ସରଳ ଗଣିତ

(ଜ୍ୟାମିତି)

ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀ

MFYEYA

ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷା ନିର୍ଦ୍ଦେଶାଳୟ ଏବଂ
ରାଜ୍ୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ଓ ପ୍ରଶିକ୍ଷଣ ପରିଷଦ,
ଓଡ଼ିଶା, ଭୁବନେଶ୍ୱର

ଓଡ଼ିଶା ବିଦ୍ୟାଳୟ ଶିକ୍ଷା କାର୍ଯ୍ୟକ୍ରମ ପ୍ରାଧିକରଣ,
ଭୁବନେଶ୍ୱର

ସରଳ ଗଣିତ (ଜ୍ୟାମିତି)

ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀ

ଲେଖକମଣ୍ଡଳୀ :

ଡ. ପ୍ରସନ୍ନ କୁମାର ଶତପଥି (ସମୀକ୍ଷକ)
ଡ. ରଜନୀ ବଲ୍ଲଭ ଦାଶ
ଶ୍ରୀ ନଗେନ୍ଦ୍ର କୁମାର ମିଶ୍ର
ଶ୍ରୀମତୀ କୁମୁଦିନୀ ଜୀ
ଶ୍ରୀ କୈଳାସ ଚନ୍ଦ୍ର ସ୍ୱାଇଁ

ସଂଶୋଧନ :

ଶ୍ରୀ ମଦନ ମୋହନ ମହାନ୍ତି
ଶ୍ରୀ ନାରାୟଣ ସାହୁ
ଶ୍ରୀ ମାନସ ମିଶ୍ର
ଶ୍ରୀ କାର୍ତ୍ତିକ ଚନ୍ଦ୍ର ବେହେରା

ସଂଯୋଜନା :

ଡ. ନଳିନୀକାନ୍ତ ମିଶ୍ର
ଡ. ତିଳୋତ୍ତମା ସେନାପତି
ଡ. ସବିତା ସାହୁ

ପ୍ରକାଶକ :

ବିଦ୍ୟାଳୟ ଓ ଗଣଶିକ୍ଷା ବିଭାଗ, ଓଡ଼ିଶା ସରକାର

ମୁଦ୍ରଣ ବର୍ଷ :

୨୦୧୭
୨୦୧୯

ପ୍ରସ୍ତୁତି :

ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷା ନିର୍ଦ୍ଦେଶାଳୟ ଏବଂ ରାଜ୍ୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ଓ ପ୍ରଶିକ୍ଷଣ ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶା, ଭୁବନେଶ୍ୱର
ଓ
ଓଡ଼ିଶା ରାଜ୍ୟ ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରଣୟନ ଓ ପ୍ରକାଶନ ସଂସ୍ଥା, ଭୁବନେଶ୍ୱର

ମୁଦ୍ରଣ : ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ଉତ୍ପାଦନ ଓ ବିକ୍ରୟ, ଓଡ଼ିଶା, ଭୁବନେଶ୍ୱର

ଏହି ପୁସ୍ତକ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଦେ

ଆଜିର ଯୁଗ ହେଉଛି ବିଜ୍ଞାନ ଓ ପ୍ରଯୁକ୍ତି ବିଦ୍ୟାର ଯୁଗ । ତାତ୍ତ୍ୱିକ ଓ ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ – ଏ ଉଭୟ ଦିଗରେ ବିଜ୍ଞାନର ଅଗ୍ରଗତି ନିମନ୍ତେ ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରର ଏକ ବଳିଷ୍ଠ ଭୂମିକା ରହିଛି । ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରର ସରଳ ଗଣିତ (ଜ୍ୟାମିତି) ହେଉଛି ଏକ ଗୁରୁତ୍ବପୂର୍ଣ୍ଣ ଅଙ୍ଗ । ବିଦ୍ୟାଳୟ ସ୍ତରରୁ ସରଳ ଗଣିତ (ଜ୍ୟାମିତି) ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଏକ ଭିତ୍ତିଭୂମି ଉପରେ ପ୍ରତିଷ୍ଠିତ ହେବା ବାଞ୍ଛନୀୟ ।

ସାରା ବିଶ୍ୱରେ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ବିକାଶଶୀଳ ଦେଶମାନଙ୍କ ଭଳି ଭାରତ ମଧ୍ୟ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉଲ୍ଲେଖନୀୟ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିଛି । ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷାସ୍ତର ପାଇଁ ଜାତୀୟ ସ୍ତରରେ ପ୍ରସ୍ତୁତ National Curriculum Frame Work - 2005 ରେ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାକୁ ଅଧିକ ଗୁରୁତ୍ୱ ଦିଆଯାଇଛି । ତଦନୁଯାୟୀ ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ଓ ତାଲିମ ପରିଷଦ (NCERT), ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା ଓ ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରଣୟନ କରିଛନ୍ତି । ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷାସ୍ରୋତକୁ ଦୃଷ୍ଟି ଦେଇ ଓଡ଼ିଶା ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷା ନିର୍ଦ୍ଦେଶାଳୟ ଏବଂ ରାଜ୍ୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ପ୍ରତିଷ୍ଠାନ ଓ ପ୍ରଶିକ୍ଷଣ ପରିଷଦ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରସ୍ତୁତ ରାଜ୍ୟ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଆଧାରରେ ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀ ପାଇଁ ସିଲାବସ୍ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରି ତଦନୁଯାୟୀ ନୂତନ ଭାବରେ **ସରଳ ଗଣିତ (ଜ୍ୟାମିତି)** ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରକାଶ କରିଛନ୍ତି । ଅଭିଜ୍ଞ ଲେଖକମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ରଚନା କରାଯାଇ ପୁସ୍ତକର ପାଣ୍ଡୁଲିପିକୁ ରାଜ୍ୟସ୍ତରୀୟ ଏକ କର୍ମଶାଳାରେ କାର୍ଯ୍ୟରତ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷୟିତ୍ରୀଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପୁଙ୍ଖାନୁପୁଙ୍ଖ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ ସିଲାବସ୍ କମିଟିରେ ମଧ୍ୟ ପାଣ୍ଡୁଲିପିଟି ପଠିତ ଓ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି । ଆଲୋଚନା ଲବ୍ଧ ପରାମର୍ଶକୁ ପାଥେୟ କରି ପାଣ୍ଡୁଲିପିଟି ସଂଶୋଧିତ ହୋଇଛି ।

ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷା ନିର୍ଦ୍ଦେଶାଳୟ ଏବଂ ରାଜ୍ୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ପ୍ରତିଷ୍ଠାନ ଓ ପ୍ରଶିକ୍ଷଣ ଏହି ପୁସ୍ତକଟିର ଆବଶ୍ୟକୀୟ ସଂଶୋଧନ ପାଇଁ ଗଣିତ ବିଶାରଦ ଓ କାର୍ଯ୍ୟରତ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷୟିତ୍ରୀଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ୨୦୧୪ ମସିହାରେ ପ୍ରୟାସ କରିଥିଲେ ମଧ୍ୟ ଏହା ହୋଇ ନଥିଲା । ୨୦୧୬ ମସିହାରେ ଏହି ପୁସ୍ତକର ସଂଶୋଧନ କାର୍ଯ୍ୟ କରାଯାଇଛି । ତଥାପି ତଥ୍ୟଗତ ତ୍ରୁଟି ଯଦି ରହିଥାଏ, କର୍ତ୍ତୃପକ୍ଷଙ୍କୁ ଜଣାଇବେ ।

ସୂଚୀପତ୍ର

ଜ୍ୟାମିତିର ମୌଳିକ ଧାରଣା
(FUNDAMENTAL CONCEPTS OF GEOMETRY)

ଅଧ୍ୟାୟ
1

MG8AZX

1.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

Geometry ଶବ୍ଦଟି ଦୁଇଟି ଗ୍ରୀକ୍ ଶବ୍ଦ Geo (ପୃଥିବୀ) ଓ Metron (ମାପ)ରୁ ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଛି । ଜ୍ୟାମିତି ପଦଟିରେ 'ଜ୍ୟା'ର ଅର୍ଥ ପୃଥିବୀ ଓ 'ମିତି'ର ଅର୍ଥ ମାପ । ଜମି ମାପ କରିବାର ଆବଶ୍ୟକତାରୁ ଜ୍ୟାମିତିର ସୃଷ୍ଟି । ମାନବ ସଭ୍ୟତାର କ୍ରମବିକାଶ ସହ ଜ୍ୟାମିତିର ଅଭିବୃଦ୍ଧି ଜଡ଼ିତ ।

ବୈଦିକ ଯୁଗରେ ଭାରତୀୟ ଋଷିଗଣ ଯଜ୍ଞକୁଣ୍ଡ ଓ ପୂଜାବେଦୀ ନିର୍ମାଣ ଆଦି କାର୍ଯ୍ୟରେ ଉନ୍ନତ ଜ୍ୟାମିତିକ ଜ୍ଞାନର ପ୍ରୟୋଗ କରୁଥିଲେ । ଆନୁମାନିକ ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ 800 ରୁ ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ 500 ମଧ୍ୟରେ ଭାରତରେ ରଚିତ 'ଶୁଲ୍ବ ସୂତ୍ର' ହେଉଛି ଏକ ଜ୍ୟାମିତି-ଶାସ୍ତ୍ର । ଶୁଲ୍ବ ଅର୍ଥାତ୍ ଦଉଡ଼ି ସାହାଯ୍ୟରେ ମାପ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଭିନ୍ନ ସୂତ୍ରକୁ ନେଇ ଏହି ଶାସ୍ତ୍ର ସମୃଦ୍ଧ । ମହେନ୍‌ଜୋଦାରୋ, ହରପ୍‌ପା ସଭ୍ୟତାର ଧ୍ୱଂସାବଶେଷ ଓ ମିଶରୀୟ ସଭ୍ୟତାରେ ଜ୍ୟାମିତିକ ନକ୍‌ସାର ବହୁଳ ପ୍ରୟୋଗ ଦେଖିବାକୁ ମିଳେ ।

ପ୍ରାଥମିକ ଅବସ୍ଥାରେ ଜ୍ୟାମିତିର ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ଓ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ପରୀକ୍ଷାମୂଳକ ଉପାୟଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହେଉଥିଲା । ଅନୁମାନ କରାଯାଏ ଗ୍ରୀକ୍ ଗଣିତଜ୍ଞ **ଥାଲେସ୍** (ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ 640 - 546) ପ୍ରଥମେ ଜ୍ୟାମିତିରେ ତର୍କଶାସ୍ତ୍ରର ପ୍ରୟୋଗକରି ପୂର୍ବରୁ ଜଣାଥିବା ସୂତ୍ର ଓ ସିଦ୍ଧାନ୍ତଗୁଡ଼ିକର ଯୁକ୍ତିମୂଳକ ପ୍ରମାଣ ଦେବାର ପ୍ରୟାସ ଆରମ୍ଭ କରିଥିଲେ । ପରେ ଥାଲେସ୍‌ଙ୍କ ଶିଷ୍ୟ **ପିଥାଗୋରାସ୍** (ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ 580 - 500) ଓ ତାଙ୍କ ପରେ **ସକ୍ରେଟିସ୍** (ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ 468 - 390), **ପ୍ଲାଟୋ** (ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ 430 - 339) ଓ **ଆରିଷ୍ଟଟ୍‌ଲ** (ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ 384 - 322) ଆଦି ଗ୍ରୀକ୍ ବିଦ୍ୱାନଗଣ ଏହି ଧାରାକୁ ଆଗେଇ ନେଇଥିଲେ ।

କିନ୍ତୁ ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ ଚତୁର୍ଥ ଶତାବ୍ଦୀରେ ଆଲେକ୍‌ଜାଣ୍ଡ୍ରିୟା (ଗ୍ରୀସ୍)ର ଗଣିତଜ୍ଞ **ଇଉକ୍ଲିଡ୍** (Euclid) ତାଙ୍କ ଅନବଦ୍ୟ ଗ୍ରନ୍ଥ **Elements** ରେ ଦର୍ଶାଇଲେ ଯେ ଜ୍ୟାମିତିକ ସିଦ୍ଧାନ୍ତଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ତଥ୍ୟ ନୁହଁନ୍ତି, ଅଳ୍ପ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ତଥ୍ୟକୁ ସ୍ୱୀକାର କରିଗଲେ ବାକି ସମସ୍ତ ଜ୍ୟାମିତିକ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ଏହି ସ୍ୱୀକୃତ ତଥ୍ୟ (ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)ଗୁଡ଼ିକର

ପରିଣାମ ବୋଲି ତର୍କ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରତିପାଦନ କରାଯାଇପାରିବ । ପ୍ରଥମରୁ ମାନି ନେଇଥିବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକର ସାହାଯ୍ୟରେ ଯୁକ୍ତିମାଧ୍ୟମରେ ନୂତନ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ଉପନୀତ ହେବା ସମ୍ଭବ । ତେଣୁ ଇଉକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କୁ ଯଥାର୍ଥରେ **ଜ୍ୟାମିତିର ଜନକ** ବୋଲି ସ୍ୱୀକାର କରଯାଏ । ତାଙ୍କରି ନାମାନୁଯାୟୀ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ପଢ଼ାଯାଉଥିବା ଜ୍ୟାମିତିକୁ **ଇଉକ୍ଲିଡ଼ୀୟ ଜ୍ୟାମିତି (Euclidean Geometry)** କୁହାଯାଏ ।

ପରବର୍ତ୍ତୀ କାଳରେ ଭାରତୀୟ ଗଣିତଜ୍ଞମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ **ଭାସ୍କର** (ଜନ୍ମ 114 ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦ), **ଆର୍ଯ୍ୟଭଟ୍ଟ** (ଜନ୍ମ 580 ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦ) ଆଦି ଜ୍ୟାମିତି ଶାସ୍ତ୍ରକୁ ସମୃଦ୍ଧ କରିଥିଲେ ।

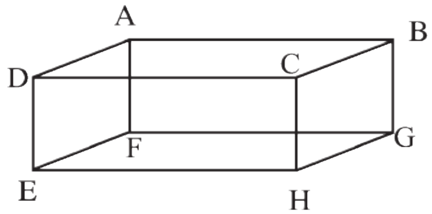
1.2 ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ ପଦ ଓ ତତ୍‌ସମ୍ପର୍କୀୟ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (Undefined terms and related postulates):

ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିଷୟରେ କେତେକ ବିଶେଷ ପ୍ରକାର ଶବ୍ଦ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅର୍ଥରେ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ଓ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ସେହି ବିଷୟ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ **ପଦ** (term) କୁହାଯାଏ । ବିନ୍ଦୁ, ରେଖା, ସମତଳ, ରଶ୍ମି, ତ୍ରିଭୁଜ, ବୃତ୍ତ ଆଦି ଜ୍ୟାମିତିଶାସ୍ତ୍ରର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ 'ପଦ' ।

ବିନ୍ଦୁ, ରେଖା ଓ ସମତଳ ବିଷୟରେ ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀମାନଙ୍କରେ ପଢ଼ିଅଛ । ଏହି ପଦ ତିନୋଟିକୁ **'ମୌଳିକ ପଦ'** ବା **ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ ପଦ' (undefined term)** ରୂପେ ଗ୍ରହଣ କରି, ଏହି ପଦ ଓ ତତ୍ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ସାହାଯ୍ୟରେ ନୂତନ ପଦଗୁଡ଼ିକର ସଂଜ୍ଞା ନିରୂପଣ କରାଯାଇଥାଏ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ବିନ୍ଦୁ, ରେଖା ଓ ସମତଳ – ଏହି ପଦମାନଙ୍କର ପୁନରାଲୋଚନା କରିବା ।

ବିନ୍ଦୁ (Point) : ତୁମେ ଗୋଟିଏ ଇଟା ଆଣ । ତାହାର ଏକ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ନିମ୍ନପ୍ରକାରେ ନାମକରଣ କର ।



(ଚିତ୍ର 1.1)

ଗୋଟିଏ ଇଟାର ଆଠଟି ଶୀର୍ଷ A, B, C, D, E, F, G, H ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ନମୁନା । ସେହିପରି AB,BC,CD, DA,DE, EF, HC, HG, GB, AF, EH ଏବଂ GF ଇଟାର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଧାର ।

ଇଟାଖଣ୍ଡର କେତୋଟି ପାର୍ଶ୍ୱ ଅଛି କହିଲ ? ସମୁଦାୟ 6 ଟି ସାମତଳିକ ପାର୍ଶ୍ୱ । ସେହି ଛଅ ଗୋଟି ସମତଳ ହେଲା ABCD, EFGH, ABGF, CDEH, ADEF ଏବଂ BCHG ।

ତେବେ କୁହ : ଗୋଟିଏ ଇଟାର କେତୋଟି ଶୀର୍ଷ, କେତୋଟି ଧାର ଓ କେତୋଟି ସମତଳ ଅଛି ?

ରେଖା ବା ସରଳରେଖା (Line) : ଚିତ୍ର (1.1)ରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଇଟାର ବାରଟି ଧାର ଅଛି । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଧାର ଏକ ରେଖାର ଅଂଶ ବିଶେଷ । ତୁମ ବହି ପୃଷ୍ଠାର ଧାର, କାଗଜ ଉପରେ ପେନ୍‌ସିଲ୍ ସାହାଯ୍ୟରେ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉଥିବା ଗାର, ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ରେଖା ବା ସରଳରେଖାର ସୀମିତ ଅଂଶର ନମୁନା । କିନ୍ତୁ ସରଳରେଖା ସୀମାହୀନ ଭାବରେ ଲମ୍ବିଥାଏ । ଏହାର ଆରମ୍ଭ ନାହିଁ କି ଶେଷ ନାହିଁ । ତେଣୁ ଅନ୍ୟ ଗୋଟିଏ ଗାର ଟାଣି ଏହାର ଦୁଇ ପ୍ରାନ୍ତରେ ତୀର ଚିହ୍ନ ଦେଇ ତାହା ମାଧ୍ୟମରେ ଆମେ ସରଳରେଖାର ଧାରଣା ଦେଉ । ନିମ୍ନସ୍ଥ ଚିତ୍ର ଦେଖ ।

(ଚିତ୍ର 1.2)

ଏହା ଏକ ସରଳରେଖାର ଚିତ୍ର । ସରଳରେଖାଟିର ନାମ "L" ଦିଆଯାଉ । ସରଳରେଖାର ଏହି ଚିତ୍ରରେ ପେନ୍‌ସିଲ୍ ମୁନ ସାହାଯ୍ୟରେ ଗୁଡ଼ିଏ ବିନ୍ଦୁ; ଯଥା– A, B, C ଇତ୍ୟାଦି ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଇପାରିବ । ଏହାକୁ ଦୃଷ୍ଟିରେ ରଖି ସରଳରେଖା ଓ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସମ୍ପର୍କ ବିଷୟରେ ଆମେ ଗୋଟିଏ କଥା ସ୍ୱୀକାର କରିନେବା ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ – 1 : ସରଳରେଖା ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସମାହାର ବା ସେଟ୍ ।

କାଗଜ ପୃଷ୍ଠାରେ ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ ନିଅ । ସ୍କେଲ୍‌ର ସରଳଧାରକୁ ଏହି ଦୁଇବିନ୍ଦୁ ସହ ଲଗାଇ ରଖି ତୁମେ ପେନ୍‌ସିଲ୍ ସାହାଯ୍ୟରେ କେତେଗୋଟି ସଳଖ ଗାର ଅଙ୍କନ କରିପାରିବ, ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ । ଜାଣିପାରିବ ଯେ ଏହିଭଳି ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ଗାର ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ । ତେଣୁ

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ– 2 : ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା କେବଳ ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଅବସ୍ଥିତ ।

ଅନ୍ୟଭାଷାରେ କହିଲେ, ଦୁଇ ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ କେବଳ ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ ।

A ଓ B, L ସରଳରେଖାର ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ, ଆମେ ସରଳରେଖାକୁ $\overleftrightarrow{AB}$ ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ନାମିତ କରିବା । (ଚିତ୍ର 1.2)କୁ ଦେଖ । ସେଟ୍ ଭାଷାରେ ଆମେ କହିପାରିବା :

$$L = \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{CA} = \overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{CB}$$

ତିନି ବା ତତୋଽଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ବିନ୍ଦୁ ଯଦି ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସେମାନଙ୍କୁ **ସରଳରୈଖିକ ବିନ୍ଦୁ ବା ଏକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ (Collinear Points)** କୁହାଯାଏ ।

ଯେଉଁ ସବୁ ବିନ୍ଦୁ ଗୋଟିଏ ସରଳ ରେଖାରେ ନଥା'ନ୍ତି, ସେମାନଙ୍କୁ ନୈକରେଖୀ ବା ଅଣସରଳରୈଖିକ ବିନ୍ଦୁ (non-collinear points) କୁହାଯାଏ ।

ସମତଳ (Plane): ଚିତ୍ର 1.1 ରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଇଟାର ଚିତ୍ର ଦେଖ । ଏହାର ଛଅଟି ପୃଷ୍ଠ ବା ପାର୍ଶ୍ୱ ଅଛି । ପ୍ରତ୍ୟେକ ପୃଷ୍ଠ ଗୋଟିଏ ସମତଳର ଏକ ଅଂଶର ନମୁନା । ପକ୍କାଘରର ଚଟାଣ, କଳାପଟାର ପୃଷ୍ଠ, କାଗଜର ପୃଷ୍ଠ ଆଦିରୁ ସମତଳର ଧାରଣା ମିଳେ । ଆମର ଆଲୋଚନା ପରିସର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ସମତଳ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସୀମାଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ ନୁହେଁ । ସମତଳ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆମର ପ୍ରାରମ୍ଭିକ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ହେଉଛି :

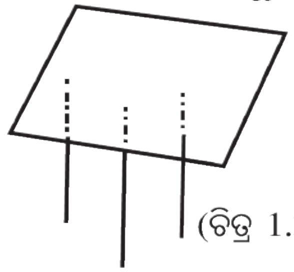
ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - 3 : ସମତଳ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ଅଟେ ।

ଗୋଟିଏ ସମତଳକୁ କିପରି ଚିହ୍ନିତ କରିବା ?

