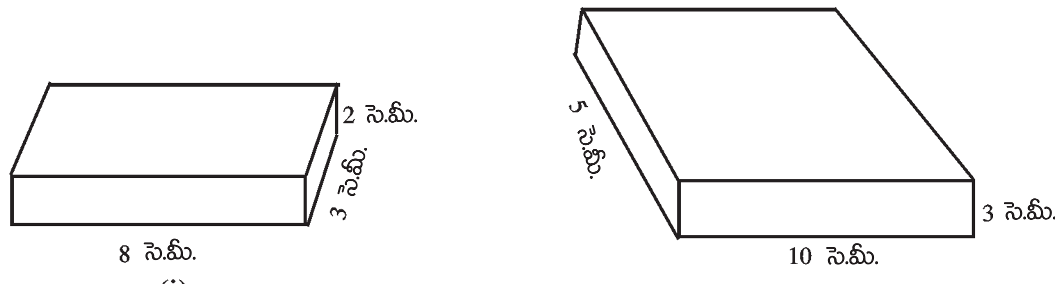
పట్టిక - 5.6

దీని వల్ల ఏం తెలుసుకున్నారు.

ప్రతీ దీర్ఘఘనం 36 సమాఘనాలతో ఏర్పడింది. అందుచేత దీర్ఘఘనం ఘనపరిమాణం 36 ఘనపు యూనిట్లు (ఘ. యూనిట్లు) అగును. దీన్ని బట్టి చూడగా

దీర్ఘఘనం యొక్క ఘన పరిమాణం = భూమి $\times$ వెడల్పు $\times$ ఎత్తు లేదా భూమి వైశాల్యంxఎత్తు

స్వయంగా చేయండి కింది బొమ్మలలోని దీర్ఘఘనాల ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.



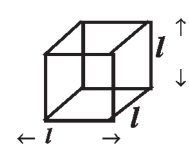
(బొమ్మ-5.63)

2. సమఘనం ఘన పరిమాణం :-

సమఘనం ఒక దీర్ఘఘనమ్ణ దాని పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తు సమానం. పార్శ్వతలాలు ఒక్కొక్క సమచతురస్రం అయినచో దాన్ని సమఘనం అందురు.

దీర్ఘఘనం యొక్క ఘనపరిమాణం = పొడవు $\times$ వెడల్పు $\times$ ఎత్తు

$\therefore$ సమఘనం ఘనపరిమాణం = l యూనిట్లు $\times$ l యూనిట్లు $\times$ l యూనిట్లు



(బొమ్మ-5.64)

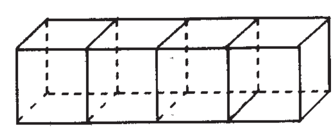
స్వయంగా చేయండి :

కింది సమఘనాల ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.

(a) సమఘనం భుజం పొడవు = 4 సెం.మీ.

(b) సమఘనం భుజం పొడవు = 1.5 సెం.మీ.

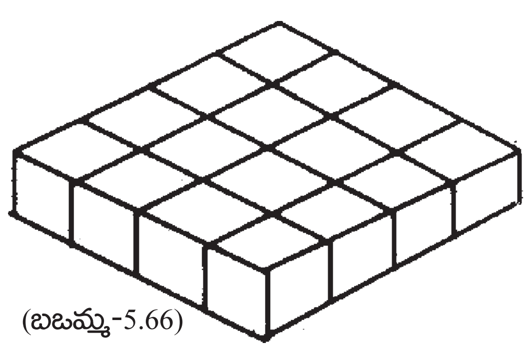
మీరు చేయవలసిన పని



(బొమ్మ-5.65)

1. 1 ఘ.సె.మీ. ఘనపరిమాణం గల 64 సమఘనాలను తీసుకోయండి.
2. 4 సమఘనాల వంతున జత చేయండి. దాని కొలత 4 సెం.మీ.x1 సెం.మీ.x1 సెం.మీ.
3. అటువంటి నాలుగు దీర్ఘఘనాలను ఒక దాని ప్రక్కన మరొక దాన్ని అమర్చండి. దాని వల్ల ఒక కొత్త ఘనం ఏర్పడుతుంది.