ଯେପରି ଗୋଟିଏ ରେଖାକୁ ଚିହ୍ନିତ କରିବାକୁ ହେଲେ, ସେଥିରେ ଥିବା ଅନ୍ତତଃ ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ ଆବଶ୍ୟକ, ସେହିପରି ଗୋଟିଏ ସମତଳକୁ ଚିହ୍ନିତ କରିବା ପାଇଁ ଅତିକମ୍‌ରେ ସେଥିରେ ଥିବା ତିନିଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଆବଶ୍ୟକ । ଆସ ଗୋଟିଏ ପରୀକ୍ଷା କରିବା :

ପରୀକ୍ଷା ପ୍ରଣାଳୀ : ଅଗ୍ରଭାଗ ମୁନିଆଁ ହୋଇଥିବା ଦୁଇଟି ସରୁକାଠି ଭୂମିରେ ଲମ୍ବଭାବରେ ପୋତି, ସେ ଦୁଇଟିର ଅଗ୍ରଭାଗରେ ଗୋଟିଏ ପୋଷ୍ଟକାର୍ଡ଼ ରଖିବାକୁ ଚେଷ୍ଟାକର । ପୋଷ୍ଟକାର୍ଡ଼ଟିକୁ ନ ଧରିଲେ ତାହା ସ୍ଥିର ହୋଇ ନ ରହି ପାରେ, ମାତ୍ର କାର୍ଡ଼ଟିକୁ ଆମେ ବିଭିନ୍ନ ଅବସ୍ଥାରେ ଧରି ରଖିଲେ, ତାହା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅବସ୍ଥାରେ କାଠି ଦୁଇଟିର

ଅଗ୍ରଭାଗ ସହ ଲାଗି ରହିବ । ପୋଷ୍ଟକାର୍ଡ଼ଟି ସମତଳର ସୂଚକ ଓ କାଠି ଦୁଇଟିର ଅଗ୍ରଭାଗ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ସୂଚକ । ତେଣୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଏକାଧିକ ସମତଳ ରହିଥିବାର ସୂଚନା ମିଳୁଛି । ବର୍ତ୍ତମାନ ସେହିଭଳି ତିନୋଟି କାଠିକୁ ଭୂମିରେ ପୋତି ରଖି ତା'ର ମୁନ ତିନୋଟି ଉପରେ ପୋଷ୍ଟ କାର୍ଡ଼ଟିଏ ରଖ । ଯଦି ମୁନ ତିନୋଟି ଏକ ସରଳ ରେଖାରେ ନ ଥାଏ ଦେଖିବ, ପୋଷ୍ଟକାର୍ଡ଼ଟି ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅବସ୍ଥାରେ ହିଁ ରହିବ ।



(ଚିତ୍ର 1.3)

ପୁନଶ୍ଚ ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ କାଠି **ତିନୋଟିର ଅଗ୍ରଭାଗ** ଯଦି ଏକ ସରଳରେଖାରେ ରହିଯାଏ, ତେବେ ପୋଷ୍ଟକାର୍ଡ଼ଟି ବିଭିନ୍ନ ଅବସ୍ଥାରେ କାଠିର ମୁନ ତିନୋଟିକୁ ଲାଗି ରହିବ । କାର୍ଡ଼ଟିକୁ ଭିନ୍ନ ଅବସ୍ଥାରେ ରଖିଲେ, ତାହା ଦୁଇଟି କାଠିର ମୁନକୁ ଲାଗି ରହିପାରେ ମାତ୍ର ତିନୋଟି କାଠିର ମୁନକୁ ନୁହେଁ । ଏହି ପରୀକ୍ଷା ଲବ୍ଧ ସୂଚନାକୁ ସମତଳର ଏକ ଧର୍ମ ଭାବେ ଗ୍ରହଣ କରିନେବା ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - 4 : ଯେକୌଣସି ତିନିଗୋଟି ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସମତଳ ଅବସ୍ଥିତ ।

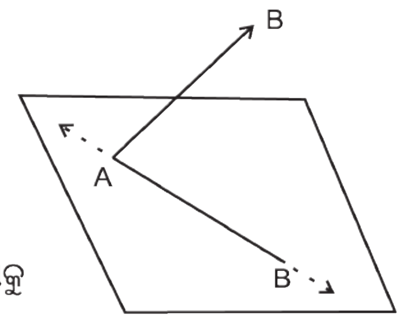
ଅନ୍ୟ ଅର୍ଥରେ କହିବାକୁ ହେଲେ, ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଅତିକମ୍‌ରେ ତିନିଗୋଟି ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ।

ଅନ୍ତତଃ **ଗୋଟିଏ ସମତଳର ନାମକରଣ ସେହି ସମତଳରେ ଥିବା ଯେକୌଣସି ତିନିଗୋଟି ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ ସାହାଯ୍ୟରେ କରାଯାଏ ।**

ଆସ, ଆଉ ଗୋଟିଏ ପରୀକ୍ଷା କରିବା :

ଗୋଟିଏ ସୂତାର ଦୁଇ ପ୍ରାନ୍ତକୁ ହାତରେ ଟାଣିଧର । ଏପରି ଅବସ୍ଥାରେ ସୂତାଟି ଏକ ରେଖାଂଶର ସୂଚନା ଦିଏ । ସେହିପରି ଧରି ରଖି ସୂତାର ଗୋଟିଏ ପ୍ରାନ୍ତକୁ କୌଣସି ଏକ ସମତଳ ପୃଷ୍ଠରେ (କଳାପଟା) ଚାପିଧର ଓ ଅନ୍ୟପ୍ରାନ୍ତଟିକୁ ଆଉ ହାତରେ ଟାଣିଧର । (ଚିତ୍ର 1.4) ଦେଖ ।

ସୂତାର ଗୋଟିଏ ପ୍ରାନ୍ତ A ସମତଳ ପୃଷ୍ଠକୁ ଲାଗି ରହିଛି ଓ ଅପର ପ୍ରାନ୍ତ B ଉପରକୁ ଟେକି ହୋଇ ରହିଛି । ଏହି ଅବସ୍ଥାରେ A ପ୍ରାନ୍ତ ଛଡ଼ା ସୂତାର ଅନ୍ୟ କୌଣସି ଅଂଶ ସମତଳକୁ ଲାଗି ରହିନାହିଁ । ବର୍ତ୍ତମାନ ସୂତାଟିକୁ ଏହିପରି ଅବସ୍ଥାରେ ଟାଣିଧରି ଏହାର B ପ୍ରାନ୍ତକୁ ଆସ୍ତେ ଅସ୍ତେ ସମତଳପୃଷ୍ଠ ଆଡ଼କୁ ନେଇଆସ । ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅବସ୍ଥାରେ A ପ୍ରାନ୍ତ ଛଡ଼ା ସୂତାର ଅନ୍ୟ କୌଣସି ଅଂଶ ସମତଳ ପୃଷ୍ଠକୁ ଲାଗି ରହୁନାହିଁ । ଯେତେବେଳେ B ପ୍ରାନ୍ତଟି ସମତଳ ପୃଷ୍ଠକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରିବ, ସେତେବେଳେ ସମଗ୍ର ସୂତାଟି ପୂର୍ବ ଭଳି ସଳଖ ଅବସ୍ଥାରେ ଥାଇ ସମତଳ ପୃଷ୍ଠକୁ ଲାଗି ରହିବ ।



(ଚିତ୍ର 1.4)

ସମତଳ ପୃଷ୍ଠ ଓ ସଳଖ ଭାବରେ ଟାଣି ଧରା ହୋଇଥିବା ସୂତା ଏ ଉଭୟର ସୀମାହୀନ ବିସ୍ତୃତି କଳ୍ପନା କରି ଆମେ ଯଥାକ୍ରମେ ଗୋଟିଏ ସମତଳ ଓ $\overleftrightarrow{AB}$ (AB ସରଳରେଖା)ର ଧାରଣା କରିପାରିବା । ତେଣୁ ଏ ପରୀକ୍ଷାରୁ ଆମେ ଆଉ ଗୋଟିଏ ବିଶେଷ ଧର୍ମର ପରିଚୟ ପାଇଲେ । ଏହାକୁ ଆମେ ଗୋଟିଏ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଭାବେ ଗ୍ରହଣ କରିନେବା ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ -5 : ଏକ ସମତଳସ୍ଥ ଦୁଇ ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ସରଳରେଖା ଉକ୍ତ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

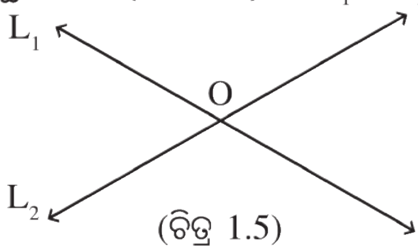
ସମତଳର ନାମ P ଦିଆଯାଉ ଓ ସମତଳସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ A ଓ B ହୁଅନ୍ତୁ । ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ $\overleftrightarrow{AB}$, P-ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ; ଅର୍ଥାତ୍ ସରଳରେଖାଟିର ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ P- ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

ଏହି କଥାକୁ ଆମେ ସେଟ୍ ଭାଷାରେ ଲେଖିପାରିବା $\overleftrightarrow{AB} \subset P$ ।

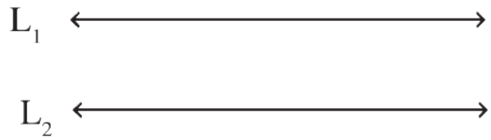
1.3 ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା (Parallel Lines) :

ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାର **ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁକୁ ସେମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁ (point of intersection)** କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର - 1.5 ରେ L_1 ଓ L_2 ସରଳରେଖାର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ।

ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ ନ କଲେ, ସେ ଦୁଇଟିକୁ ସମାନ୍ତର ରେଖା କୁହାଯାଏ (ଚିତ୍ର- 1.6)ରେ L_1 ଓ L_2 ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର ।



(ଚିତ୍ର 1.5)



(ଚିତ୍ର 1.6)

ତୁମେ କୁହ :

(a) ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାର ଅତିବେଶୀରେ କେତୋଟି ଛେଦବିନ୍ଦୁ ରହିପାରିବ ?

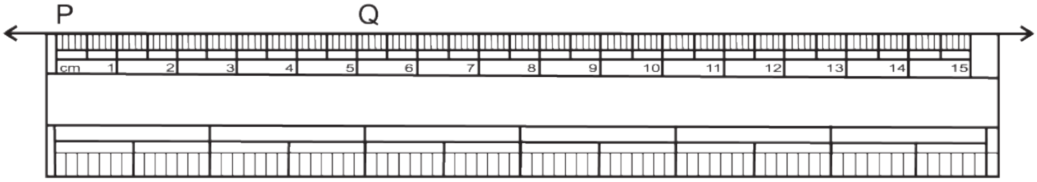
(b) ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ତିନୋଟି ସରଳରେଖାର ଅତି ବେଶୀରେ କେତୋଟି ଛେଦବିନ୍ଦୁ ରହିପାରିବ ?

(c) ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଚାରୋଟି ସରଳରେଖାର ଅତିବେଶୀରେ କେତୋଟି ଛେଦବିନ୍ଦୁ ରହିପାରିବ ?

1.4 ଦୁଇ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତା, ସରଳରେଖା ଓ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ :

ମନେକର P ଓ Q ଗୋଟିଏ ସମତଳ ପୃଷ୍ଠରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ । P ଓ Q ଦେଇ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସରଳରେଖା ସମ୍ଭବ ଓ ତାହା ଉକ୍ତ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । P ଠାରୁ Q ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଦୂରତା ମାପିବା ପାଇଁ ଆମେ ସାଧାରଣତଃ ସ୍କେଲ୍‌ଟିଏ ବ୍ୟବହାର କରୁ ଏବଂ P ଓ Q ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତା (P ଠାରୁ Q ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଦୂରତା)କୁ ଗୋଟିଏ ଏକକ ଅର୍ଥାତ୍ ସେଣ୍ଟିମିଟର ଏକକରେ ପ୍ରକାଶ କରିଥାଉ । ସ୍କେଲ୍‌ରେ ମାପି ଆମେ ଦେଖିଲୁ ଯେ P ଓ Q ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତା (ମନେକର) 5 ସେ.ମି.; ମାତ୍ର P ଓ Q ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ଯଦି ଅଭିନ୍ନ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ P ଓ Q ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତା ଶୂନ ହୁଏ । **ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ତା ନିଜଠାରୁ ଦୂରତା ଯେକୌଣସି ଏକକରେ ଶୂନ ହୁଏ ।**

ମନେରଖ : ଦୂରତା ମାପ ପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ସଂଖ୍ୟା ସର୍ବଦା ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା, ମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଯଦି ଅଭିନ୍ନ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ଦୂରତା ଶୂନ ହୁଏ । ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରରେ କହିଲେ ଦୂରତା ମାପ ପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ସଂଖ୍ୟା ସର୍ବଦା ଏକ ଅଣରଣାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା, ଅର୍ଥାତ୍ ଶୂନ ବା ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ।



ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମର ପରବର୍ତ୍ତୀ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ହେବ, (ଚିତ୍ର 1.7)

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ- 6 : ରୁଲାର୍ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (Ruler Postulate) : ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁ ଯୋଡ଼ାଗୁଡ଼ିକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଅଣରଣାତ୍ମକ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା ସହ ସଂପୃକ୍ତ, ଯାହାକୁ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତା କୁହାଯାଏ । ଦୁଇ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତା ଉପରେ ନିର୍ଭର କରି ଏକ ସରଳରେଖାର ବିନ୍ଦୁ ସମୂହ ଓ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ଏକ ବିଶେଷ ପ୍ରକାର ସମ୍ପର୍କ ସମ୍ଭବ ହୁଏ ।

ପରିଣାମ ସ୍ୱରୂପ :

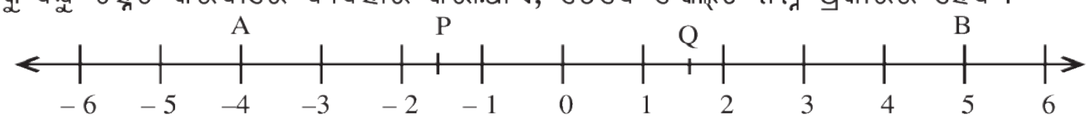
(i) ଏକ ସରଳରେଖାର ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସହ ସଂପୃକ୍ତ । ପରୋକ୍ଷରେ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଏହି ରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁସହ ସଂପୃକ୍ତ;

(ii) ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ଦୁଇ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତା, ସେମାନଙ୍କ ସହିତ ସଂପୃକ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରର ପରମମାନ ସହ ସମାନ ହୁଏ ।

ଟୀକା : P ଠାରୁ Q ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଦୂରତାକୁ PQ ବା QP ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ଏବଂ ଏକ ପ୍ରଚଳିତ ଏକକ ମାଧ୍ୟମରେ ଏହାର ଦୂରତାକୁ ସୂଚିତ କରାଯାଇଥାଏ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ PQ = 5 ସେ.ମି.ବା 0.05 ମିଟର । P ଓ Q ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ଯାହା, Q ଓ P ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ମଧ୍ୟ ତାହା, ତେଣୁ PQ = QP ।

1.4.1 ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଟିର ବ୍ୟାଖ୍ୟା :

ଦୂରତା ମାପିବା ପାଇଁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଏକକ (ଯଥା : ମିଲିମିଟର, ସେଣ୍ଟିମିଟର, ମିଟର ବା କିଲୋମିଟର) ବାଛି ନେବାକୁ ହୁଏ । ଆମ ଜ୍ୟାମିତି ପାଠ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଦୂରତା ମାପିବା ପାଇଁ ଆମେ ସାଧାରଣତଃ ସେଣ୍ଟିମିଟର ଏକକ ବ୍ୟବହାର କରିଥାଉ ଏବଂ ସେଥିପାଇଁ ଏକ ସ୍କେଲ୍‌ର ସାହାଯ୍ୟ ନେଇଥାଉ । ସ୍କେଲ୍‌ର ଧାର ସୀମିତ ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ;ମାତ୍ର ଯଦି ଗୋଟିଏ ଅସୀମ ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ ସ୍କେଲ୍‌ର ପରିକଳ୍ପନା କରାଯାଏ ଏବଂ ଋଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ସମେତ ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାକୁ ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କରିବାରେ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ, ତେବେ ସ୍କେଲ୍‌ଟି ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରର ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 1.8)

ଚିତ୍ରରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ସରଳରେଖାରେ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ କରାଯାଇଥିବା କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବିନ୍ଦୁକୁ ଗାରକାଟି ଦେଖାଇ ଦିଆଯାଇଅଛି । ଅନ୍ୟ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ ହୁଅନ୍ତି । ଯଥା : P ବିନ୍ଦୁଟି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା –1 ଓ –2 ମଧ୍ୟବ ´1 –1.5 । ମୋଟ ଉପରେ କହିବାକୁ ଗଲେ ଯେକୌଣସି ସରଳରେଖାରେ ବିନ୍ଦୁଗୋଟିକୁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଗୋଟିଏ ଓ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଗୋଟିକୁ ବିନ୍ଦୁ ଗୋଟିଏ ରହିବା ସମ୍ଭବ ।

ଏହା ଫଳରେ ସରଳରେଖାଟି ଗୋଟିଏ ଅସୀମ ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ ସ୍କେଲ୍‌ରେ ପରିଣତ ହେଲା । ଆମେ ବ୍ୟବହାର କରୁଥିବା ସ୍କେଲ୍ ଏହାର ଏକ ସୀମିତ ଅଂଶ । ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ବିନ୍ଦୁସମୂହ ଓ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ ମଧ୍ୟରେ ଏ ଯେଉଁ ସଂପର୍କ ବର୍ଣ୍ଣିତ ହେଲା, ଏହାକୁ **ଏକ–ଏକ–ସମ୍ପର୍କ** କୁହାଯାଏ ।

1.4.2 ଦୁଇ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତା :

ମନେକର ଚିତ୍ର 1.8 ରେ ସରଳରେଖାରେ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛନ୍ତି P ଓ Q ଏବଂ ଏହି ଦୁଇ ବିନ୍ଦୁ ସହ ସଂପୃକ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯଥାକ୍ରମେ p ଓ q । ତେଣୁ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ – 6 ଅନୁଯାୟୀ P ଓ Q ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତା PQ

= [p – q ର ପରମମାନ ଅର୍ଥାତ୍ $|p-q|$ [p – q ଯଦି p > q, q – p ଯଦି q – p]

ଯଦି P ଓ Q ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ସହ ସଂପୃକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ – 4 ଓ 5 ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ

$PQ = |-4-5| = |-9| = 9$ ଏକକ ହେବ ।

ମନେପକାଅ : x ର ପରମମାନ ଅର୍ଥାତ୍ $|x|$ = x ଯଦି x ଶୂନ ବା ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା

= – x ଯଦି x ଋଣାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା

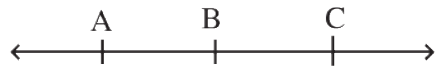
ମନେରଖ :

(i) ସରଳରେଖା ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁବିଶିଷ୍ଟ । (କାରଣ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ଏକ ଅସୀମ ସେଟ୍)

(ii) ସରଳରେଖା, ଆଦ୍ୟ ଓ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବିହୀନ । (କାରଣ ସବୁଠାରୁ ବଡ଼ ଓ ସବୁଠାରୁ ସାନ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା କିଏ, କହିହେବ ନାହିଁ)

(iii) ସରଳରେଖା ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଭାବରେ ପରିବ୍ୟାପ୍ତ । (ଅର୍ଥାତ୍ ସରଳରେଖାରେ ଥିବା କୌଣସି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ କିଛି ଫାଙ୍କ ନାହିଁ)

1.5 ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତିତା (Betweenness) :



(ଚିତ୍ର 1.9)

ଚିତ୍ର 1.9 କୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ଯଦି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ A, B ଓ C

(i) ପରସ୍ପରଠାରୁ ପୃଥକ୍ ଅଟନ୍ତି,

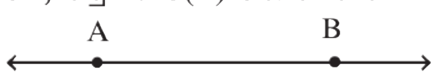
(ii) ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିଥାଆନ୍ତି

ଏବଂ (iii) AB + BC = AC ହୋଇଥାଏ, ତେବେ, B କୁ A ଓ C ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁ କୁହନ୍ତି ।

ସାଂକେତିକ ଭାଷାରେ ଏହା A-B-C ବା C-B-A ଲେଖାଯାଇଥାଏ । B ବିନ୍ଦୁ ବ୍ୟତୀତ A ଓ C ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅସଂଖ୍ୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁ ଅଛନ୍ତି । ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତିତା ସମ୍ପର୍କୀୟ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ସର୍ବପ୍ରଥମେ ମରିଜ୍ ପାଶ୍ଚ (Moritz Pasch) ପ୍ରକାଶ କରିଥିଲେ ।

ରେଖାଖଣ୍ଡ (Line Segment or Segment) :

ଚିତ୍ର 1.9 ର A, B ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ A ଓ B ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଛଡ଼ା ସରଳରେଖାର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁକୁ ବାଦ ଦେଲେ, ଚିତ୍ର 1.10(ii) ପରି ଦେଖାଦେବ । ଏହା ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଚିତ୍ର ।



ଚିତ୍ର 10(i)

ଚିତ୍ର 10(ii)

ସଂଜ୍ଞା : ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ A ଓ B ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌କୁ **"A ଓ B ଦ୍ୱାରା ନିରୂପିତ ରେଖାଖଣ୍ଡ"** କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହାକୁ $\overline{AB}$ ରୂପେ ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ସେଟ୍ ପରିଭାଷାରେ $\overline{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$ ।

ରେଖାଖଣ୍ଡର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ : A ଓ B କୁ $\overline{AB}$ ର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

ମନେରଖ : $\overline{AB}$ ର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ A ଓ B, କିନ୍ତୁ $\overleftrightarrow{AB}$ ର କୌଣସି ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ନ ଥାଏ ।

ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ : କୌଣସି ରେଖାଖଣ୍ଡର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତାକୁ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କୁହାଯାଏ। ତେଣୁ $\overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = AB; ଅର୍ଥାତ୍ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ A ଓ B ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତା ।

ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସର୍ବଦା ଏକ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା । $\overline{AB}$ କୁ AB ରେଖାଖଣ୍ଡ ବୋଲି ପଢ଼ାଯାଏ ।

ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ :

M, $\overline{AB}$ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ AM = MB ହେଲେ, M କୁ $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ । ସେ କ୍ଷେତ୍ରରେ AM = MB = $\frac{1}{2}$ AB ହୁଏ । **ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ।**

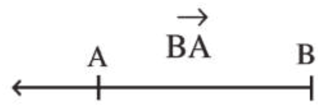
ରଶ୍ମି (Ray): A ଓ B ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ନିରୂପିତ ସରଳରେଖା ହେଉଛି $\overleftrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$ ହେଉଛି AB ରେଖାଖଣ୍ଡ ।

(ଚିତ୍ର 1.11)

AB ରେଖାଖଣ୍ଡ ($\overline{AB}$) ଓ AB ରେଖାରେ ଥିବା B ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସମାହାରକୁ AB ରଶ୍ମି (ray) କୁହାଯାଏ । AB ରଶ୍ମିକୁ ସାଂକେତିକ ଚିହ୍ନରେ $\overrightarrow{AB}$ ବୋଲି ଲେଖାଯାଏ । ସେହିପରି AB ରେଖାଖଣ୍ଡ ($\overline{AB}$) ଓ AB ରେଖାରେ A ର ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସମାହାରକୁ BA ରଶ୍ମି ($\overrightarrow{BA}$) କୁହାଯାଏ ।

$\overrightarrow{AB}$ କୁ 'AB ରଶ୍ମି' ବୋଲି ପଢ଼ାଯାଏ ।

[ଚିତ୍ର 1.12(i)]

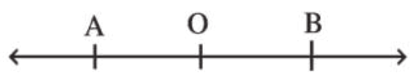


[ଚିତ୍ର 1.12(ii)]

$\overrightarrow{AB}$ ର **ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ (vertex)** ହେଉଛି A ଏବଂ $\overrightarrow{BA}$ ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି, B ।

ଏକ ରଶ୍ମିର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁକୁ **ଆଦ୍ୟବିନ୍ଦୁ (Initial Point)** ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

ମନେକର A - O - B ଅର୍ଥାତ୍ O ହେଉଛି, A ଓ B ର ଗୋଟିଏ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁ ।



[ଚିତ୍ର 1.12(iii)]

ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ $\overrightarrow{OA}$ ଓ $\overrightarrow{OB}$ କୁ **ବିପରୀତ ରଶ୍ମି (Opposite rays)** କୁହାଯାଏ । $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB} = \overleftrightarrow{AB}$

ନିଜେ କର ତୁମ ଖାତାରେ ତିନୋଟି ରଶ୍ମି $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ଓ $\overrightarrow{OC}$ ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରି

(a) କୌଣସି ଦୁଇଟି ରଶ୍ମି ବିପରୀତ ରଶ୍ମି ହୋଇ ନ ଥିବେ ।

(b) ଦତ୍ତ ରଶ୍ମିଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ରଶ୍ମି ପରସ୍ପରର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି ହୋଇଥିବେ ।

ଦୁଇଟି ରଶ୍ମି ଏକ ସରଳରେଖାର ଅଂଶ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କୁ **ଏକରେଖୀ ବା ସରଳରୈଖିକ ରଶ୍ମି (Collinear rays)** କୁହାଯାଏ । ଦୁଇଟି ରଶ୍ମି ସରଳରୈଖିକ ନ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କୁ **ନୈକରେଖୀ ରଶ୍ମି (non -collinear rays)** କୁହାଯାଏ ।

ନିଜେ କର

1. (a) ତୁମ ଖାତାରେ ତିନୋଟି ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ X,Y,Z ଚିହ୍ନଟ କର ଓ $\overline{XY}$, $\overrightarrow{YZ}$, $\overleftrightarrow{XZ}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(b) ତୁମ ଖାତାରେ ତିନୋଟି ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ A, B, ଓ C ଚିହ୍ନଟ କର । $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ରେଖାଖଣ୍ଡ, ରଶ୍ମି ଓ ସରଳରେଖା ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ :

ଚିତ୍ର 1.8 ରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ AB ରେଖାଖଣ୍ଡର ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ 'AB ରଶ୍ମି'ରେ ଏବଂ AB ରଶ୍ମିର ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ 'AB ସରଳରେଖା' ରେ ରହିଛନ୍ତି । ତେଣୁ ସେଟ୍ ଭାଷାରେ $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$ । ସେହିପରି $\overline{BA} \subset \overrightarrow{BA} \subset \overleftrightarrow{AB}$

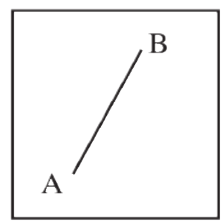
(ନିଜେ କର) କିଏ କାହାର ଉପସେଟ୍ ଲେଖ ।

(a) $\overline{PQ}$ ଓ $\overrightarrow{PQ}$ (b) $\overleftrightarrow{CD}$ ଓ $\overline{CD}$ (c) $\overline{AB}$ ଓ $\overrightarrow{BA}$

(ii) A - P - B ହେଲେ, $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ବିପରୀତ ରଶ୍ମିର ନାମ ଲେଖ ।

1.6 ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ (Convex set) :

ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଆକୃତିବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ କାଗଜ ଫର୍ଦ୍ଦ ନିଅ । (ଚିତ୍ର 1.13 ଦେଖ) ମନେକର A ଓ B ଏଥିରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ । $\overline{AB}$ ଅଙ୍କନ କର । ରେଖାଖଣ୍ଡଟି ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଭାବେ କାଗଜ ପୃଷ୍ଠାରେ ରହୁଛି । ଏହାର ଅର୍ଥ ହେଉଛି $\overline{AB}$ ର ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ କାଗଜ ପୃଷ୍ଠାରେ ହିଁ ରହୁଛନ୍ତି । (ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ −5) । ଯଦି ଆମେ କାଗଜ ପୃଷ୍ଠାର ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌କୁ S କହିବା ତେବେ ଆମେ $\overline{AB}$ କୁ S ର ଗୋଟିଏ ଉପସେଟ୍ (Subset) କହିପାରିବା । ସେଟ୍ ଭାଷାରେ ଲେଖିପାରିବା : $\overline{AB} \subset S$

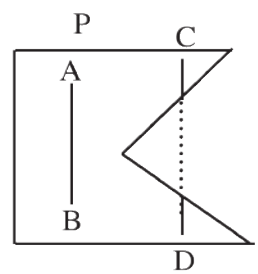


(ଚିତ୍ର 1.13)

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ, A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଦୁଇଟିକୁ ଆମେ କାଗଜ ପୃଷ୍ଠାର ଯେକୌଣସି ସ୍ଥାନରେ ନେଲେ ମଧ୍ୟ $\overline{AB}$ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଭାବରେ ପୃଷ୍ଠା ମଧ୍ୟରେ ରହୁଛି । ଏହାର ଅର୍ଥ ହେଲା A ଓ B, କାଗଜ ପୃଷ୍ଠାର ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ମଧ୍ୟ ସେମାନଙ୍କର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ସେହି କାଗଜପୃଷ୍ଠାରେ ହିଁ ରହୁଛି । ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB} \subset S$ ଏହା ସବୁବେଳେ ସତ୍ୟ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ କାଗଜ ପୃଷ୍ଠାଟିକୁ କାଟି ଚିତ୍ର 1.14 ରେ ଦେଖାଇ ଦିଆଯାଇଥିବା ଭଳି ଆକୃତିବିଶିଷ୍ଟ କର । ଏହି କଟା କାଗଜର ବିନ୍ଦୁମାନେ ଯେଉଁ ସେଟ୍ ଗଠନ କଲେ, ତାହାର ନାମ P ଦିଆଯାଉ ।

କଟା କାଗଜରେ ଚିତ୍ରରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ହେଲା ଭଳି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ A ଓ B ନିଅ । A ଓ B ର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB}$ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଭାବେ କଟା କାଗଜ ପୃଷ୍ଠାରେ ରହିପାରୁଛି ।



(ଚିତ୍ର 1.14)

କଟାକାଗଜ ପୃଷ୍ଠାରେ, ଚିତ୍ରରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ହେଲା ଭଳି ଆଉ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ C ଓ D ନିଅ । C ଓ D ର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ତୁମେ କଟା କାଗଜ ପୃଷ୍ଠାରେ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଭାବେ ଆଙ୍କି ପାରିବ ନାହିଁ (ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ) । ଏହାର ଅର୍ଥ ହେଲା $\overline{CD}$ ର ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ କଟା କାଗଜ ପୃଷ୍ଠାରେ ନାହାଁନ୍ତି । ସେଟ୍ ଭାଷାରେ ମଧ୍ୟ ଆମେ କହିପାରିବା ଯେ $\overline{CD}$, P ର ଉପସେଟ୍ ନୁହେଁ । (କଟା କାଗଜ ପୃଷ୍ଠାର ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଆମେ P ନାମ ଦେଇଛେ – ମନେପକାଅ)

ତେଣୁ ଆମେ ଏହି ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ଉପନୀତ ହେଲେ ଯେ, A ଓ B ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ସର୍ବଦା କଟା କାଗଜ ପୃଷ୍ଠାରେ ରହିପାରିବ ନାହିଁ । (କେବଳ କେତେକ ବିଶେଷ ଅବସ୍ଥାରେ ହିଁ $\overline{AB}$ କଟା କାଗଜ ପୃଷ୍ଠାରେ ରହୁଛି ।) ତେଣୁ $\overline{AB} \subset P$, ଏହା ସବୁବେଳେ ସତ୍ୟ ନୁହେଁ ।

ଉପରୋକ୍ତ ଆଲୋଚନାରୁ ଆମେ ଜାଣିବାକୁ ପାଇଲେ ଯେ, ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ S (ଅର୍ଥାତ୍ ପ୍ରଥମେ ନେଇଥିବା କାଗଜପୃଷ୍ଠାର ବିନ୍ଦୁସମୂହ) ଏଭଳି ଏକ ବିଶେଷ ଧର୍ମର ଅଧିକାରୀ, ଯାହା ଅନ୍ୟ ଗୋଟିଏ ସେଟ୍ P (କଟା କାଗଜ ପୃଷ୍ଠାର ବିନ୍ଦୁସମୂହ)ର ନାହିଁ । ତେଣୁ S ସେଟ୍‌ଟିକୁ ଆମେ ଗୋଟିଏ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ନାମ ଦେବା ତାହା ହେଉଛି– **ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ।**

ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍‌କୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିବା ।

ସଂଜ୍ଞା – ସେଟ୍ S ର ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ A ଓ B ହେଲେ, ଯଦି $\overline{AB} \subset S$ ହୁଏ, ତେବେ S କୁ ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ।

ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ P (କଟା କାଗଜ ପୃଷ୍ଠାର ବିନ୍ଦୁସମୂହ) ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ନୁହେଁ ।

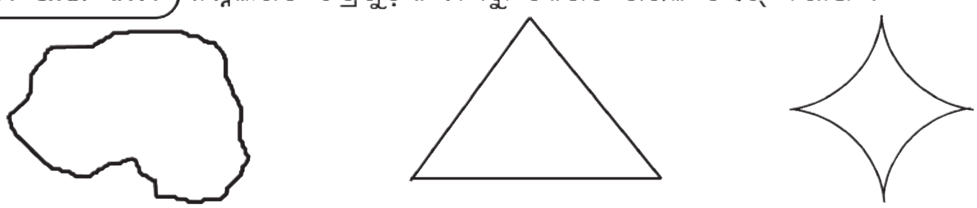
ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍‌ର ଆଉ କେତେଗୋଟି ଉଦାହରଣ :

(ଚିତ୍ର 1.15)

(i) ସରଳରେଖାରେ ଥିବା ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ପାଇଁ $\overline{AB}$ ମଧ୍ୟ L ର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ । ତେଣୁ ସରଳରେଖା ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ।

(ii) ସେହିପରି ରଶ୍ମି, ସମତଳ ଆଦି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ।

ତୁମ ପାଇଁ କାମ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ଦର୍ଶାଅ ।



(i) (ii) (iii)

ଚିତ୍ର (1.16)

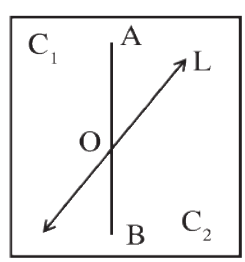
ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତୋଟି ତଥ୍ୟ:(i) ଦୁଇଟି ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍‌ର ଛେଦ ମଧ୍ୟ ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ।

(ii) ଦୁଇଟି ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍‌ର ସଂଯୋଗ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ନ ହୋଇପାରେ ।

1.7 ସରଳରେଖାର ପାର୍ଶ୍ୱ (Side of a Line) :

'ପାର୍ଶ୍ୱ' ବା ପାଖ ଶବ୍ଦର ବ୍ୟବହାର ଆମେ ଅବସ୍ଥିତି ବର୍ଣ୍ଣନା କରିବା ପାଇଁ କରିଥାଉ । 'ପାର୍ଶ୍ୱ' ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଧାରଣାକୁ ଜ୍ୟାମିତିରେ ପ୍ରୟୋଗ କରିବା ନିମନ୍ତେ ଆମର ଗୋଟିଏ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଦରକାର । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆସ, ଗୋଟିଏ ପରୀକ୍ଷା କରିବା ।

ଏକ ପୃଷ୍ଠାରେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା L ଅଙ୍କନ କର । ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର ଦେଖ । ସେହି ଚିତ୍ରରେ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ L ସରଳରେଖା ଉପରେ ନାହାନ୍ତି, ସେମାନଙ୍କୁ ଆମେ ଦୁଇଟି ସେଟ୍ C_1 ଓ C_2ର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ କରିପାରିବା (ଚିତ୍ର 1.17)।



(ଚିତ୍ର 1.17)

ତୁମେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଜାଣିପାରିବ ଯେ C_1 ଓ C_2 ଦୁଇଟି ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ (Convex set) ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଏହି କାଗଜ ପୃଷ୍ଠାରେ ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ A ଓ B ଏପରି ନିଅ, ଯେପରିକି A ବିନ୍ଦୁଟି C_1 ସେଟ୍‌ରେ ଓ B ବିନ୍ଦୁଟି C_2 ସେଟ୍‌ରେ ରହିବ । A ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗକାରୀ AB ରେଖାଖଣ୍ଡ ($\overline{AB}$) ଅଙ୍କନ କର । ତୁମେ ଦେଖିପାରିବ ଯେ $\overline{AB}$, L କୁ ଛେଦ କରୁଛି । L ସରଳରେଖା ଓ AB ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ O କୁ ସେମାନଙ୍କର **ଛେଦବିନ୍ଦୁ (Intersecting point)** କୁହାଯାଏ ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ 7: ସମତଳ – ବିଭାଜନ (Plane Separation) ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ :

ମନେକର L ସରଳରେଖାଟି P ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । ସମତଳର ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ L ସରଳରେଖାରେ ନାହାନ୍ତି, ସେଗୁଡ଼ିକ ଦୁଇଟି ସେଟ୍(C_1 ଓ C_2) ର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ହୋଇଥାନ୍ତି, ଏବଂ

(i) C_1 ଏବଂ C_2 ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍,

(ii) ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ A ଓ B ଯଥାକ୍ରମେ C_1 ଓ C_2 ସେଟ୍‌ରେ ରହିଲେ,

$\overline{AB}$, L ସରଳରେଖାକୁ ଛେଦ କରେ ।

ଉପରୋକ୍ତ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ,

1. (i) C_1 ଓ C_2 ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଅଣଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ।

   (ii) C_1 ଓ C_2 ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍, ଅର୍ଥାତ୍ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଉଭୟ C_1 ଓ C_2ରେ ରହିପାରିବ ନାହିଁ ।

2. ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ-7 କୁ ନେଇ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରିବ ଯେ, ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଭାବରେ ରହିଛନ୍ତି । ଅର୍ଥାତ୍ ସରଳରେଖା ପରି ସମତଳରେ ମଧ୍ୟ କୌଣସି ଫାଙ୍କ ନାହିଁ । ସମତଳର ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅସଂଖ୍ୟ ସରଳରେଖା ଓ ରଶ୍ମି ରହିଛନ୍ତି ।

ସରଳରେଖାର ପାର୍ଶ୍ୱ :

କୌଣସି ସରଳରେଖାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱର ନାମକରଣ ସେହି ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁକୁ ନେଇ କରାଯାଇପାରିବ । L ସରଳରେଖାର ଯେଉଁ ପାର୍ଶ୍ୱରେ A ବିନ୍ଦୁ ଅଛି, ତାକୁ L ସରଳରେଖାର A ପାର୍ଶ୍ୱ ଏବଂ ଯେଉଁ ପାର୍ଶ୍ୱରେ B ବିନ୍ଦୁ ଅଛି, ତାକୁ L ସରଳରେଖାର B ପାର୍ଶ୍ୱ କୁହାଯାଏ ।

ବି.ଦ୍ର.: $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ବା $\overrightarrow{AB}$ ରଶ୍ମିର ଦୁଇପାର୍ଶ୍ୱ କହିଲେ ଆମେ $\overleftrightarrow{AB}$ ସରଳରେଖାର ଦୁଇ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ହିଁ ବୁଝିବା ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(a)

1. ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରଶ୍ନ ପାଖରେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତର ଲେଖାଯାଇଅଛି । ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାରେ ---- ବିନ୍ଦୁ ଥାଏ । [(a) ଗୋଟିଏ (b) ଦୁଇଟି (c) ଅସଂଖ୍ୟ]

(ii) ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡର ----- ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଥାଏ । [(a) ଗୋଟିଏ (b) ଦୁଇଟି (c) ଅସଂଖ୍ୟ]

(iii) ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ----- (ମାତ୍ର) ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଥାଏ [(a) ଗୋଟିଏ (b) ଦୁଇଟି (c) ଅସଂଖ୍ୟ]

(iv) ଏକ ରଶ୍ମିର ----- ଆଦ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଥାଏ । [(a) ଗୋଟିଏ (b) ଦୁଇଟି (c) ଅସଂଖ୍ୟ]

2. ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ଠିକ୍ ଥିଲେ କୋଠରି ମଧ୍ୟରେ ✓ ଚିହ୍ନ ଓ ଭୁଲ୍ ଥିଲେ ✗ ଚିହ୍ନ ଦିଅ ।

(i) ସରଳରେଖାର ଅସଂଖ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଥାଏ । ☐

(ii) ଏକ ରଶ୍ମିର ଗୋଟିଏ ଆଦ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଥାଏ । ☐

(iii) ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଥାଏ । ☐

(iv) A ଓ B ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁ P ହେଲେ, ଏହା $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେବ । ☐

(v) ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁର ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁ ଥାଏ । ☐

(vi) A, B ଓ C ଏକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\overrightarrow{AB}$ ଓ $\overrightarrow{BC}$ ଏକରେଖୀ ରଶ୍ମି ଅଟନ୍ତି । ☐

(vii) $\overleftrightarrow{AB}$ ର A ଓ B ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ O ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\overrightarrow{OA}$ ଏବଂ $\overrightarrow{OB}$ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି ଅଟନ୍ତି । ☐

3. (a) ପରସ୍ପରଠାରୁ ଭିନ୍ନ ଚାରୋଟି ଦତ୍ତବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ତିନିଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନ ଥିଲେ, ସେମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା କେତେଗୋଟି ରେଖାଖଣ୍ଡ ନିରୂପିତ ହୋଇପାରିବ ?

(b) ପରସ୍ପରଠାରୁ ଭିନ୍ନ ଚାରୋଟି ଦତ୍ତବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରୁ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଏକରେଖୀ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା କେତେଗୋଟି ସରଳରେଖା ନିରୂପିତ ହୋଇପାରିବ ?

4. A, B ଓ C ଏକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ । AB = 8 ଏକକ ଓ AC = 4 ଏକକ ହେଲେ, ନିମ୍ନୋକ୍ତ କେଉଁଟି ସମ୍ଭବ ?