దాని కొలత 4 సె.మీ $\times$ 4 సె.మీ. $\times$ 1 సె.మీ. అగును.



(బొమ్మ-5.66)

4. సోపానం-3లోని నాలుగేసి దీర్ఘఘనాలను ఒకదానిపై మరొక దాన్ని అమర్చండి. దాని వల్ల మరొక కొత్త దీర్ఘఘనం ఏర్పడుతుంది.

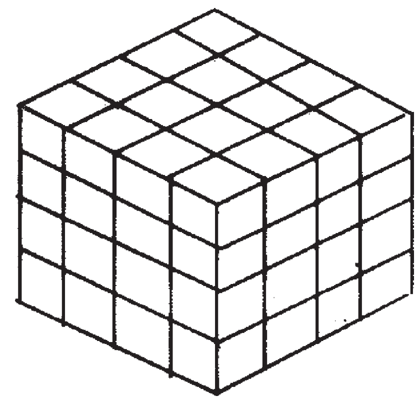
దాని కొలత 4 సెం.మీ. $\times$ 4 సెం.మీ. $\times$ 4 సెం.మీ.

ఈ దీర్ఘఘనం 64 సమఘనాలతో ఏర్పడుట వల్ల దాని ఘనపరిమాణం 64 ఘ.సె.మీ. అగును.

అనగా దీర్ఘఘనం ఘన పరిమాణం=4 సె.మీ. $\times$4 సె.మీ. $\times$ 4 సె.మీ.

ఇచ్చట దీర్ఘఘనం మొడవు= వెడల్పు = ఎత్తు

$\therefore$ సమఘనం ఘనపరిమాణం = (భుజం పొడవు)^3 ఘ.సె.మీ.



(బొమ్మ-5.67)

ఉదాహరణ-5 : ఒక నీటి తొట్టె లోపలి పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తు వరుసగా 75 సె.మీ., 60 సె.మీ, 46 సె.మీ. అయిన తొట్టెలో ఎన్ని ఘ.సె.మీ. నీరు పట్టును. దాన్ని లీటర్లలోనికి మార్చండి.

(1000 ఘ.సె.మీ. = 1 లీటరు)

సమాధానం : నీటి తొట్టె లోపలి పొడవు = 75 సె.మీ., వెడల్పు = 60 సె.మీ., ఎత్తు = 46 సె.మీ.

నీటి ఘనపరిమాణం = పొడవుxవెడల్పుxఎత్తు $(75 \times 60 \times 40)$ ఘ.సె.మీ.

= 20700 ఘ.సె.మీ. = 20700 $\div$ 1000 = 27 లీటర్లు

ఉదాహరణ-6 : 15 సె.మీ. భుజం గల ఎన్ని సమఘనాకార లోహ పదార్థాలు 1.5 మీ. $\times$ 90 సె.మీ. $\times$ 45 సె.మీ కొలత గల ఒక దీర్ఘఘనాకారపు పెట్టెలో పట్టును ?

సమాధానం : సమఘనం ఘనపరిమాణం = (16)^3 = 3375 ఘ.సె.మీ.

పెట్టి ఘనపరిమాణం=15మీ $\times$ 90 సెం.మీ $\times$ 75 సె.మీ.

= 150 సె.మీ. $\times$ 90 సె.మీ. $\times 75$ సె.మీ. = 10125 ఘ.సె.మీ.

$\therefore$ పెట్టెలో పట్టే లోహ పదార్థాల సంఖ్య $= \dfrac{1012500}{3375} = 300$

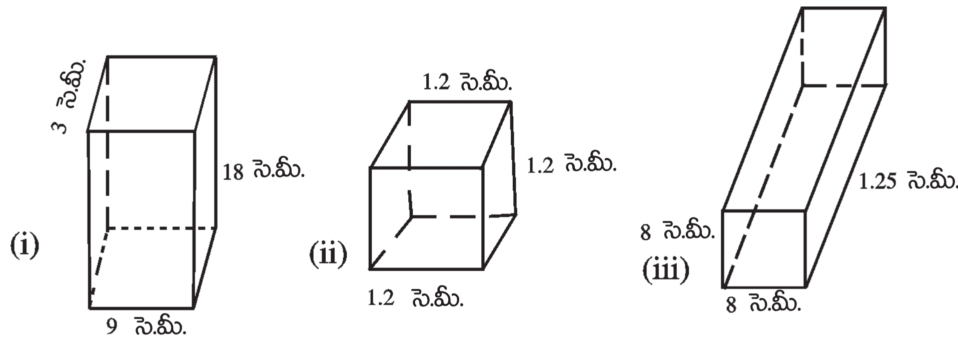
$\therefore$ లేక ఆ సంఖ్య $= \dfrac{150\times90\times75}{15\times15\times15} = 300$

అభ్యాసం - 5 (k)

1. 75 మి.మీ. భుజం గల సమఘనం ఎన్ని ఘ.సె.మీ. స్థలం ఆక్రమించును ?

2. ఒక బడి ఆడిటోరియం కొలతను 45 మీ. $\times$ 20 మీ $\times$16 మీ. ఒక విద్యార్థికి 64 ఘ.మీ. గాలి అవసరమగును. ఆడిటోరియంలో అత్యధికంగా ఎంత మంది కూర్చొగలరు ?

3. కింది వాని కొలతలను బట్టి ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.



(బొమ్మ-5.68)

4. 12 సె.మీ. భుజం పొడవు గల ఒక సమఘనాకారపు లోహాన్ని కరిగించి 18 సె.మీ. పొడవు 15 సె.మీ. వెడల్పు గల దీర్ఘఘనంను తయారు చేసినచో దాని ఎత్తు ఎంత ?

5. ఒక సమఘనం ఘన పరిమాణం 8000 ఘ.సె.మీ. అయిన దాని భుజం పొడవు ఎంత ?

6. ఒక దీర్ఘఘనం యొక్క భూమి వైశాల్యం 180 చ.సె.మీ. ఘనపరిమాణం 900 ఘ.సె.మీ. అయిన దాని ఎత్తు ఎంత ?

7. ఒక దీర్ఘఘనం కొలతలు 60 సె.మీ. × 45 సె.మీ. × 30 సె.మీ. దానిలో 6 సె.మీ. భుజం గల ఎన్ని సమఘనాలను పట్టును ?

उत्तरमाला

अभ्यास-1(a)

1. (i) असंख्य (ii) दो (iii) एक (iv) एक 2.✓ (ii), (iii), (vi), (vii) (×) (i) (iv) (v)
3. (a) 6 (b) 4 4. A-C-B 5. 3 तीन जोड़ी

अभ्यास-1(b)

(i) (a) एक (b) शीर्ष (c) आसन्न (d) $\angle APQ$, $\angle BPQ$ (e) आसन्न (e) $\angle BOD$, $\angle AOD$ 2. (a) 180° (b) 60 (c) 60 (d) 3.141.5 (e) $(90\text{-}x)°$, (f) $(180\text{-}x)°$, (g) (180–5)° 3. कोण, कोण का अन्त:भाग, कोण का बहिर्भाग
4.(a) 45° (b) 55° (c) 90° (d) 130° 5. (i) $\angle F$ (ii). $\angle C$ (iii) $\angle B$ (iv) $\angle E$
6. (i) 60° (ii) 29° (iii) 39° 78° 78° 9.(1) 36 (2) 42 10. 18