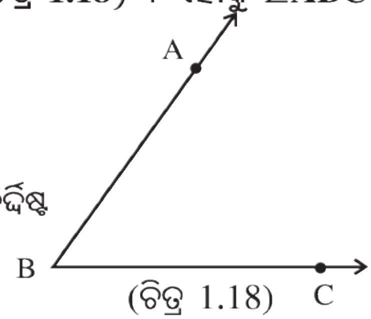
(a) B-A-C (b) A-C-B (c) A-B-C

5. ସାଧାରଣ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ସାତଟି ରଶ୍ମି ଦିଆଯାଇଥିଲେ, ସେଥିରେ ଅତିବେଶୀ କେତେଯୋଡ଼ା ବିପରୀତ ରଶ୍ମି ରହିବେ ?

6. ପ୍ରଦତ୍ତ ପଦଗୁଡ଼ିକର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରଦାନ କର : (a) ସରଳରେଖାର ପାର୍ଶ୍ୱ (b) ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍

1.8 କୋଣ (Angle)

ସଂଜ୍ଞା : ତିନୋଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ A, B ଓ C ଯଦି ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ନ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ $\overrightarrow{BA}$ ଓ $\overrightarrow{BC}$ ରଶ୍ମି ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗ (Union)କୁ ଗୋଟିଏ କୋଣ କୁହାଯାଏ (ଚିତ୍ର 1.18) । ଏହାକୁ ∠ABC ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ଲେଖାଯାଏ ଏବଂ 'ABC' କୋଣ' ବୋଲି ପଢ଼ାଯାଏ ।



(ଚିତ୍ର 1.18)

ସେଟ୍ ପରିଭାଷାରେ $\angle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$

ସୂଚନା : (i) A, B ଓ C ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ ହେତୁ, ସେହି ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମତଳ ABC ରେ ଅବସ୍ଥିତ, ତେଣୁ ∠ABC ମଧ୍ୟ ଏହି ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(ii) B ବିନ୍ଦୁକୁ ∠ABC ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ, $\overrightarrow{BA}$ ଓ $\overrightarrow{BC}$ ରଶ୍ମିଦ୍ୱୟକୁ ∠ABC ର ବାହୁ କୁହାଯାଏ ।

ନିଜେ କର (1) A, B ଓ C ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ନଥିବା ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ, ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଯୋଡ଼ା ରଶ୍ମିର ସଂଯୋଗର ଜ୍ୟାମିତିକ ଚିତ୍ରର ନାମକରଣ କର ।

(i) $\overrightarrow{AB}$ ଓ $\overrightarrow{AC}$ (ii) $\overrightarrow{BA}$ ଓ $\overrightarrow{BC}$ (iii) $\overrightarrow{CB}$ ଓ $\overrightarrow{CA}$

(iv) $\overrightarrow{AB}$ ଓ $\overrightarrow{BA}$ (v) $\overrightarrow{BC}$ ଓ $\overrightarrow{CB}$ (vi) $\overrightarrow{AC}$ ଓ $\overrightarrow{CA}$

2. (a) $\angle PQR$ ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁର ନାମ ଲେଖ ।

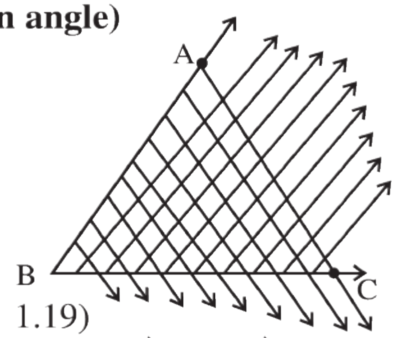
(b) $\angle ABC$ ର କେତୋଟି ବାହୁ ଅଛନ୍ତି ? ସେମାନଙ୍କର ନାମ ଲେଖ ।

(c) $\overrightarrow{AB}$ ଓ $\overrightarrow{AC}$ ପରସ୍ପର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି ହେଲେ, $\overrightarrow{AB}$ ଓ $\overrightarrow{AC}$ ର ସଂଯୋଗରେ କ'ଣ ସୃଷ୍ଟି ହେବ ?

(d) A ଶୀର୍ଷ ଏବଂ $\overrightarrow{AB}$ ଓ $\overrightarrow{AC}$ ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ କୋଣର ନାମ କ'ଣ ?

1.8.1 କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଓ ବହିର୍ଦେଶ (Interior & Exterior of an angle)

ଚିତ୍ର 1.19 ରେ $\angle ABC$ ଅଙ୍କିତ ହୋଇଛି । ଏହା ABC ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଏହି ସମତଳର ଯେଉଁ ସବୁ ବିନ୍ଦୁ ଉଭୟ $\overrightarrow{BC}$ ର A ପାର୍ଶ୍ୱ ଓ $\overrightarrow{BA}$ ର C ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ, ସେହିସବୁ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଗଠିତ । ଅର୍ଥାତ୍ ସେହି ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ହେଉଛି $\angle ABC$ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ । ଏହାକୁ ରଶ୍ମିମାନଙ୍କର ଛେଦ ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ କରାଯାଇଅଛି । ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର ଦେଖ ।



(ଚିତ୍ର 1.19)

ABC ସମତଳର ଯେଉଁ ସବୁ ବିନ୍ଦୁ $\angle ABC$ ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ନାହାନ୍ତି କିମ୍ବା $\overrightarrow{BA}$ ବା $\overrightarrow{BC}$ ରଶ୍ମିରେ ନାହାନ୍ତି, ସେହି ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌କୁ $\angle ABC$ ର ବହିର୍ଦେଶ କୁହାଯାଏ ।

ଟୀକା : (i) ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍‌ର ସଂଜ୍ଞା ଅନୁଯାୟୀ କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍, କିନ୍ତୁ ବହିର୍ଦେଶ ନୁହେଁ ।

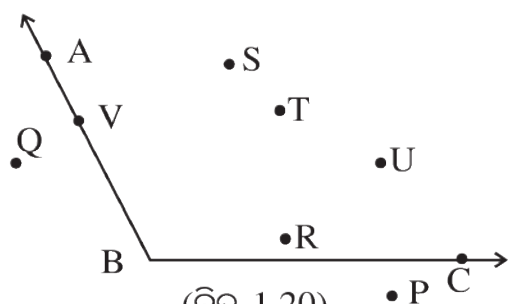
(ii) କୋଣ ନିଜେ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ନୁହେଁ ।

(iii) $\angle ABC$, $\angle ABC$ ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଓ $\angle ABC$ ର ବହିର୍ଦେଶ – ଏହି ତିନୋଟି ସେଟ୍ ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ (Mutually disjoint) ଅର୍ଥାତ୍ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଦୁଇଟି ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ନାହିଁ ।

(ନିଜେ କର) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରକୁ ଦେଖି A,B,C,P,Q,R,S,T,U,V ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ $\angle ABC$ ର ଉପରିସ୍ଥ, ଅନ୍ତର୍ଦେଶସ୍ଥ ଓ ବହିର୍ଦେଶସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକର ନାମ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ପୂରଣ କର ।

ଉପରିସ୍ଥ	ଅନ୍ତର୍ଦେଶସ୍ଥ	ବହିର୍ଦେଶସ୍ଥ

ସାରଣୀ – 1.1



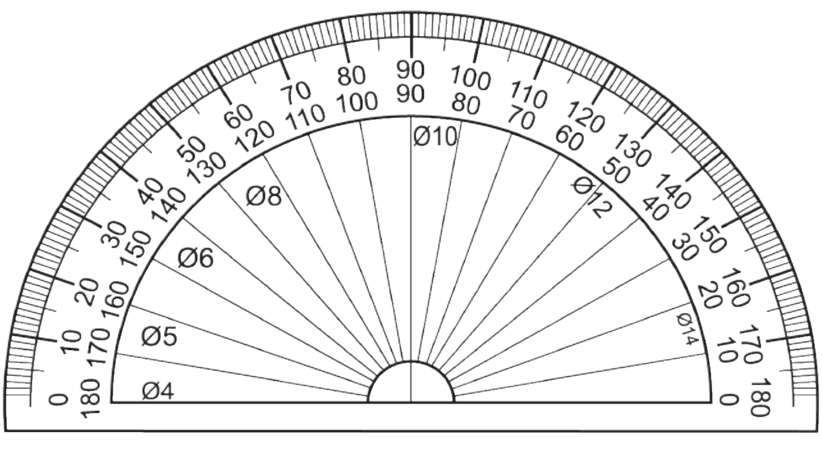
(ଚିତ୍ର 1.20)

1.8.2 କୋଣର ମାପ (Measure of an angle) :

$m\angle ABC$ ହେଉଛି, $\angle ABC$ କୋଣର ପରିମାଣ, ଯାହା ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା;

ମାତ୍ର $\angle ABC$ ହେଉଛି ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ।

ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ ଜାଣିବା ପାଇଁ ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ, ତାହା ତୁମେ ତଳଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିଛ । ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ସାହାଯ୍ୟରେ ଦତ୍ତମାପର ଏକ କୋଣ କିପରି ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହୁଏ, ତାହା ମଧ୍ୟ ତୁମେ ଜାଣିଛ ।



(ଚିତ୍ର 1.21)

ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ସାହାଯ୍ୟରେ କୋଣମାପିବା ଓ କୋଣ ଅଙ୍କନ କରିବା ଧାରଣାରୁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଗ୍ରହଣ କରିବା ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ-8 : ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (Protractor Postulate) :

ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣ ସହିତ 0 ରୁ ବଡ଼ ଓ 180 ରୁ ସାନ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସଂପୃକ୍ତ, ଯାହାକୁ କୋଣର ପରିମାଣ କୁହାଯାଏ । $m\angle ABC$ ଏପରି ଭାବରେ ନିରୂପିତ ହୁଏ, ଯେପରି :

(i) 0 ଠାରୁ ବଡ଼ ଓ 180 ରୁ ସାନ ଯେକୌଣସି ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x ପାଇଁ ABC ସମତଳରେ $\overrightarrow{BC}$ ର ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବିସ୍ତୃତ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ରଶ୍ମି $\overrightarrow{BM}$ ଅବସ୍ଥିତ, ଯେପରି $m\angle MBC = x$ ହେବ ।

(ସାଧାରଣତଃ $m\angle ABC = x^0$, ଏହିପରି ଲେଖାଯାଏ ।)

(ii) $\angle ABC$ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ P ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ, $m\angle ABC = m\angle ABP + m\angle PBC$ ହେବ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :

ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟରେ

1. (i) କୋଣ ପରିମାଣକୁ 0 ରୁ ବଡ଼ ଓ 180 ରୁ ସାନ ବୋଲି ସ୍ୱୀକାର କଲେ, **ଲବ୍ଧ ପରିମାଣକୁ କୋଣର ଡିଗ୍ରୀମାପ** କୁହାଯାଏ । ସମ୍ପୃକ୍ତ ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟରକୁ ଡିଗ୍ରୀ–ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର କୁହାଯାଏ । ଏହି ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟରରେ $\angle ABC$ ର ପରିମାଣ x ହେଲେ, ଆମେ ଲେଖୁ: $m\angle ABC = x^0$ (x ଡିଗ୍ରୀ) । ଅର୍ଥାତ୍ $\angle ABC$ ର ମାପ x^0 । ଡିଗ୍ରୀ ଏକକକୁ ଆହୁରି କ୍ଷୁଦ୍ର ଏକକରେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ, ଯଥା

   $1^0 = 60$ ମିନିଟ୍ ଏବଂ 1 ମିନିଟ୍ $= 60$ ସେକେଣ୍ଡ ।

   ସଂକ୍ଷେପରେ $1^0 = 60'$ ଓ $1' = 60''$

   (ii) କୋଣ ପରିମାଣକୁ 0 ରୁ ବଡ଼ ଓ π (Pai) (ପାଇ) ରୁ ସାନ ବୋଲି ସ୍ୱୀକାର କଲେ, ଲବ୍ଧ ପରିମାଣକୁ **'ରେଡ଼ିଆନ୍ ମାପ'** କୁହାଯାଏ ।

   π ରେଡ଼ିଆନ୍ = 180 ଡିଗ୍ରୀ

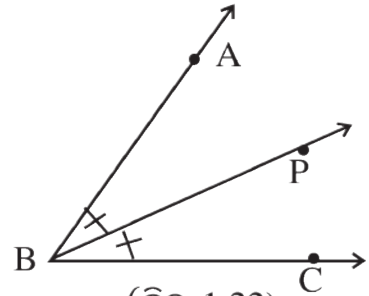
   (π ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା, ଯାହାର ଆସନ୍ନମାନ 3.1415)

2. ଏକାଧିକ କୋଣ ପରିମାଣ ମିଶି 180^0 ରୁ ଅଧିକ ହୋଇପାରେ, ମାତ୍ର ଆମ ଆଲୋଚନାରେ ଉପୁଜୁଥିବା ଯେକୌଣସି କୋଣର ମାପ 0^0 ରୁ 180^0 ମଧ୍ୟରେ ।

1.8.3 କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ (Angle-bisector) : $\angle ABC$ ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ P ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ।

ଯଦି $m\angle ABP = m\angle PBC$ ହୁଏ, ତେବେ $\overrightarrow{BP}$ କୁ $\angle ABC$ର **ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ** କୁହାଯାଏ । (ଚିତ୍ର 1.22)

ଏ ସ୍ଥଳରେ $m\angle ABP = m\angle PBC = \frac{1}{2} m\angle ABC$



(ଚିତ୍ର 1.22)

1.9 ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର କୋଣ (Different types of angles) :

(A) ପରିମାଣ ଭେଦରେ କୋଣର ପ୍ରକାର ଭେଦ :

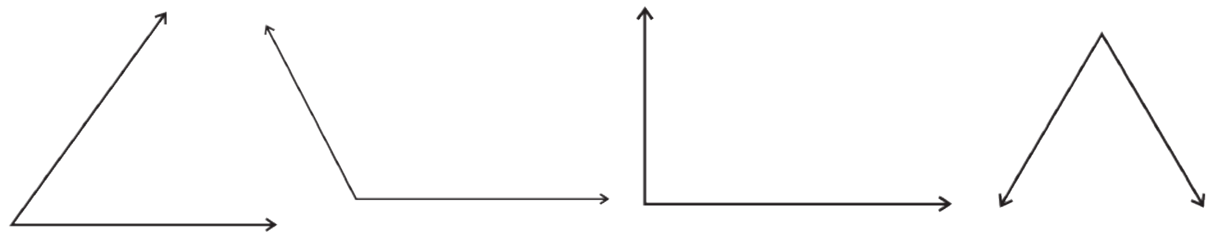
ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ

(i) 90^0 ରୁ କମ୍ ହେଲେ, ତାହାକୁ **ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ (acute angle)** କୁହାଯାଏ ।

(ii) 90^0 ସହ ସମାନ ହେଲେ, ତାହାକୁ **ସମକୋଣ (right angle)** କୁହାଯାଏ ।

(iii) 90^0 ରୁ ଅଧିକ ହେଲେ, ତାହାକୁ **ସ୍ଥୂଳକୋଣ (obtuse angle)** କୁହାଯାଏ ।

ନିଜେ କର ଚିତ୍ର 1.23 ରେ ଥିବା କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ସାହାଯ୍ୟରେ ମାପ ଓ ପରବର୍ତ୍ତୀ ସାରଣୀରେ କୋଣର ମାପ ଓ କେଉଁ ପ୍ରକାର କୋଣ ଲେଖ ।



(ଚିତ୍ର 1.23)

କୋଣ	(1)	(2)	(3)	(4)
କୋଣର ମାପ				
କେଉଁ ପ୍ରକାର କୋଣ				

ସାରଣୀ – 1.2

(B) ଦୁଇଟି କୋଣ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ :

(i) ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 90^0 ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କୁ ପରସ୍ପର ଅନୁପୂରକ (Complementary) କୋଣ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ : 20^0, 30^0, 63^0 ପରିମାଣବିଶିଷ୍ଟ କୋଣମାନଙ୍କର ଅନୁପୂରକ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ 70^0, 60^0, ଓ 27^0 ଅଟେ ।

ସେହିପରି ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ x^0 ହେଲେ, ତାହାର ଅନୁପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣ $(90 - x)^0$ ହେବ ।

(ii) **ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0 ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କୁ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ (Supplementary) କୋଣ କୁହାଯାଏ ।**

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ : 27^0, 60^0, 135^0 ଓ x^0 ପରିମାଣବିଶିଷ୍ଟ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିପୂରକ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ 153^0, 120^0, 45^0 ଓ $(180 - x)^0$ ଅଟେ ।

ମନେରଖ : କେବଳ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣର ଅନୁପୂରକ କୋଣ ଥାଏ, ମାତ୍ର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିପୂରକ କୋଣ ଥାଏ ।

ତୁମ ପାଇଁ କାମ ଦତ୍ତ ସାରଣୀରେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ କୋଣର ନାମ ଓ ସେମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ଦିଆଯାଇଅଛି । କୋଣଗୁଡ଼ିକର ଅନୁପୂରକ ଓ ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ସାରଣୀଟି ପୂରଣ କର । ଉତ୍ତର ସମ୍ଭବ ନ ହେଲେ 'x' ଚିହ୍ନ ଦିଅ ।

କୋଣ	କୋଣର ପରିମାଣ	ଅନୁପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣ	ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣ
$\angle ABC$	25^0		
$\angle PQR$	68^0		
$\angle CDE$	90^0		
$\angle EFG$	168^0		

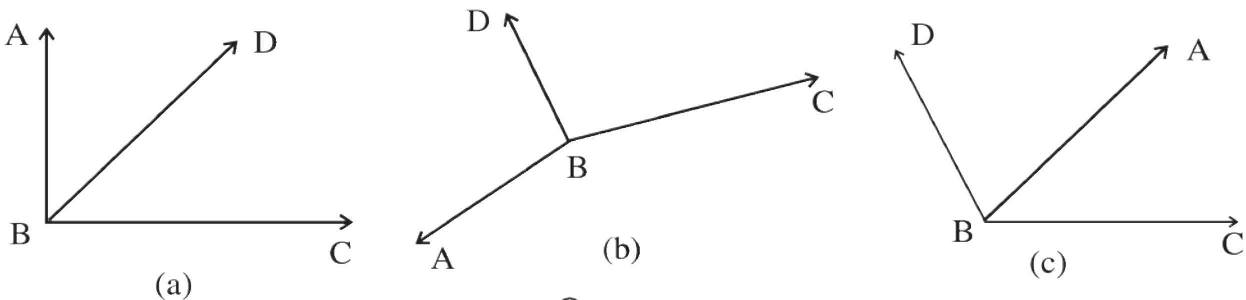
ସାରଣୀ -1.3

(C) ସନ୍ନିହିତ କୋଣ (Adjacent Angles) :

ଚିତ୍ର 1.24 (a) ଓ (b) କୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ,

(i) $\angle ABD$ ଓ $\angle CBD$ ର ସାଧାରଣ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ B ଓ ସାଧାରଣ ବାହୁ $\overrightarrow{BD}$,

(ii) $\angle ABD$ ଓ $\angle CBD$ ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶଦ୍ୱୟର କୌଣସି ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ନାହିଁ, ଅର୍ଥାତ୍ ସେମାନେ ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍ ।



(ଚିତ୍ର 1.24)

ଏପରିସ୍ଥଳେ $\angle ABD$ ଓ $\angle CBD$ କୁ ସନ୍ନିହିତ କୋଣ କୁହାଯାଏ । ସନ୍ନିହିତ କୋଣଦ୍ୱୟର ସାଧାରଣ ବାହୁ $\overrightarrow{BD}$ ଏବଂ ଅନ୍ୟ ଦୁଇବାହୁ $\overrightarrow{BA}$ ଓ $\overrightarrow{BC}$ କୁ ସେମାନଙ୍କର **ବହିଃସ୍ଥ ବାହୁ (exterior side)** କୁହାଯାଏ ।

ମନେରଖ : ଦୁଇଟି କୋଣ ସନ୍ନିହିତ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର

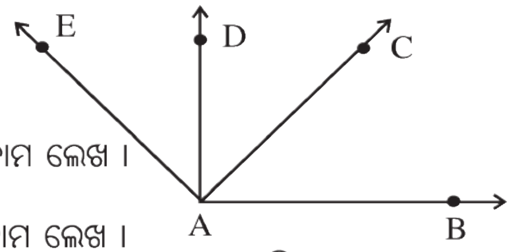
(i) ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ ;

(ii) ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ବାହୁ ଏବଂ

(iii) ସେମାନଙ୍କର ଅନ୍ତର୍ଦେଶଦ୍ୱୟ ଅଣଛେଦୀ ହୁଅନ୍ତି ।

ସୂଚନା : ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0 ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କୁ **ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣ** (Adjacent Supplmentary Angles) କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର 1.24 (c) ରେ $\angle ABD$ ଓ $\angle CBD$ ର B ସାଧାରଣ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ, $\overrightarrow{BD}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ, କୋଣଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଅଣଛେଦୀ ନୁହନ୍ତି । ତେଣୁ $\angle ABD$ ଓ $\angle CBD$ ସନ୍ନିହିତ ନୁହନ୍ତି । କିନ୍ତୁ ଏଠାରେ $\angle ABD$ ଓ $\angle ABC$ ସନ୍ନିହିତ । କାହିଁକି ?