अभ्यास-2

1. c, d, e, f, k सही हैं शेष गलत है। 2. (a), (b), (c), (d), (e) प्रत्येक उत्तर 3 है।
4. $m\angle A=68°$, $m\angle CBD = 127°$, $m\angle C=59°$, $m\angle ACE=121°$, 5. $m\angle C=72°$ समद्विवाहु त्रिभुज
6. $m\angle C=50°$, $m\angle B=60°$, $m\angle A=70°$ 7.(i) 90° (ii) 45° (iii) 60° (iv) 90° (v) AB = BC
8. 75°, 15° 9. (a) B (b) 132° (c) 70° (d) 158° 10. $m\angle 1=45°$ $m\angle 2 = 45°$ $m\angle 3 = 48°$
12. 50° 14. 90° 15. (i) 65° (ii) 50° (iii) 70°; 16. 40°, 60° 80°, 17. 58°, 67°, 55°, 18. 90°,60°,30°
20. $m\angle A= 90°$, $m\angle B = 60°$, $m\angle C = 30°$

अभ्यास-3(a)

1. ✓ *a*, e, g, h, i (2) × b, c, d, f,j, 2.(a) भुजाओं की लंबाई , (b) चतुर्भुज (c) रम्बस (समचतुर्भुज) (d) भुजाओं की लंबाई (e) समलंब चतुर्भुज (f) समांतर चतुर्भुज (g) ऊँचाई (h) आयत, 3. (✓): a, b, c, e (×) d, f, g

अभ्यास-3(b)

1. (a) समांतर चतुर्भुज (b) सम चतुर्भुज (c) वर्ग (d) आयत (e) समांतर चतुर्भुज (f) 180°, (g) 180°
2. (✓): a, b, d, g (b) c, e, f, 3. a, c, d, e, f(T) शेष (गलत) 4. $m\angle B=110^0$, $m\angle B=70^0$,

$m\angle D=110°$, 5. 72°, 108°, 6. 18°, 54°, 126°, 7. वगचित्र, 9. 110° 10.$m\angle A = m\angle C = 110°$, $m\angle B= m\angle D=$ 80°, 11. $m\angle 70°$, $m\angle MNB=110°$, 12. 45°, 135°, 45° 135°, 13. $m\angle C = m\angle Q = m\angle T = m\angle A$, $m\angle A = m\angle T = m\angle C$, $m\angle A = M\angle C = 110°$ $m\angle B = m\angle D=70°$, 14.2.7 इकाई, 15. $x = 12$, y=5, $x = 13$

अभ्यास- 5(a)

1. 5 मी. ii. 13 से.मी., iii. 25 से.मी. iv. 17 मी., (v). 2.5 से.मी., (vi) 26 से.मी.

2. (i) 0.7 से.मी., (ii) 0.9 मी. (iii) 7.5 से.मी., (iv) 75 मी. (v) 115 मी. 4(i) $\angle B$, (ii) $\angle A$ (iii)$\angle C$, (iv)$\angle B$, (v) B, 5. 130 मी., (ii) 16 मी. 7. 6 मी. 8. 5.2 डेसी.मी. 9. 4 मी., 10. 68 से.मी.

अभ्यास- 5(b)

1. (i) 12 से.मी. (ii) 80 से.मी., (iii) 25 से.मी., (iv) 13 से.मी., 2. (i) $8\sqrt{2}$ से.मी. (ii) $7\sqrt{27}$ से.मी. (iii) $20\sqrt{2}$ (iv) $\frac{25}{\sqrt{2}}$से.मी. 3. (i) $7\sqrt{2}$ से.मी. (ii) $9\sqrt{2}$ से.मी. (3) 88 से.मी. (4) $2\sqrt{2}$ से.मी. 4. (i) 85 मी. (2) 50 मी., 5. (i) $4\sqrt{3}$ से.मी., 6. 90° से.मी. 7. 48 से.मी., 8. 50 से.मी., 196 से.मी., 9.$4\sqrt{2}$ मी. 10. 20 से.मी. और $5\sqrt{2}$से.मी.