(ଚିତ୍ର 1.25)

(*ନିଜେ କର*) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.25 ଦେଖି ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

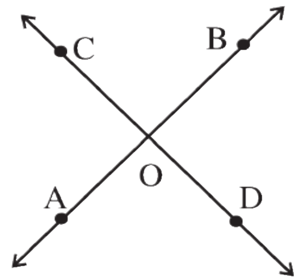
(i) $\overrightarrow{AC}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ ଥିବା ଦୁଇଯୋଡ଼ା ସନ୍ନିହିତ କୋଣର ନାମ ଲେଖ ।

(ii) $\overrightarrow{AD}$ ସାଧାରଣ ବାହୁଥିବା ଦୁଇଯୋଡ଼ା ସନ୍ନିହିତ କୋଣର ନାମ ଲେଖ ।

(D) **ପ୍ରତୀପ କୋଣ (Vertically Opposite Angles)** :

ଚିତ୍ର 1.26 ରେ $\overleftrightarrow{AB}$ ଓ $\overleftrightarrow{CD}$ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି । ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଉଥିବା ଚାରୋଟି କୋଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକର ।

ଏଠାରେ $\angle AOC$ ଏବଂ $\angle BOD$ କୁ ପରସ୍ପର ପ୍ରତୀପ କୋଣ କୁହାଯାଏ । ସେହିପରି $\angle BOC$ ଏବଂ $\angle DOA$ ମଧ୍ୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତୀପ କୋଣ ଅଟନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 1.26)

(*ନିଜେ କର*) $\overleftrightarrow{AB}$ ଓ $\overleftrightarrow{CD}$ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିବା ତିନୋଟି ଭିନ୍ନ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର । ଦୁଇଯୋଡା ପ୍ରତୀପ କୋଣକୁ ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ସାହାଯ୍ୟରେ ମାପି ସାରଣୀଟି ପୂରଣ କର ।

ଚିତ୍ର ନଂ	$m\angle AOC$	$m\angle BOD$	$m\angle BOC$	$m\angle AOD$
1				
2				
3				

ସାରଣୀ - 1.4

ଏହି ସାରଣୀରୁ କ'ଣ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରୁଛ ଲେଖ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(b)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(a) ଗୋଟିଏ କୋଣର ବାହୁଦ୍ୱୟର ---- ଗୋଟିଏ ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଅଛି ।

(b) ଗୋଟିଏ କୋଣର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁକୁ କୋଣର ---- ବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

(c) ସାଧାରଣ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଓ ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶଦ୍ୱୟ ଅଣଛେଦୀ ହେଲେ, କୋଣ ଦୁଇଟିକୁ ---- କୋଣ କୁହାଯାଏ ।

(d) A-P-B ଏବଂ $\overrightarrow{PQ}$ ଓ $\overleftrightarrow{AB}$ ର ଏକମାତ୍ର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ P ହେଲେ, ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣଦ୍ୱୟର ନାମ

---- ଓ ---- ।

(e) $\overrightarrow{PQ}$ ଓ $\overleftrightarrow{AB}$ ର ଏକମାତ୍ର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ P ହେଲେ, ଗଠିତ କୋଣ ଦୁଇଟିକୁ ---- ପରିପୂରକ କୋଣ କୁହାଯାଏ ।

(f) $\overrightarrow{OA}$ ଓ $\overrightarrow{OC}$ ର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି ଯଥାକ୍ରମେ $\overrightarrow{OB}$ ଓ $\overrightarrow{OD}$ ହେଲେ,

(i) $\angle AOC$ ର ପ୍ରତୀପ ----- ।

(ii) $\angle BOC$ ର ପ୍ରତୀପ ---- ।

2. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(a) π ରେଡ଼ିଆନ୍ = ---- ଡିଗ୍ରୀ ।

(b) ଏକ ଡିଗ୍ରୀ = ---- ମିନିଟ୍ ।

(c) ଏକ ମିନିଟ୍ = ---- ସେକେଣ୍ଡ ।

(d) π ର ଆସନ୍ନମାନ = ---- ।

(e) x^0 ପରିମାଣବିଶିଷ୍ଟ କୋଣର ଅନୁପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣ ---- ।

(f) x^0 ପରିମାଣବିଶିଷ୍ଟ କୋଣର ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣ ---- ।

(g) x^0 ପରିମାଣବିଶିଷ୍ଟ କୋଣର ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣ ---- ।

3. ଏକ ସମତଳରେ ଅଙ୍କିତ $\angle ABC$, ଉକ୍ତ ସମତଳକୁ କେତୋଟି ଉପସେଟ୍‌ରେ ବିଭକ୍ତ କରେ ? ସେମାନଙ୍କର ନାମ ଲେଖ ।

4. (a) ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ, ତାହାର ଅନୁପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣ ସହ ସମାନ ହେଲେ, କୋଣଟିର ପରିମାଣ କେତେ ?

(b) ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ ତାହାର ଅନୁପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣର ଦୁଇଗୁଣରୁ 15^0 କମ୍ ହେଲେ, ତାହାର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(c) ଯେଉଁ କୋଣର ପରିମାଣ ତାହାର ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣ ସହ ସମାନ, ତାହାର ପରିମାଣ କେତେ ?

(d) ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ ତାହାର ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣର 3 ଗୁଣରୁ 20^0 କମ୍ ହେଲେ ତାହାର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

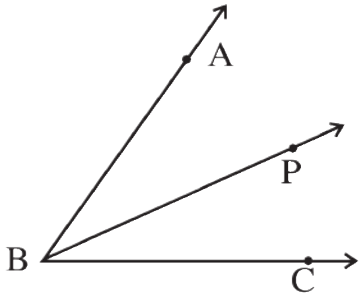
5. **କେତେଗୁଡ଼ିଏ କୋଣର ପରିମାଣ ଦିଆଯାଇଅଛି । ତାହାକୁ ଦେଖି ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକର ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।**

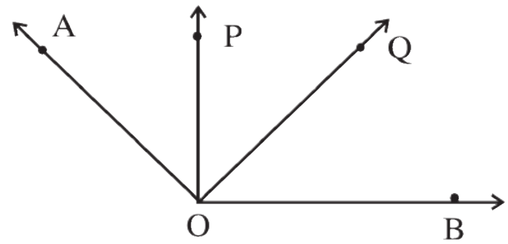
$m\angle A = 63^0$, $m\angle B = 127^0$, $m\angle C = 147^0$, $m\angle D = 53^0$, $m\angle E = 95^0$, $m\angle F = 117^0$, $m\angle G = 85^0$, $m\angle H = 33^0$ ହେଲେ ,

(i) $\angle A$ ଓ ---- ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ । (ii) $\angle H$ ଓ --- ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ ।

(iii) ---- ଓ $\angle D$ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ । (iv) ---- ଓ $\angle G$ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ ।

6. ଚିତ୍ର 1.27 ଦେଖି ଉତ୍ତର ଦିଅ ।





(ଚିତ୍ର 1.27)

ଚିତ୍ର (a) ରେ (i) $m\angle ABP = 22^0$, $m\angle PBC = 38^0$ ହେଲେ, $m\angle ABC$ କେତେ ?

(ii) $m\angle ABC = 58^0$, $\overrightarrow{BP}$, $\angle ABC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ହେଲେ, $m\angle PBC$ କେତେ ?

ଚିତ୍ର (b) ରେ $m\angle AOB = 117^0$ ଓ $m\angle AOP = m\angle POQ = m\angle QOB$ ହେଲେ, $m\angle POQ$, $m\angle AOQ$ ଓ $m\angle POB$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ଚିତ୍ର ଦ୍ୱାରା ନିମ୍ନସ୍ଥ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ବୁଝାଅ ।

(a) ପ୍ରତୀପ କୋଣ (b) ସନ୍ନିହିତ କୋଣ (c) ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣ

8. କାହାକୁ କହନ୍ତି ବୁଝାଇ ଲେଖ ।

(a) ଅନୁପୂରକ ଓ ପରିପୂରକ କୋଣ (b) କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଓ ବହିର୍ଦେଶ ।

9. $\overrightarrow{OC}$ ଓ $\overleftrightarrow{AB}$ ର ଏକମାତ୍ର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ O ।

ଯଦି (i) $m\angle AOC = 2x^0$, $m\angle BOC = 3x^0$ ଏବଂ

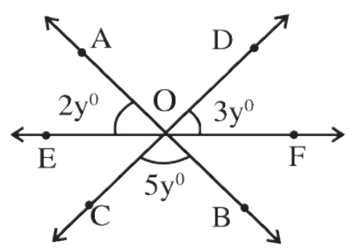
(ii) $m\angle AOC = (x + 20)^0$, $m\angle BOC = (3x - 8)^0$ ହୁଏ

ତେବେ x ର ମାନ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସ୍ଥିର କର ।

10. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରୁ y ର ମାନ ସ୍ଥିର କର,

ଯେତେବେଳେ $m\angle AOE = 2y^0$, $m\angle DOF = 3y^0$,

ଏବଂ $m\angle BOC = 5y^0$



(ଚିତ୍ର 1.28)

*****

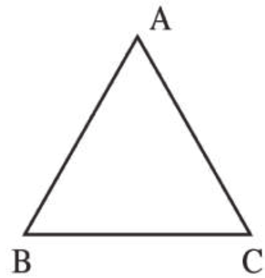
ତ୍ରିଭୁଜ (TRIANGLE)

ଅଧ୍ୟାୟ **2**

MGH72K

2.1 ତ୍ରିଭୁଜ, ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ, ବାହୁ ଓ କୋଣ :

ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥାନ କରୁ ନ ଥିବା ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱାରା କୋଣ ଗଠନ ହେବା କଥା ପୂର୍ବରୁ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ବର୍ତ୍ତମାନ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ନ ଥିବା ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ଅନ୍ୟ ଏକ ପ୍ରକାର ଚିତ୍ର ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।



(ଚିତ୍ର 2.1)

A, B ଓ C ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥାନ ନ କଲେ, A ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ନେଇ $\overline{AB}$ (ରେଖାଖଣ୍ଡ AB) ଅଙ୍କନ କରିପାରିବା । ସେହିପରି B ଓ C ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ନେଇ $\overline{BC}$ (ରେଖାଖଣ୍ଡ BC) ଏବଂ C ଓ A ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ନେଇ $\overline{CA}$ (ରେଖାଖଣ୍ଡ CA) ଅଙ୍କନ କରିବା ସମ୍ଭବ । ଏହି ତିନି ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ଚିତ୍ରଟି ହେଉଛି ତ୍ରିଭୁଜ ABC ର ଚିତ୍ର । (ଚିତ୍ର 2.1 ଦେଖ) ।

ସଂଜ୍ଞା :

ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ, A, B ଓ C ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥାନ କରୁ ନ ଥିଲେ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ ଏହି ସେଟ୍‌ତ୍ରୟର ସଂଯୋଗକୁ ତ୍ରିଭୁଜ ABC କୁହାଯାଏ ଓ ସଙ୍କେତରେ Δ ABC (ବା ABC Δ)ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ ।

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ହୋଇଥିବା ହେତୁ ସେମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ । ସେଟ୍ ପରିଭାଷାରେ ଆମେ ଲେଖିପାରିବା : $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$

A, B ଓ C ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟକୁ ΔABC ର **କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁ ବା ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ (Vertex)** କୁହାଯାଏ; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ କୁ ΔABCର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ **ବାହୁ (Side)** କୁହାଯାଏ; $\angle$ABC, $\angle$BCA ଓ $\angle$CAB କୁ ΔABC ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ **କୋଣ (Angle)** କୁହାଯାଏ ଏବଂ ସଂକ୍ଷେପରେ ଯଥାକ୍ରମେ $\angle$B, $\angle$C, $\angle$A ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ ।

$\angle A$ କୁ $\overline{BC}$ ବାହୁର **ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣ (opposite angle)** ଓ $\overline{BC}$ ବାହୁକୁ $\angle A$ ର **ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ (opposite side)** କୁହାଯାଏ । ସେହିପରି

$\angle B$ ର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ $\overline{CA}$ ଏବଂ $\overline{CA}$ ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣ $\angle B$, $\angle C$ ର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ $\overline{AB}$ ଏବଂ $\overline{AB}$ ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣ $\angle C$ ।

$\angle A$ କୁ ବାହୁ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ର **ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ (included angle)** କୁହାଯାଏ । ସେହିପରି –

$\overline{BC}$ ଓ $\overline{BA}$ ର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ $\angle B$ ଏବଂ $\overline{CA}$ ଓ $\overline{CB}$ ର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ $\angle C$ ।

$\angle A$ ଓ $\angle B$ ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ ବାହୁ $\overline{AB}$ ର **ସଂଲଗ୍ନ କୋଣ** କୁହାଯାଏ, ସେହିପରି –

$\overline{CA}$ ର ସଂଲଗ୍ନ କୋଣ ହେଲେ $\angle C$ ଓ $\angle A$ ଏବଂ $\overline{BC}$ ର ସଂଲଗ୍ନ କୋଣ ହେଲେ, $\angle B$ ଓ $\angle C$ । $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ $\angle A$ ର **ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁ** ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

2.2 ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଓ ବହିର୍ଦେଶ (Interior and Exterior of the Triangle):

'ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନ ଥିବା ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ମଧ ଦେଇ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସମତଳ ସମ୍ଭବ', ଏହା ତୁମେ ପୂର୍ବରୁ ଜାଣିଛ । ଏଣୁ ତ୍ରିଭୁଜଟିଏ ସର୍ବଦା ଏକ ସମତଳ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବ । କଳାପଟାର ସମତଳରେ ବା ତୁମ ଖାତାର ପୃଷ୍ଠା (ଏକ ସମତଳର ଅଂଶ) ଉପରେ ତ୍ରିଭୁଜଟିଏ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ ।

ତୁମ ପାଇଁ କାମ

ଚିତ୍ର 2.2ରେ ଥିବା $\angle ABC$ ଓ ଏହି ସମତଳରେ ଥିବା P,Q,R,S,T,U,V,M,N, ଓ W ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଦେଖି ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ । A, B, C ଏବଂ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଆଠଟି ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ –

(i) କେଉଁ ବିନ୍ଦୁ $\angle A$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ?

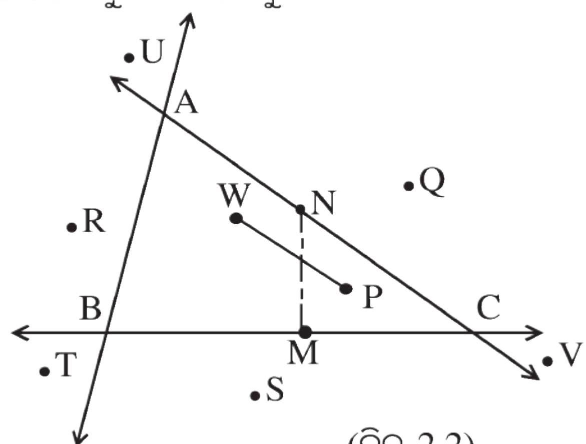
(ii) କେଉଁ ବିନ୍ଦୁ $\angle B$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ?

(iii) କେଉଁ ବିନ୍ଦୁ $\angle C$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ?

(iv) କେଉଁ ବିନ୍ଦୁ $\angle A$, $\angle B$ ଓ $\angle C$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ?

(v) କେଉଁ ବିନ୍ଦୁ $\angle A$, $\angle B$ ଓ $\angle C$ କୌଣସି କୋଣର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ନୁହେଁ ?

(iv) କେଉଁ ବିନ୍ଦୁ ΔABC ଉପରିସ୍ଥ ?



(ଚିତ୍ର 2.2)

ମନେରଖ : ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁ $\angle A$, $\angle B$ ଓ $\angle C$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ତାହା ΔABC ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ ।

ଏଠାରେ ନାମିତ ହୋଇଥିବା ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେବଳ P ଓ W, ΔABC ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ । ଆହୁରି ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ଅଛନ୍ତି ଯେଉଁଗୁଡ଼ିକ ΔABC ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଅଟନ୍ତି । **ΔABC ର ସମସ୍ତ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁର ସେଟ୍‌କୁ ଏହାର (ΔABCର) ଅନ୍ତର୍ଦେଶ (Interior)** କୁହାଯାଏ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରାଯାଇପାରେ ଯେ ΔABC ର ସମତଳ (କଳାପଟାର ସମତଳ ବା ତୁମ ବହି ପୃଷ୍ଠାର ସମତଳ) ଉପରେ ΔABC ବା ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ନ ଥିବା ଆହୁରି ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ଅଛନ୍ତି । ସେମାନଙ୍କୁ ΔABC ର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ । (ଯଥା, ଚିତ୍ର 2.2 ରେ Q, R, S, T, U, V ବିନ୍ଦୁମାନ ΔABC ର ବହିଃସ୍ଥ) । **ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌କୁ ଏହାର ବହିର୍ଦେଶ (Exterior) କୁହାଯାଏ ।** ଏଣୁ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ ଏକ ସମତଳରେ ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କଲେ ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ସମୂହ ତିନୋଟି ସେଟ୍‌ରେ ପରିଣତ ହୁଅନ୍ତି ଓ ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ –

(i) ତ୍ରିଭୁଜ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍, (ii) ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଏବଂ (iii) ତ୍ରିଭୁଜର ବହିର୍ଦେଶ ।

ପ୍ରଥମ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ଚିତ୍ର 2.2 ରେ ΔABC ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଥିବା କୌଣସି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ P ଓ W ର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ, ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{PW}$ ଅଙ୍କନ କଲେ ଦେଖିବ ଯେ, ଏହା ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ରହିଯାଉଛି । ତେଣୁ **ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ।** (ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍‌ର ସଂଜ୍ଞା ମନେପକାଅ)

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ । ΔABC କହିଲେ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଏକ ସେଟ୍‌କୁ ବୁଝାଏ, ଯାହାକି ଏହାର $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ ବାହୁରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଏକାଠି ନେଇ ଗଠିତ । ଚିତ୍ର 2.2 ରେ M ଓ N ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ΔABC ଉପରିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ । ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ M ଓ N ଛଡ଼ା $\overline{MN}$ ର ଅନ୍ୟ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ନୁହନ୍ତି । ($\overline{MN}$ ଅଙ୍କନ କରି ଦେଖ) । ସେହି କାରଣରୁ ΔABC ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ନୁହେଁ ।

ତ୍ରିଭୁଜର ବହିର୍ଦେଶ ମଧ୍ୟ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ନୁହେଁ । ତ୍ରିଭୁଜର ବହିର୍ଦେଶରେ ଏଭଳି ଅନେକ ବିନ୍ଦୁ ଯୋଡ଼ା ପାଇବ, ଯେଉଁମାନଙ୍କର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ରୂପେ ବହିର୍ଦେଶରେ ନାହିଁ। ($\overline{QS}$ ଅଙ୍କନ କରି ଦେଖ)

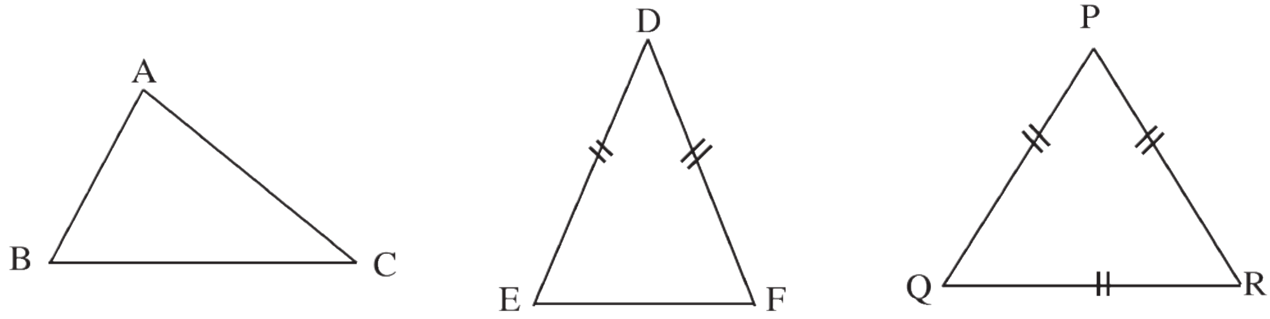
ଏପରି କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ମିଳିବ କି ଯାହା ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଉଭୟରେ ରହିପାରିବ ? ତାହା ଅସମ୍ଭବ । ଏଣୁ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ନାହିଁ । ସେହିପରି ଅନୁଧ୍ୟାନ କଲେ ଜାଣିବ ଯେ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ତା'ର ବହିର୍ଦେଶର ମଧ୍ୟ କୌଣସି ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ନାହିଁ । ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଓ ବହିର୍ଦେଶର ମଧ୍ୟ କୌଣସି ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ନାହିଁ ।

ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶକୁ ଏକତ୍ର ନେଇ ଯେଉଁ ସେଟ୍ ଗଠିତ ହୁଏ ତାକୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଆକୃତିବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ର ଅଥବା ତ୍ରିଭୁଜାକାର କ୍ଷେତ୍ର (Triangular region) କୁହାଯାଏ ।

ଅର୍ଥାତ୍ ΔABC ଓ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଏକତ୍ର ନିଆଗଲେ ABC ତ୍ରିଭୁଜାକାର କ୍ଷେତ୍ର ଗଠିତ ହୁଏ । ΔABC ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ, କୋଣ ଏବଂ ବାହୁମାନଙ୍କୁ ଏହି ତ୍ରିଭୁଜାକାର କ୍ଷେତ୍ରର ଯଥାକ୍ରମେ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ, କୋଣ ଏବଂ ବାହୁ କହିପାରିବା ।

2.3 ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ତ୍ରିଭୁଜ (Types of Triangles) :

(A) **ବାହୁମାନଙ୍କ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ପ୍ରକାରଭେଦ:**



(a) (b) (c)

(ଚିତ୍ର 2.3)

ଚିତ୍ର 2.3 (a) ରେ ଥିବା ΔABC ର ବାହୁଗୁଡ଼ିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅସମାନ । ଏ ପ୍ରକାର ତ୍ରିଭୁଜକୁ **ବିଷମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ (Scalene triangle)** କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 2.3 (b) ରେ ଥିବା ΔDEF ରେ $DE = DF$ । ଏ ପ୍ରକାର ତ୍ରିଭୁଜକୁ **ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ (Isosceles triangle)** କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 2.3 (c) ରେ ଥିବା ΔPQR ରେ $PQ=QR=RP$ । ଏ ପ୍ରକାର ତ୍ରିଭୁଜକୁ **ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ (Equilateral triangle)** କୁହାଯାଏ ।

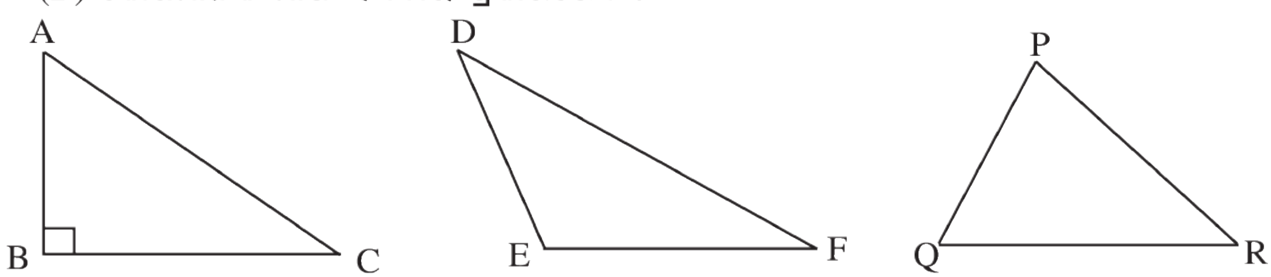
ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜରେ ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣକୁ ସାଧାରଣତଃ ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର **ଶୀର୍ଷକୋଣ (Vertex angle)** କୁହାଯାଏ । ଫଳରେ ଚିତ୍ର 2.3(b) ରେ ଥିବା ସମଦ୍ୱିବାହୁ ΔDEF ର ଶୀର୍ଷକୋଣ $\angle D$ । ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷକୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁକୁ ସାଧାରଣତଃ ଏହାର ଭୂମି କୁହାଯାଏ । ଏଣୁ ଉପରିସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ଥିବା ସମଦ୍ୱିବାହୁ ΔDEF ର ଭୂମି $\overline{EF}$ । ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିର ସଂଲଗ୍ନ କୋଣଦ୍ୱୟକୁ ଏହାର **ଭୂମି ସଂଲଗ୍ନ କୋଣ (base angles)** କୁହାଯାଏ । ଫଳରେ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ΔEDF ର ଭୂମି ସଂଲଗ୍ନ କୋଣଦ୍ୱୟ ହେଲେ $\angle E$ ଓ $\angle F$ ।

ସଂଜ୍ଞା : (i) ଯେଉଁ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପରସ୍ପର ସମାନ, ତାହା ଏକ **ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ** ।

(ii) ଯେଉଁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ, ତାହା ଏକ **ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ।**

(iii) ଯେଉଁ ତ୍ରିଭୁଜର କୌଣସି ଯୋଡ଼ା ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପରସ୍ପର ସମାନ ନୁହେଁ ତାହା ଏକ **ବିଷମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ** ।

(B) **କୋଣମାନଙ୍କ ମାପ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ପ୍ରକାରଭେଦ :**



(a) (b) (c)

(ଚିତ୍ର 2.4)

ଚିତ୍ର 2.4(a) ରେ ΔABC ରେ $\angle B$ ସମକୋଣ । ଏପରି ତ୍ରିଭୁଜକୁ (ଯାହାର ଗୋଟିଏ କୋଣ ସମକୋଣ) **ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ (Right-angled triangle)** କୁହାଯାଏ । ପରେ ଜାଣିବ ଯେ, ଏକ ତ୍ରିଭୁଜରେ ଅତି ବେଶିରେ ଗୋଟିଏ ସମକୋଣ ରହିପାରେ । ଚିତ୍ର 2.4(b) ରେ ଥିବା ΔDEF ର $\angle E$ ଏକ ସ୍ଥୂଳକୋଣ । ଏପରି ତ୍ରିଭୁଜକୁ (ଯାହାର ଗୋଟିଏ କୋଣ ସ୍ଥୂଳକୋଣ) **ସ୍ଥୂଳକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ (Obtuse-angled triangle)** କୁହାଯାଏ । ପରେ ଜାଣିବ ଯେ, ଏକ ତ୍ରିଭୁଜରେ ଅତି ବେଶିରେ ଗୋଟିଏ ସ୍ଥୂଳକୋଣ ରହିପାରେ । ଚିତ୍ର 2.4(c) ରେ ଥିବା ΔPQR ର $\angle P$, $\angle Q$ ଓ $\angle R$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ । ଏପରି ତ୍ରିଭୁଜକୁ **ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ (acute-angled triangle)** କୁହାଯାଏ ।

ସଂଜ୍ଞା : (i) ଯେଉଁ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ କୋଣ ସମକୋଣ, ତାହା ଏକ **ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ** ।

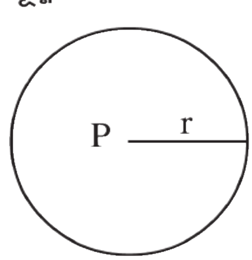
(ii) ଯେଉଁ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ କୋଣ ସ୍ଥୂଳକୋଣ, ତାହା ଏକ **ସ୍ଥୂଳକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ** ।

(iii) ଯେଉଁ ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣତ୍ରୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ, ତାହା ଏକ **ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ** ।

ସଂଜ୍ଞାରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ **ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସମକୋଣ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ କୋଣଦ୍ୱୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ଓ ଗୋଟିଏ ସ୍ଥୂଳକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସ୍ଥୂଳକୋଣ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ କୋଣଦ୍ୱୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ।**

2.4 ତ୍ରିଭୁଜ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତୋଟି ପରୀକ୍ଷା :

ତ୍ରିଭୁଜ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଯେକୌଣସି ପରୀକ୍ଷା କରିବା ପୂର୍ବରୁ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ତ୍ରିଭୁଜ କିପରି ଅଙ୍କନ କରିବ, ତାହା ଜାଣିବା ଆବଶ୍ୟକ । ଏଣୁ ପ୍ରଥମେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ ବର୍ଣ୍ଣନା କରାଯାଇଛି ।



(ଚିତ୍ର 2.5)

କମ୍ପାସ୍‌ର ବ୍ୟବହାର :

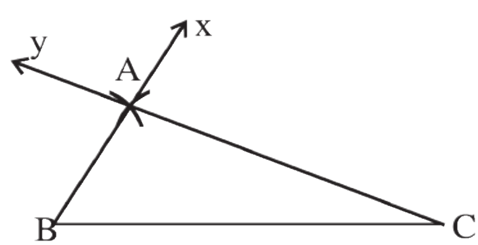
କମ୍ପାସର ବ୍ୟବହାର ତୁମ ପାଇଁ ନୂଆ ନୁହେଁ । କମ୍ପାସ ସାହାଯ୍ୟରେ ତୁମେ ବୃତ୍ତଟିଏ ଅଙ୍କନ କରିଥାଅ । ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଏଠାରେ ତୁମକୁ କିଛିଟା ସ୍ଥୂଳ ଧାରଣା ଦିଆଯାଉଛି ।

ତୁମ ଖାତାରେ ଗୋଟିଏ ପୃଷ୍ଠା ଉପରେ ଚିହ୍ନିତ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତା (ମନେକର, r ଏକକ)ରେ ଖାତାର ସେହି ପୃଷ୍ଠା ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁକୁ କମ୍ପାସ ସାହାଯ୍ୟରେ ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଇପାରେ । ଏହି ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ଏକତ୍ର ନେଇ ଯେଉଁ ଚିତ୍ରଟିଏ ଆମେ ପାଉ, ତାହା **ଏକ ବୃତ୍ତ (Circle)** । କମ୍ପାସ୍‌ରେ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ଆରମ୍ଭ କରି ପେନ୍‌ସିଲ ମୁନକୁ କିଛି ବାଟ ଚଳାଇ (ଅଙ୍କନର ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁରେ ପହଞ୍ଚିବା ପୂର୍ବରୁ) ଅଙ୍କନ ବନ୍ଦ କଲେ, ଯେଉଁ ଚିତ୍ରଟିଏ ମିଳେ, ତାକୁ **ଏକ ଚାପ (arc)** କୁହାଯାଏ । P ବିନ୍ଦୁକୁ ଏହି ଚାପର କେନ୍ଦ୍ର ଓ r କୁ ଏହାର **ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (radius)** କୁହାଯାଏ । ଚାପଟିଏ ଅଙ୍କନ କରି ଆମେ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ r ଏକକ ଦୂରତାବିଶିଷ୍ଟ କେତେକ ବିନ୍ଦୁ ପାଇଥାଉ ।

(a) **ବିଷମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ** (ସ୍କେଲ୍ ଓ କମ୍ପାସ୍ ସାହାଯ୍ୟରେ) :

(i) ଯେକୌଣସି ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ $\overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) B କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି r – ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପ ($r \neq BC$) ଅଙ୍କନ କର ?



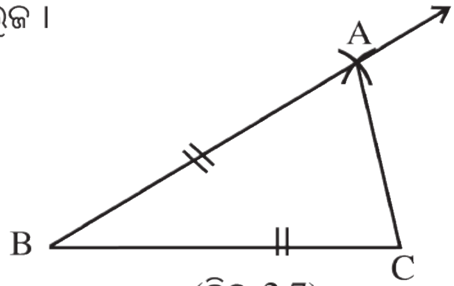
(ଚିତ୍ର 2.6)

(iii) C କୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି ଓ BC ତଥା (ii) ରେ ନେଇଥିବା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧଠାରୁ ପୃଥକ୍ ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଅନ୍ୟ ଏକ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରି ଏହା (ii) ରେ ଅଙ୍କିତ ଚାପକୁ ଛେଦ କରିବ । ଛେଦ ବିନ୍ଦୁର ନାମ A ଦିଅ । $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଅଙ୍କନ କର । ବର୍ତ୍ତମାନ ମିଳିଥିବା ତ୍ରିଭୁଜ ଏକ ବିଷମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ।

(b) **ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ:** (ସ୍କେଲ୍ ଓ କମ୍ପାସ ଦ୍ୱାରା)

(i) ଯେକୌଣସି ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ $\overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) B କୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି BC ସହ ସମାନ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଚାପଟିଏ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 2.7)

(iii) C ବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି BC ଠାରୁ ପୃଥକ୍ ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଚାପଟିଏ ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରିକି ଏହା (ii)ରେ ଅଙ୍କିତ ଚାପକୁ ଛେଦ କରିବ । ଛେଦ ବିନ୍ଦୁର ନାମ A ଦିଅ ।

(iv) $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

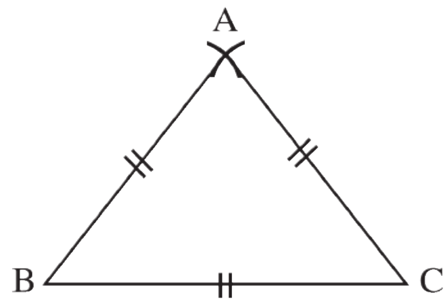
ବର୍ତ୍ତମାନ ମିଳିଥିବା ΔABC ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ । ଏହାର BC = AB ଏବଂ $\overline{CA}$ ଏହାର ଭୂମି ।

(c) **ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ :**

(i) ଯେକୌଣସି ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ $\overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) B ବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି BC ସହ ସମାନ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଚାପଟିଏ ଅଙ୍କନ କର ।

(iii) C ବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି (ii) ରେ ନେଇଥିବା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (BC ସହ ସମାନ) ନେଇ ଚାପଟିଏ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 2.8)

(iv) ସୋପାନ (ii) ଓ (iii) ଅଙ୍କିତ ଚାପଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁର ନାମ A ଦିଅ । $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଅଙ୍କନ କର । ବର୍ତ୍ତମାନ ଅଙ୍କିତ ΔABC ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ।

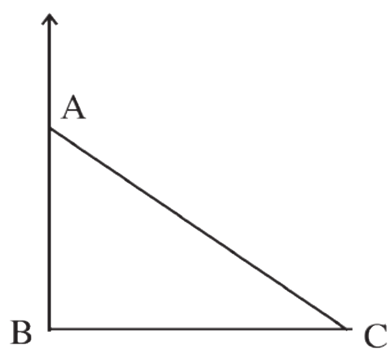
(d) **ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ :**

(i) ଯେକୌଣସି ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ $\overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) $\overline{BC}$ ସହ ସେଟ୍‌ସ୍କୋୟାରରେ ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ଗୋଟିଏ ଧାର ଲଗାଇ ରଖ ଯେପରି ଏହାର ସମକୋଣ B ଠାରେ ରହିବ । ସେଟ୍‌ସ୍କୋୟାରର ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ଅନ୍ୟ ଧାରକୁ ଲଗାଇ ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର ଗୋଟିଏ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ B, ଏହାର ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁର ନାମ A ଦିଅ ।

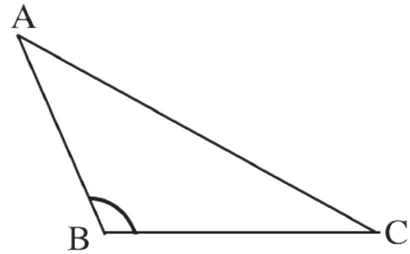
(iii) $\overline{AC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ମିଳିଥିବା ΔABC ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ।



(ଚିତ୍ର 2.9)

(e) ସ୍ଥୂଳକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ :



(ଚିତ୍ର 2.10)

ସ୍ଥୂଳକୋଣୀ ΔABC ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେଲେ –

(i) ଯେକୌଣସି ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ $\overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) $\overline{BC}$ ସହ B ଠାରେ ସ୍ଥୂଳକୋଣ (ଅର୍ଥାତ୍ 90^0 ରୁ ଅଧିକ ପରିମାଣବିଶିଷ୍ଟ କୋଣ) ଅଙ୍କନ କରୁଥିବା $\overline{BA}$ (ଯେକୌଣସି ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ) ଅଙ୍କନ କର ।

(iii) $\overline{AC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ମିଳିଥିବା ΔABC ଏକ ସ୍ଥୂଳକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ପରୀକ୍ଷଣ-1:ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିକୋଣର ପରିମାଣ ମଧ୍ୟରେ ସଂପର୍କ ନିରୂପଣ

ସ୍କେଲ୍, କମ୍ପାସ ଓ ସେଟ୍‌ସ୍କୋୟାର ଆବଶ୍ୟକ ହେଲେ ବ୍ୟବହାର କରି ତିନୋଟି ଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର । ପ୍ରତ୍ୟେକର ନାମ ABC Δ ଦିଅ । ଚିତ୍ର ତିନୋଟିକୁ ଚିତ୍ର ନଂ. 1, ଚିତ୍ର ନଂ. 2 ଓ ଚିତ୍ର ନଂ. 3 ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଅ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରୁ ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ସାହାଯ୍ୟରେ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ମାପି ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଲେଖ ।

ଚିତ୍ର ନଂ	$m\angle A$	$m\angle B$	$m\angle C$	$m\angle A + m\angle B + m\angle C$
1				
2				
3				

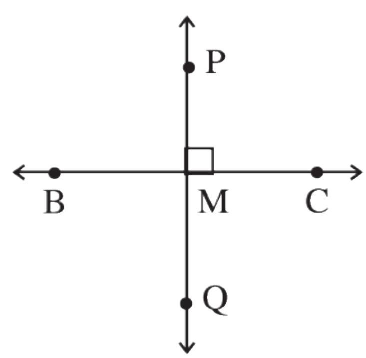
ସାରଣୀ - 2.1

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ର ଲାଗି ସାରଣୀର ଶେଷ ସ୍ତମ୍ଭରେ $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$ ହେବାର ଦେଖିବ ।

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ – 1 **ଯେକୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣତ୍ରୟର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0 ।**

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ–1 **ଏକ ତ୍ରିଭୁଜରେ ଅତି ବେଶିରେ ଗୋଟିଏ ସମକୋଣ ବା ଗୋଟିଏ ସ୍ଥୂଳକୋଣ ରହିପାରିବ ।**

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ–2: $\overleftrightarrow{BC}$ ର ବହିଃସ୍ଥ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ, P ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର $\overleftrightarrow{PQ}$ ଅଙ୍କନ କରିବା ସମ୍ଭବ, ଯେପରିକି $\overleftrightarrow{BC}$ ସହ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଏକ ସମକୋଣ ସୃଷ୍ଟି କରିବ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଓ $\overleftrightarrow{BC}$ **ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ (Perpendicular to each other or mutually perpendicular)** ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଯଦି $\overleftrightarrow{BC}$ ଓ $\overleftrightarrow{PQ}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ M ହୁଏ, ତେବେ $\overline{PM}$ କୁ P ବିନ୍ଦୁରୁ $\overleftrightarrow{BC}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ଏବଂ M ବିନ୍ଦୁକୁ $\overline{PM}$ **ଲମ୍ବର ପାଦବିନ୍ଦୁ (Foot of the perpendicular)** ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।



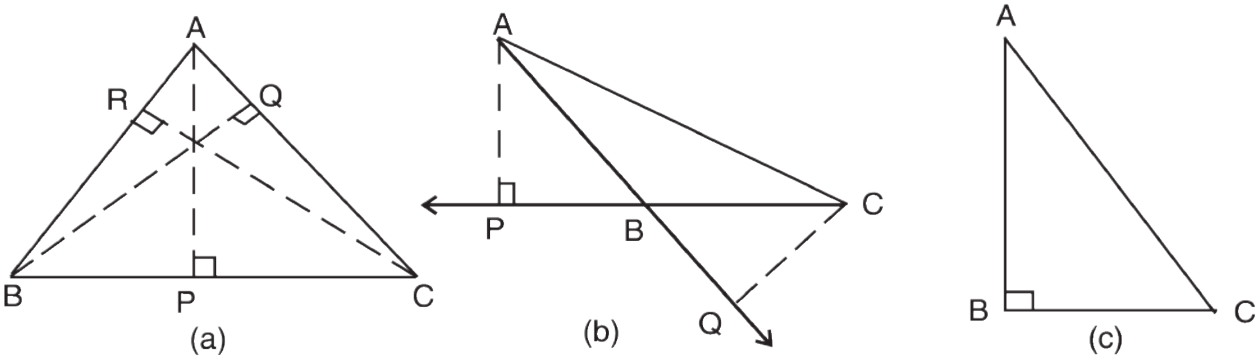
(ଚିତ୍ର 2.11)

ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା (Height of the triangle) :

ΔABC ରେ A ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ।

ସେହିପରି, B ଓ C ବିନ୍ଦୁରୁ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{AB}$ ପ୍ରତି ମଧ୍ୟ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇ ପାରିବ । ଲମ୍ବତ୍ରୟର ପାଦବିନ୍ଦୁ P, Q ଓ R ହେଲେ, $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ ଓ $\overline{CR}$ କୁ ΔABC ରେ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁରୁ ବିପରୀତ ବାହୁ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ (Perpendicular) ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

$\overline{AP}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ AP କୁ ΔABC ର A ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ଉଚ୍ଚତା କୁହାଯାଏ । ସେହିପରି BQ ଓ CR କୁ ଯଥାକ୍ରମେ B ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{AC}$ ପ୍ରତି ଓ C ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{AB}$ ପ୍ରତି ଉଚ୍ଚତା (Height) କୁହାଯାଏ ।

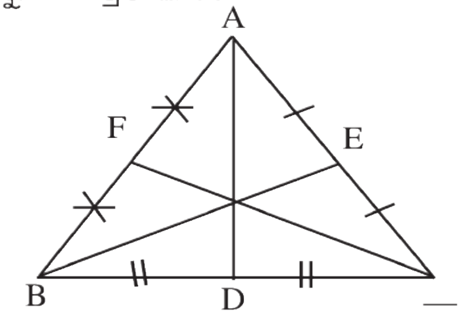


(ଚିତ୍ର 2.12)

ଚିତ୍ର 2.12 (a) ରେ ଥିବା ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣୀ ΔABC ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁରୁ ବିପରୀତ ବାହୁ ପ୍ରତି ଲମ୍ବତ୍ରୟ ଦର୍ଶାଯାଇଛି । ଚିତ୍ର 2.12(b) ରେ ଦେଖ ଯେ ସ୍ଥୂଳକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ ସ୍ଥୂଳକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁ ପ୍ରତି ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ନାହାନ୍ତି । ଏହା କେବଳ ସ୍ଥୂଳକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ ଘଟିଥାଏ । ଚିତ୍ର 2.12(c) ରେ ଦେଖ ଯେ $\overline{AB}$ ବାହୁ ହିଁ A ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଏବଂ $\overline{BC}$ ବାହୁ ହିଁ C ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{AB}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

ତ୍ରିଭୁଜର ମଧ୍ୟମା (Medians of a triangle) :

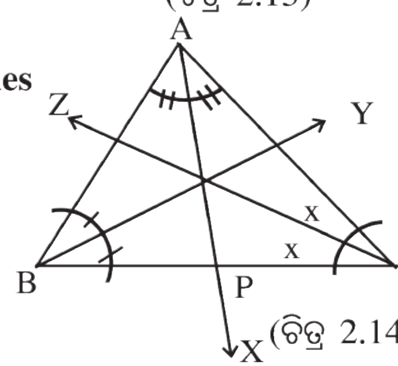
ତ୍ରିଭୁଜର କୌଣସି କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁ ଓ ତାହାର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ମଧ୍ୟମା (median) କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 2.13 ରେ A ଗୋଟିଏ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁ । Aର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ $\overline{BC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ D ଅଟେ । ତେଣୁ $\overline{AD}$ ଗୋଟିଏ ମଧ୍ୟମା । ସେହିପରି $\overline{BE}$ ଓ $\overline{CF}$ ଆଉ ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟମା । କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟି ମଧ୍ୟମା ଥାଏ ।



(ଚିତ୍ର 2.13)

ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣମାନଙ୍କ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ (Bisectors of the angles of a triangle or Angle-bisectors of a triangle):

ΔABC ର କୋଣମାନଙ୍କର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ରଶ୍ମିଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ, $\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{BY}$ ଏବଂ $\overrightarrow{CZ}$ । ସେଗୁଡ଼ିକ ଯଥାକ୍ରମେ $\angle A$, $\angle B$ ଓ $\angle C$ ର ଅନ୍ତଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଅଟନ୍ତି । (ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ କେବଳ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ କହିଲେ ଠିକ୍ ହେବ ।)



(ଚିତ୍ର 2.14)

ପରୀକ୍ଷଣ-2:ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ ନିରୂପଣ ।

ତିନୋଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରି (ସ୍କେଲ୍, କମ୍ପାସ୍ ଓ ଆବଶ୍ୟକ ହେଲେ ସେଟ୍‌ସ୍କୋୟାର୍ ସାହାଯ୍ୟରେ) ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଚିତ୍ର ନଂ 1, 2, 3 ରୂପେ ଚିହ୍ନଟ କର । ପ୍ରତ୍ୟେକର ନାମ ΔABC ଦିଅ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରୁ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପି ପରବର୍ତ୍ତୀ ସାରଣୀ ପୂରଣ କର ।

ଚିତ୍ର ନଂ	AB	BC	CA	AB + BC	BC + CA	CA + AB
1						
2						
3						

ସାରଣୀ - 2.2

ସାରଣୀରୁ ଦେଖିବ ଯେ,

$AB + BC > CA$, $BC + CA > AB$, $AB + CA > BC$

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଯେକୌଣସି ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ଏହାର ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ–1: AB= 2 ସେ.ମି., BC = 4 ସେ.ମି., CA = 6 ସେ.ମି. ହେଲେ ΔABC ଅଙ୍କନ ହୋଇପାରିବ କି ?