अभ्यास- 5(c)

1. 120 मी. 2. 40 मी. 20 मी. 3. 22440 रुपए 4.(1) 116 व.मी., 5.278 रुपए 40 पैसे,

5. 50, 6. (i) 0 , (ii) 4 व.मी., 7. 482 व.मी., 8. 236 व.मी.

अभ्यास- 5(d)

1. 86.7 डेसी.मी. 2. 16560 व.मी., 3. (i) $98\sqrt{3}$ व.से.मी. (ii) $96\sqrt{3}$ व.से.मी. 4. (i) $48\sqrt{3}$ व.डेसी.मी. (ii) $1296\sqrt{3}$ व.मी. (iii) $\frac{x}{2}\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$ व.से.मी., 6. $21\frac{3}{7}$ से.मी., 7. 6:1, 8. 72000 व.से.मी., 9. 44, 10. (i) 84 व.से.मी., (ii) 204 व.से.मी., (iii) 756 ब.मी. 11. 84 व.से.मी., 8 से.मी., 12. 64 व.से.मी., 13. 7.26 व.मी.
14.28 से.मी., 15. $48\sqrt{2}$ से.मी.

अभ्यास-5(e)

1.(i) 720 व.से.मी. (ii) 26520 व.से.मी., (iii) 48 व.मी. 2. 672 व.मी., 3. 12096 व.से.मी., 4. $31\frac{3}{13}$ से.मी., 5. 16 से.मी., 6. 12 व.मी., 7. 27 मी.

अभ्यास-5(f)

1.(1) 160 व.से.मी. 2. 154 व.मी., iii. 32 व.मी., 2.(1) 25 से.मी., (ii) 25 मी. (iii) 1.7 से.मी., (iv) 1.5 मी. 3. 40 मी., ii. 116 मी., 4. 36 मी. और 108 मी. 5. 36 से.मी., 6. $72\sqrt{3}$ व.से.मी., 7. $2\sqrt{3}$ से.मी. $6\sqrt{7}$ व.मी.

अभ्यास-5(g)

1. (1) 720 व.मी. 2. 432 व.मी. 3. 900 व.डे.मी. 2. (1) 27 मी. और 33 मी. (3) 80 मी. (4) 588 व.से.मी. (5) 1092 व.मी. 6. 12 मी. 7. 147 व.मी.

अभ्यास-5(h)

1. 2535 व.से.मी. 2.215 व.से.मी. 3. 900 व.डे.मी. 4. 200 व.मी. 5. 1056 व.से.मी. 6. 336 व.मी., 7:2592 व.से.मी. 8. 442 व.से.मी., 9. $5\frac{\sqrt{2}}{2}$ मी., 12. 25 व.मी., 10. 15.92 व.से.मी.

अभ्यास-5(i)

1.(a) 7 (b) 4 (c) 9 (d) 8 (e) 10 f (n + 1), (g) 2n (h) 8 (i) 12 (j) 4,4,6

2. 15, 3. 8, 6. 8, 5, 30

अभ्यास-5(j)

2.(i) 822 व.से.मी., (ii) 384 व.से.मी., (iii) 5300 व.से.मी., (iv) 149.2 व.से.मी., (3) 900 व.से.मी., 540 व.से.मी., (4) 37.50 व.से.मी., 25 व.से.मी., (5) 12600 व.से.मी., (6) 1620 व.से.मी.

अभ्यास-5(k)

1. (i) 486 घ.से.मी. (ii) 1.728 घ.से.मी. (iii) 8000 घ.से.मी. 2. 421.88 घ.से.मी. 3. 225 इकाई, 4. 6.4 से.मी. (5) 20 से.मी. (6) 5 से.मी. (7) 450