ଲକ୍ଷ୍ୟକର, ଦୁଇଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନ । ଅର୍ଥାତ୍ $AB + BC = CA$ ହେତୁ A - B - C ହେବ । ଏଠାରେ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।

2. ଯେକୌଣସି ΔABC ରେ $AB + BC > CA$ କିମ୍ବା $AB + BC - BC > CA - BC$

କିମ୍ବା $AB > CA - BC$ କିମ୍ବା $CA - BC < AB$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଯେକୌଣସି ଦୁଇବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନ୍ତର ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ।

AB = 2 ସେ.ମି., BC = 3 ସେ.ମି. ଓ CA = 6 ସେ.ମି. ହେଲେ, ΔABC ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ କି ?

ଲକ୍ଷ୍ୟକର, ଏଠାରେ $CA - BC > AB$ । ତେଣୁ ΔABC ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।

(ଏଠାରେ $AB + BC < CA$ । ତେଣୁ ΔABC ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।)

ପରୀକ୍ଷଣ-3: ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ସର୍ବସମ ବାହୁଦ୍ୱୟର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ସଂପର୍କ ନିରୂପଣ ।

ସ୍କେଲ୍ କମ୍ପାସ୍ ଓ ଆବଶ୍ୟକ ହେଲେ ସେଟ୍‌ସ୍କୋୟାର ସାହାଯ୍ୟରେ ତିନୋଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଆକୃତିର ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରେ ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁ ଦ୍ୱୟର ନାମ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଦିଅ । ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଏହି ବାହୁମାନଙ୍କର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ମାପ । ଚିତ୍ର ତ୍ରୟକୁ ଚିତ୍ର ନଂ –1, ଚିତ୍ର ନଂ – 2 ଓ ଚିତ୍ର ନଂ – 3 ନାମରେ ସୂଚିତ କର ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରୁ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ମାପଗୁଡ଼ିକ ନେଇ ପ୍ରଦତ୍ତ ସାରଣୀ ପୂରଣ କର ।

ଚିତ୍ର ନଂ	AB	AC	m∠ABC	m∠ACB
1				
2				
3				

ସାରଣୀ - 2.3

ସାରଣୀର ଦେଖିବା ଯେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରେ ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣ ∠ABC ଓ ∠ACB ର ପରିମାଣ ସମାନ ।

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ – 3 : ଯେକୌଣସି ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁଦ୍ୱୟର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସମାନ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣତ୍ରୟର ପରିମାଣ ସମାନ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକର ପରିମାଣ 60^0 ।

ପରୀକ୍ଷଣ-4:ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ କୋଣଥିବା ତ୍ରିଭୁଜର ସର୍ବସମ କୋଣଦ୍ୱୟର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ସଂପର୍କ ନିରୂପଣ ।

(i) $\overline{BC}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) $\overline{BC}$ ସହ B ଠାରେ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ସୃଷ୍ଟି କରୁଥିବା ଏକ ରଶ୍ମି ଅଙ୍କନ କର ।

(iii) $\overline{BC}$ ସହ C ଠାରେ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ଅଙ୍କନ କରୁଥିବା ଏକ ରଶ୍ମି ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରିକି C ଠାରେ ଅଙ୍କିତ କୋଣର ପରିମାଣ ଓ B ଠାରେ ଅଙ୍କିତ କୋଣର ପରିମାଣ ପରସ୍ପର ସମାନ ହେବେ (ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ବ୍ୟବହାର କରି ଅଙ୍କନ କରିବ) ଏବଂ (ii) ଓ (iii) ରେ ଅଙ୍କିତ ରଶ୍ମିଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ । ଏହି ଛେଦବିନ୍ଦୁର ନାମ A ଦିଅ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ମିଳିଥିବା ΔABC ରେ m∠B = m∠C । ସେହି ପ୍ରଣାଳୀରେ ଆଉ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ଥଳେ ତ୍ରିଭୁଜର ନାମ ABC ଦିଅ ଯେପରିକି m∠B = m∠C । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରୁ AB ଓ AC ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପି ନିମ୍ନସାରଣୀ ପୂରଣ କର ।

ସାରଣୀରୁ ଦେଖିବ ଯେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜରେ AB = AC

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ– 4: ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ହେଲେ, ଏହି କୋଣଦ୍ୱୟର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ।

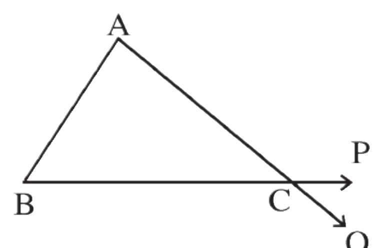
ଚିତ୍ର ନଂ	AB	AC
1		
2		
3		

ସାରଣୀ - 2.4

2.5 ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ :

ଯେକୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣତ୍ରୟକୁ ଆମେ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ (Interior angles) ବୋଲି କହିଥାଉ ।

ଚିତ୍ର 2.15 ରେ $\overrightarrow{CB}$ ର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି $\overrightarrow{CP}$ ହେଲେ, ∠ACB ର ଏକ ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ ∠ACP ମିଳିଥାଏ । ସେହିପରି $\overrightarrow{CA}$ ର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି $\overrightarrow{CQ}$ ହେଲେ, ∠ACB ର ଅନ୍ୟ ଏକ ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ ∠BCQ ମିଳିଥାଏ ।



(ଚିତ୍ର 2.15)

$\overrightarrow{BP}$ ଓ $\overrightarrow{AQ}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ C ହେତୁ, ∠ACP ଓ ∠BCQ ଏକ ଯୋଡ଼ା ପ୍ରତୀପ କୋଣ ।

ଫଳରେ ସେ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ସମାନ । ସଂଜ୍ଞା ଅନୁଯାୟୀ ΔABC ର C ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁରେ ଅବସ୍ଥିତ ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ହେଲେ ∠ACP ଓ ∠BCQ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ ∠PCQ, ΔABC ର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ନୁହେଁ ।

ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ **ଜାଣିବା କଥା:**

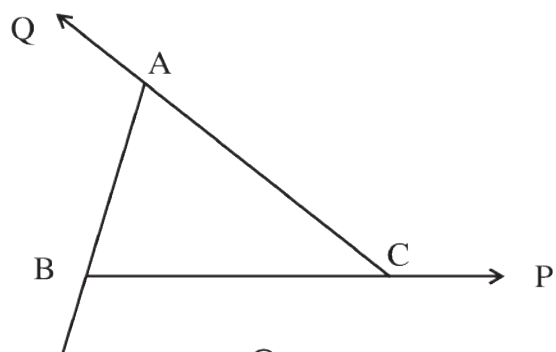
(i) ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁରେ ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ପାଇବା ସମ୍ଭବ ଓ ଏ ଦୁଇଟିର ପରିମାଣ ସମାନ ।

(ii) ତ୍ରିଭୁଜର କୌଣସି ଏକ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁରେ ଥିବା ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ ଓ ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0 ।

(iii) ΔABC ର ∠B ଓ ∠C ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ A ଠାରେ ଥିବା ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣ (Remote Interior angle) କୁହାଯାଏ ।

ପରୀକ୍ଷଣ- 5 :

କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ସହିତ ଏହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣ ଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ମଧ୍ୟରେ ସଂପର୍କ ନିରୂପଣ ।



(ଚିତ୍ର 2.16)

ଚିତ୍ର 2.16 ଭଳି ତିନୋଟି ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରି ପ୍ରତ୍ୟେକଟିକୁ ABC Δ ରୂପେ ନାମିତ କର । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରେ $\overrightarrow{CB}$ ବିପରୀତ ରଶ୍ମି $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{AC}$ ବିପରୀତ ରଶ୍ମି $\overrightarrow{AQ}$ ଏବଂ $\overrightarrow{BA}$ ର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି $\overrightarrow{BR}$ ଅଙ୍କନ କର ।

∠A, ∠B, ∠C, ବହିଃସ୍ଥ ∠ACP, ∠BAQ ଓ ∠CBR ର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର (ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ସାହାଯ୍ୟରେ) ଓ ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ପୂରଣ କର ।

ଚିତ୍ର ନଂ	m∠A+m∠B	m∠ACP	m∠B+m∠C	m∠BAQ	m∠C+m∠A	m∠CBR
1						
2						
3						

ସାରଣୀ - 2.5

ଉପରିସ୍ଥ ସାରଣୀରୁ ଦେଖିଲେ ଯେ,

m∠ACP = m∠BAC + m∠ABC; m∠BAQ = m∠ABC + m∠BCA ଏବଂ

m∠CBR = m∠CAB + m∠BCA ।

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ -5 : କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ସଙ୍ଗେ ସମାନ ।

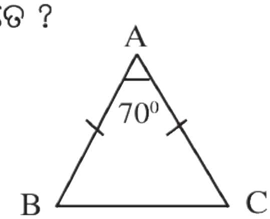
ଆଲୋଚିତ ସିଦ୍ଧାନ୍ତମାନଙ୍କର ଉପରେ ଆଧାରିତ କେତେକ ଉଦାହରଣ ।

ଉଦାହରଣ–1: ଯେଉଁ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣ 110^0 ଓ 36^0 ତାହାର ତୃତୀୟ କୋଣର ପରିମାଣ କେତେ ?

ସମାଧାନ : ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିକୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0 । ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣ 110^0 ଓ 36^0 ।

$\therefore$ ଏହାର ତୃତୀୟ କୋଣର ପରିମାଣ $= 180^0 - (110^0 + 36^0) = 180^0 - 146^0 = 34^0$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 2: ଗୋଟିଏ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷକୋଣର ପରିମାଣ 70^0 ହେଲେ, ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭୂମି ସଂଲଗ୍ନ କୋଣର ପରିମାଣ ଏବଂ C ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁଠାରେ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ କେତେ ?



(ଚିତ୍ର 2.17)

ସମାଧାନ : ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ΔABC ସମଦ୍ୱିବାହୁ । ଏଠାରେ $AB = AC$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $m\angle A = 70^0$

ଯେହେତୁ $AB = AC$, ତେଣୁ $m\angle B = m\angle C$

ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିକୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0 ।

$\therefore$ ଭୂମି-ସଂଲଗ୍ନ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି $= 180^0 - 70^0 = 110^0$

$\therefore$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭୂମି-ସଂଲଗ୍ନ କୋଣର ପରିମାଣ $= \frac{110^0}{2} = 55^0$ ।

$\therefore$ C ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁଠାରେ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ $= m\angle A + m\angle B = 70^0 + 55^0 = 125^0$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ–3 : ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ଅନ୍ୟଟିର ଦୁଇଗୁଣ ହେଲେ, ସୂକ୍ଷ୍ମ କୋଣ ଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ କୋଣ ସମକୋଣ ।

$\therefore$ ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି $= 180^0 - 90^0 = 90^0$

ମନେକର ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣର ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ପରିମାଣ x^0 ଏବଂ ଅନ୍ୟଟିର ପରିମାଣ $2x^0$

$\therefore x^0 + 2x^0 = 90^0 \Rightarrow 3x^0 = 90^0$

ଗୋଟିଏ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣର ପରିମାଣ $= x^0 = \frac{90^0}{3} = 30^0$

$\therefore$ ଅନ୍ୟ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣର ପରିମାଣ $= 2x^0 = 2 \times 30^0 = 60^0$ । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2

1. ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ଠିକ୍ ଥିଲେ କୋଠରି ମଧ୍ୟରେ ✓ ଚିହ୍ନ ଓ ଭୁଲ୍ ଥିଲେ ✘ ଚିହ୍ନ ଦିଅ ।

(a) $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CA}$ ପ୍ରତ୍ୟେକ, ତ୍ରିଭୁଜ ABC ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବାହୁ । ☐

(b) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ତ୍ରୟଦ୍ୱାରା ΔABC ଗଠିତ ହୁଏ । ☐

(c) ତ୍ରିଭୁଜ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ । ☐

(d) ଗୋଟିଏ ସ୍ଥୂଳକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ ଅତି ବେଶିରେ ଗୋଟିଏ ସ୍ଥୂଳକୋଣ ରହିବ । ☐

(e) ΔABC ର $\angle B$ ଓ $\angle C$ କୁ A ଠାରେ ଥିବା ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣ କୁହାଯାଏ । ☐

(f) ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ ଅତି ବେଶିରେ ଦୁଇଗୋଟି ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ରହିପାରିବ । ☐

(g) ΔABC ରେ $AB = AC$ ହେଲେ $\angle A$ ଓ $\angle B$ ର ପରିମାଣଦ୍ୱୟ ସମାନ ହେବେ । ☐

(h) ତ୍ରିଭୁଜର ମଧ୍ୟମାତ୍ରୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ସର୍ବଦା ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥାନ ନ କରିପାରନ୍ତି । ☐

(i) ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇକୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ସର୍ବଦା ତୃତୀୟ କୋଣର ପରିମାଣ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର । ☐

(j) ତ୍ରିଭୁଜର କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି । ☐

(k) ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର । ☐

(l) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ସର୍ବଦା ଏହି ଶୀର୍ଷସ୍ଥ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣଠାରୁ ବୃହତ୍ତର । ☐

2. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(a) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ---- ଗୋଟି ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ।

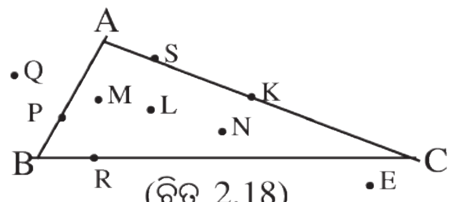
(b) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ମଧ୍ୟମା ସଂଖ୍ୟା ---- ।

(c) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ ସଂଖ୍ୟା ---- ।

(d) ଗୋଟିଏ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ବିପରୀତ ବାହୁ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ସଂଖ୍ୟା ---- ।

(e) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣ ସଂଖ୍ୟା ----- ।

3. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର ଦେଖି ସାରଣୀରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥାନ ଅନୁଯାୟୀ ଉପଯୁକ୍ତ କୋଠରିରେ ✓ ଚିହ୍ନ ଦିଅ ।

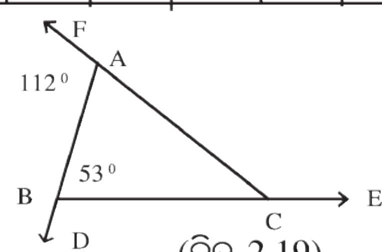


(ଚିତ୍ର 2.18)

ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତି	A	B	C	P	Q	R	L	E	M	N	S	K
ΔABC ଉପରେ												
ΔABC ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ												
ΔABC ର ବହିର୍ଦେଶରେ												

ସାରଣୀ - 2.6

4. ΔABC ର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣମାନ $\angle BAF$, $\angle CBD$ ଏବଂ $\angle ACE$ । ଯଦି $m\angle BAF = 112^0$ ଏବଂ $m\angle ABC = 53^0$, ତେବେ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର 2.19)

5. ΔABC ର $m\angle A = 72^0$ ଓ $m\angle B = 36^0$ ହେଲେ $\angle C$ ର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର । ΔABC କି ପ୍ରକାର ତ୍ରିଭୁଜ ? ଏହାର ଉତ୍ତର କାରଣ ସହ ଦର୍ଶାଅ ।

6. ΔABC ର $\angle A$ ର ପରିମାଣ $\angle B$ ର ପରିମାଣ ଅପେକ୍ଷା 10^0 ଅଧିକ ଓ $\angle B$ ର ପରିମାଣ $\angle C$ ର ପରିମାଣ ଅପେକ୍ଷା 10^0 ଅଧିକ ହେଲେ, କୋଣତ୍ରୟର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

7. ΔABC ରେ $m\angle B = 90^0$ ହେଲେ, ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) $m\angle A + m\angle C =$ କେତେ ?

(ii) $AB = BC$ ହେଲେ $m\angle A$ କେତେ ?

(iii) $m\angle C = 30^0$ ହେଲେ $m\angle A$ କେତେ ?

(iv) B ବିନ୍ଦୁରେ ΔABC ର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ କେତେ ?

(v) $m\angle A = 45^0$ ହେଲେ ΔABC ର କେଉଁ ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେବେ ?

8. ABC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର $m\angle B = 90^0$, $\angle A$ ର ପରମାଣ, $\angle C$ ପରିମାଣର 5 ଗୁଣ ହେଲେ, କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

9. ΔABC ର $m\angle A = 48^0$ ଓ $m\angle B = 110^0$ ହେଲେ ନିମ୍ନସ୍ଥ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକରେ ଥିବା ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

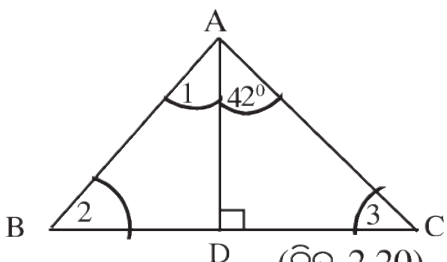
(a) ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ---- ରେ ଥିବା ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ।

(b) ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ A ଠାରେ ଥିବା ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ---- ।

(c) B ଠାରେ ଥିବା ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ---- ।

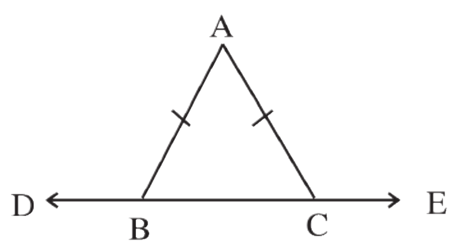
(d) C ଠାରେ ଥିବା ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ----- ।

10. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $AD = BD$ ଓ $m\angle DAC = 42^0$ ହେଲେ, 1, 2, 3 ଚିହ୍ନିତ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର 2.20)

11. ΔABC (ଚିତ୍ର 2.21)ରେ $AB = AC$ ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, B ଓ C ବିନ୍ଦୁରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ସମାନ ।

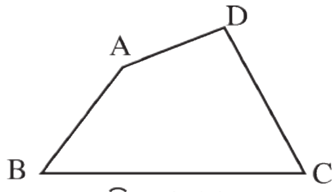


(ଚିତ୍ର 2.21)

12. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ 120^0 ଏବଂ ତାହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ପରିମାଣ 70^0 ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣଟିର ପରିମାଣ କେତେ ?

13. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ,

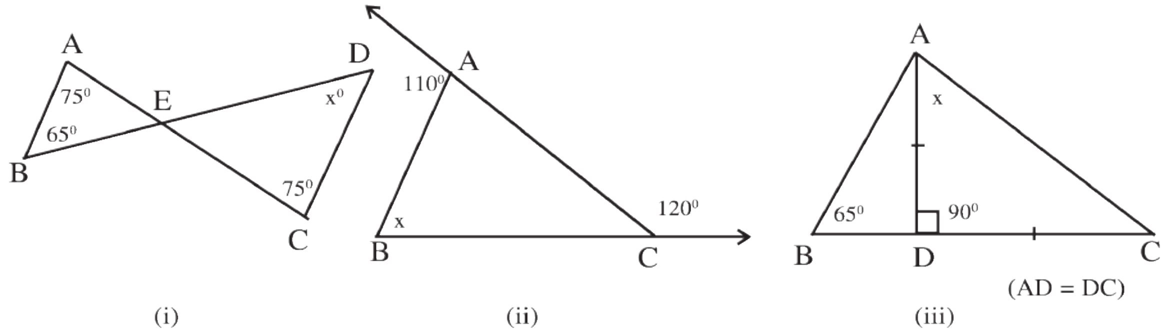
$AB + BC + CD + AD > 2AC$



(ଚିତ୍ର 2.22)

14. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିକୋଣ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ପରିମାଣ, କ୍ଷୁଦ୍ରତମ କୋଣର ପରିମାଣର ଦୁଇଗୁଣ ଏବଂ ଅନ୍ୟଟିର ପରିମାଣ, କ୍ଷୁଦ୍ରତମ କୋଣର ପରିମାଣର ତିନିଗୁଣ ହେଲେ, ବୃହତ୍ତମ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

15. ଚିତ୍ର 2.23 (i), (ii) ଓ (iii) ରେ ଥିବା ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରମାନଙ୍କରେ 'x' ଚିହ୍ନିତ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର 2.23)

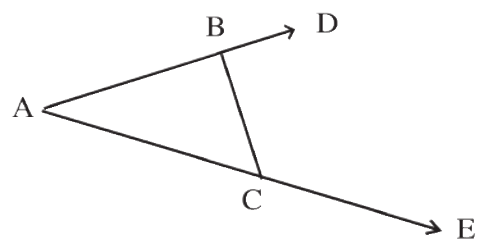
16. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣତ୍ରୟର ପରିମାଣର ଅନୁପାତ 2:3:4 ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

17. ΔABC ରେ $m\angle A + m\angle B = 125^0$ ଏବଂ $m\angle A + m\angle C = 113^0$ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣତ୍ରୟର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

18. ΔABC ରେ ଯଦି $2m\angle A = 3m\angle B = 6m\angle C$ ହୁଏ, କୋଣତ୍ରୟର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

19. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 2.24 ରେ ଦର୍ଶାଅଯେ,

$m\angle DBC + m\angle BCE > 2m\angle A$



(ଚିତ୍ର 2.24)

20. ΔABC ର $m\angle A = m\angle B + m\angle C$ ଏବଂ $m\angle B = 2m\angle C$ ହେଲେ, କୋଣତ୍ରୟର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

*****

ଚତୁର୍ଭୁଜ (QUADRILATERAL)

ଅଧ୍ୟାୟ 3

3.1 ଚତୁର୍ଭୁଜର ପରିଚୟ :

ପୂର୍ବ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ଜାଣିଲେ ଯେ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନ ଥିବା ତିନୋଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ A, B ଓ C ଦତ୍ତ ଥିଲେ ଆମେ ସମୁଦାୟ ତିନୋଟି ରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ ଅଙ୍କନ କରିପାରିବା ଓ ଏହି ତିନିଗୋଟି ରେଖାଖଣ୍ଡ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ଗଠନ କରନ୍ତି, ଯାହାକୁ ΔABC ବୋଲି ନାମିତ କରାଯାଏ ।

ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁ ତିନୋଟି ଯେଭଳି ଭାବରେ ରହନ୍ତୁ ନା କାହିଁକି, ତ୍ରିଭୁଜ ଗଠନ ସବୁ ପରିସ୍ଥିତିରେ ସମ୍ଭବ ।

ଆମେ ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଥିବା ଚାରିଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ କଥା ବିଚାରକୁ ନେବା ।

ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଚାରିଗୋଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ A, B, C ଓ D ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ମୁଖ୍ୟତଃ ତିନି ପ୍ରକାର ଅବସ୍ଥାରେ ରହିପାରନ୍ତି, ଯଥା –

(i) ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଏକରେଖୀ, (ii) ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଏକରେଖୀ, (iii) ଯେକୌଣସି ତିନିଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଏକରେଖୀ ନୁହନ୍ତି ।

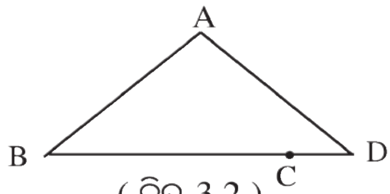
(i) ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଏକରେଖୀ :

(ଚିତ୍ର 3.1)

ଏହି ଅବସ୍ଥାରେ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ଓ $\overline{DA}$ ର ସଂଯୋଗ ହେଉଛି ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଯାହାକୁ $\overline{AD}$ ବା $\overline{DA}$ କୁହାଯାଏ । ($\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA} = \overline{AD}$)

(ii) **ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଏକରେଖୀ :**

ମନେକର B, C ଓ D ଏକରେଖୀ ଓ C ବିନ୍ଦୁଟି B ଓ D ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ।

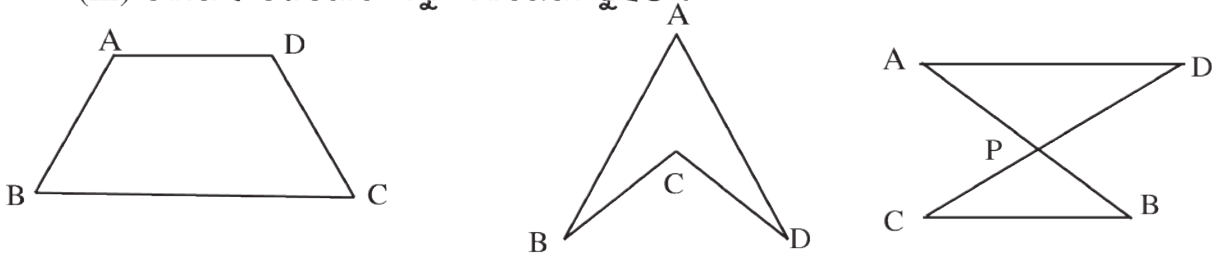


(ଚିତ୍ର 3.2)

$(\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA} = \Delta\, ABD)$

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ଓ $\overline{DA}$ ର ସଂଯୋଗରେ ଆମେ Δ ABD ପାଉ ।

(iii) **କୌଣସି ତିନିଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଏକରେଖୀ ନୁହନ୍ତି :**



(ଚିତ୍ର 3.3)

ଏଠାରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକରେ A, B, C, D ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନାହାନ୍ତି । 3.3 (a) ଓ (b) ଚିତ୍ରରେ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ଓ $\overline{DA}$ – ଏହି ରେଖାଖଣ୍ଡ ଚାରୋଟି ଅଙ୍କନ କଲେ ଯେଉଁ ଚିତ୍ର ଦୁଇଟି ମିଳୁଛି, ସେ ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଚିତ୍ର ।

ତୃତୀୟ ଚିତ୍ର 3.3 (c) ରେ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ଓ $\overline{DA}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କଲେ ଯେଉଁ ଚିତ୍ର ମିଳୁଛି, ତାହାକୁ ଚତୁର୍ଭୁଜ କୁହାଯାଏ ନାହିଁ ।

ଚିତ୍ର 3.3 (a) ଓ (b) ରେ ଆମେ ଚତୁର୍ଭୁଜ ପାଇଲେ; ମାତ୍ର ଚିତ୍ର 3.3 (c) ରେ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଗଠିତ ହୋଇପାରିଲା ନାହିଁ । ଚତୁର୍ଭୁଜ ମିଳିବା [ଚିତ୍ର 3.3 (a) ଓ (b)] ଓ ଚତୁର୍ଭୁଜ ନ ମିଳିବା [ଚିତ୍ର 3.3 (c)] ଏ ଉଭୟ ଅବସ୍ଥାରେ କ'ଣ ପାର୍ଥକ୍ୟ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରୁଛ ? $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ଓ $\overline{DA}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକର ସଂଖ୍ୟାରୁ ଏହି ପାର୍ଥକ୍ୟ ସ୍ପଷ୍ଟ ହୁଏ ।

ଚିତ୍ର 3.3(a) ଓ 3.3 (b), ପ୍ରତ୍ୟେକରେ ଆମେ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କର ସମୁଦାୟ ଚାରୋଟି ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଦେଖୁଛୁ । ଛେଦବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ A, B, C ଓ D; ଯେଉଁମାନେ କି ରେଖାଖଣ୍ଡଗୁଡ଼ିକର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ । ଚିତ୍ର 3.3 (c)ରେ ଆମେ A, B, C ଓ D ଭିନ୍ନ ଅଧିକ ଗୋଟିଏ ଛେଦବିନ୍ଦୁ P ଅର୍ଥାତ୍ ସମୁଦାୟ ପାଞ୍ଚଟି ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଦେଖୁଛୁ । ଏ ଅବସ୍ଥାରେ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ଓ $\overline{DA}$ ମଧ୍ୟରୁ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପରସ୍ପରକୁ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ରେ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି ଓ ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଗଠନ ସମ୍ଭବ ହେଲା ନାହିଁ ।

ଉପରୋକ୍ତ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣକୁ ଆଧାର କରି ଆମେ ଚତୁର୍ଭୁଜର ସଂଜ୍ଞା ନିରୂପଣ କରିବା ।

ସଂଜ୍ଞା (ଚତୁର୍ଭୁଜ) :

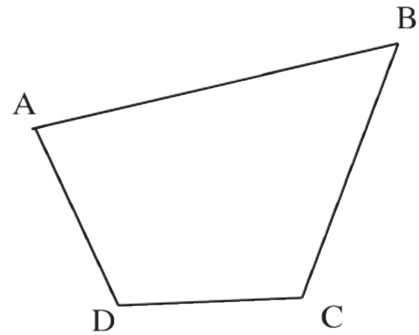
ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଚାରୋଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ A, B, C ଓ D ମଧ୍ୟରୁ ଯଦି କୌଣସି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ନ ହୁଅନ୍ତି ଏବଂ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି ନାହିଁ, ତେବେ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ଓ $\overline{DA}$ ର ସଂଯୋଗକୁ ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜ କୁହାଯାଏ । ଏହାକୁ 'ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ' କାହାକୁ କହନ୍ତି ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :

(1) ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ BCDA, CDAB ବା DABC ଚତୁର୍ଭୁଜ' ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

(2) ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଏକ ସମତଳରେ ଅଙ୍କିତ ଏକ ଚିତ୍ର ଅଥବା ଏକ ସମତଳୀୟ ଚିତ୍ର ।

ଦିଆଯାଇଥିବା ଚିତ୍ର 3.4 ରେ ଆମେ ଦେଖୁଥିବା ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ "ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ" କୁହାଯିବ; କାରଣ ଏଠାରେ $\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁନାହାନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 3.4)

(3) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ଓ $\overline{DA}$ – ଏହି ରେଖାଖଣ୍ଡଗୁଡ଼ିକ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସେଟ୍ ଅଟନ୍ତି । ତେଣୁ ଏମାନଙ୍କ ସଂଯୋଗରେ ଗଠିତ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ଅଟେ । ତେଣୁ ସେଟ୍ ପରିଭାଷାରେ ଆମେ ଲେଖିପାରିବା : $\boxed{\text{ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ} = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}}$ ।

ନିଜେ କର

(i) PQRS ଚତୁର୍ଭୁଜ ଓ PRQS ଚତୁର୍ଭୁଜ କେଉଁ କେଉଁ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ନେଇ ଗଠିତ ?

(ii) L, M, N ଓ R ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ତିନୋଟି ଏ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ନୁହଁନ୍ତି । $\overline{LM}$, $\overline{MN}$, $\overline{NR}$ ଓ $\overline{RL}$ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ନ ଥିଲେ ଉକ୍ତ ରେଖାଖଣ୍ଡଗୁଡ଼ିକର ସଂଯୋଗରେ ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା ଚିତ୍ରଟିକୁ କ'ଣ କୁହାଯାଏ ? ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା ଚିତ୍ରଟିର ନାମ କ'ଣ ?

ଚତୁର୍ଭୁଜ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଜାଣିବା କଥା :

(i) A, B, C, D ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର **ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ (Vertex)** କୁହାଯାଏ ।

(ii) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କୁ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁ (side) କୁହାଯାଏ । ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୁଇ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁକୁ ଚତୁର୍ଭୁଜର **କ୍ରମିକ ଶୀର୍ଷ (Consecutive vertices)** କୁହାଯାଏ ଏବଂ କ୍ରମିକ ଶୀର୍ଷ ହୋଇ ନ ଥିବା ଶୀର୍ଷଦ୍ୱୟକୁ **ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷ (Opposite vertices)** କୁହାଯାଏ । ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର A ଓ B, B ଓ C, C ଓ D, D ଓ A ମାନ କ୍ରମିକ ଶୀର୍ଷ ଏବଂ A ଓ C, B ଓ D ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷ ଅଟନ୍ତି ।

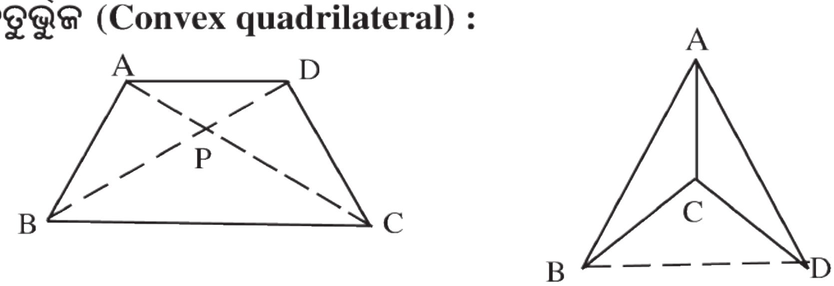
(iii) $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$, $\angle DAB$ କୁ ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ କୋଣ କୁହାଯାଏ । ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ଶୀର୍ଷରେ ଥିବା କୋଣଦ୍ୱୟକୁ **କ୍ରମିକ କୋଣ (Consecutive angles)** (ଯଥା, $\angle A$ ଓ $\angle B$)

ଏବଂ ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷରେ ଥିବା କୋଣଦ୍ୱୟକୁ ଚତୁର୍ଭୁଜର **ବିପରୀତ କୋଣ (Opposite angles)** କୁହାଯାଏ । **ABCD** ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\angle A$ ଓ $\angle C$ ଏବଂ $\angle B$ ଓ $\angle D$ ଦୁଇଯୋଡ଼ା ବିପରୀତ କୋଣ ।

(iv) ଚତୁର୍ଭୁଜର ପରସ୍ପରଛେଦୀ ବାହୁଦ୍ୱୟକୁ **ସନ୍ନିହିତ ବାହୁ (Adjacent sides)** (ଯଥା $\overline{AB}$, $\overline{BC}$) ଏବଂ ପରସ୍ପରଛେଦୀ ହୋଇ ନ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଯୋଡ଼ା ବାହୁକୁ (ଯଥା $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AD}$, $\overline{BC}$) **ବିପରୀତ ବାହୁ (Opposite sides)** କୁହାଯାଏ ।

(v) ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ଏହାର **କର୍ଣ୍ଣ (Diagonal)** କୁହାଯାଏ । ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ଦୁଇଟି କର୍ଣ୍ଣ ଅଟନ୍ତି ।

3.1.1 ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ (Convex quadrilateral) :



(a) (ଚିତ୍ର 3.5) (b)

ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ କହିଲେ ଆମେ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଚାରୋଟିର ସଂଯୋଗ ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ କୁ ବୁଝୁ । ଏହି ଚାରୋଟି ରେଖାଖଣ୍ଡରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁମାନେ ହିଁ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଗଠନ କରନ୍ତି । ତ୍ରିଭୁଜ ଭଳି ଚତୁର୍ଭୁଜ ମଧ୍ୟ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ । ତ୍ରିଭୁଜ ନିଜେ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ନୁହେଁ; ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ – ଏକଥା ପୂର୍ବ ଅଧ୍ୟାୟରୁ ମନେ ପକାଅ । ସେହିପରି ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ [ଚିତ୍ର 3.5 (a) ଓ (b)] ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ନୁହେଁ । 3.5 (a) ଓ (b) ଯେକୌଣସି ଚିତ୍ରରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ, B ଓ D ଚତୁର୍ଭୁଜରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ, କାରଣ ଏମାନେ ଚର୍ତୁଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ । ମାତ୍ର $\overline{BD}$ ର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ଚତୁର୍ଭୁଜର କୌଣସି ବାହୁରେ ନାହାନ୍ତି । ତେଣୁ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍‌ର ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ ।

ତେବେ 'ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ', ଏଭଳି ଗୋଟିଏ ଶବ୍ଦ କହିବାବେଳେ ଏହାକୁ 'ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍' ଅର୍ଥରେ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଉ ନାହିଁ । କେତେକ ବିଶେଷ ଧରଣର ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ ଚିହ୍ନିତ କରିବା ପାଇଁ 'ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ' ନାମ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ।

ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ କାହାକୁ କହିବା ?

ଚିତ୍ର 3.5 (a) ଓ (b) କୁ ଆଉ ଥରେ ଦେଖ । 3.5(a) ଚିତ୍ରରେ ଅଙ୍କିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ($\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$) ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି । ସେମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି P; ମାତ୍ର 3.5(b) ଚିତ୍ରରେ ଥିବା ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କରି ଦେଖ । ସେମାନେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁନାହାନ୍ତି । ଅବଶ୍ୟ $\overleftrightarrow{AC}$ ବା $\overrightarrow{AC}$ ଅଙ୍କନ କଲେ ତାହା $\overline{BD}$ କୁ ଛେଦ କରିବାର ଦେଖିବ । ତେବେ $\overleftrightarrow{AC}$ ବା $\overrightarrow{AC}$ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ନୁହେଁ । କର୍ଣ୍ଣ ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ । ତେଣୁ କେବଳ $\overline{AC}$ କୁ ହିଁ କର୍ଣ୍ଣ କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର 3.5(a) ରେ ଥିବା ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ **'ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ'** କୁହାଯାଏ । ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜର ସଂଜ୍ଞା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା:

ସଂଜ୍ଞା (ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ) : ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି, ତାହାକୁ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ କୁହାଯାଏ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଚିତ୍ର 3.5 (b) ର ଚତୁର୍ଭୁଜ ଉତ୍ତଳ ନୁହେଁ ।

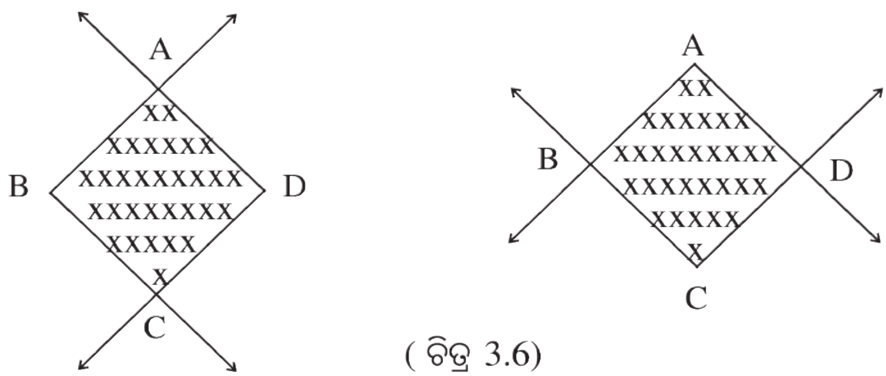
ଏହା ପରଠାରୁ ଆମେ କେବଳ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ ବିଷୟ ଆଲୋଚନା କରିବା । ତେଣୁ ଚତୁର୍ଭୁଜ କହିଲେ ଆମେ କେବଳ 'ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ' ବୋଲି ବୁଝିବା ।

3.1.2 ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଓ ବହିର୍ଦେଶ (Interior and Exterior of a Quadrilateral)

ଏଠାରେ କେବଳ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ ।

ସଂଜ୍ଞା (ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ) :

ଯେକୌଣସି ଦୁଇ ବିପରୀତ କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶର ସାଧାରଣ ଅଂଶ ଅର୍ଥାତ୍ ଅନ୍ତର୍ଦେଶର ଛେଦକୁ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ କୁହାଯାଏ ।



(ଚିତ୍ର 3.6)

(a) (b)

ଚିତ୍ର 3.6 (a) ଦେଖ । ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ର ଦୁଇ ବିପରୀତ କୋଣ $\angle B$ ଓ $\angle D$ ର ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର୍ଦେଶକୁ 'x' ଚିହ୍ନ ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ କରି ଦେଖାଇ ଦିଆଯାଇଛି । ଏହା ହେଉଛି ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ।

ବିପରୀତ କୋଣ $\angle A$ ଓ $\angle C$ର ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ନେଇଥିଲେ ମଧ୍ୟ ଆମେ ସେହି ଏକା ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ପାଇଥା'ନ୍ତେ । ଚିତ୍ର 3.6 (b) ଦେଖ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ A, B, C, D କିମ୍ବା ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁ ଉପରେ ଥିବା ଅନ୍ୟ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ନୁହନ୍ତି ।

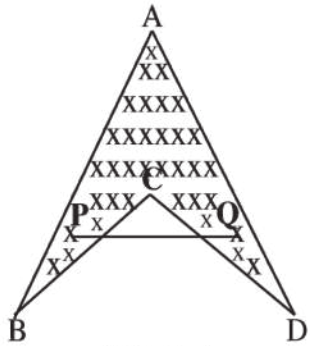
ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ବିନ୍ଦୁକୁ ଚତୁର୍ଭୁଜର **ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ (Interior Point)** କୁହାଯାଏ ।

ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମତଳରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଯଦି ଚତୁର୍ଭୁଜର କୌଣସି ବାହୁ ଉପରେ ନ ଥାଏ ଏବଂ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ମଧ୍ୟ ନ ଥାଏ, ତେବେ ତାହାକୁ ଚତୁର୍ଭୁଜର **ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ (Exterior Point)** କୁହାଯାଏ । ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନେ ଗଠନ କରୁଥିବା ସେଟ୍‌କୁ ଚତୁର୍ଭୁଜର **ବହିର୍ଦେଶ (Exterior)** କୁହାଯାଏ ।

ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ :

1. ଗୋଟିଏ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ । (ଚିତ୍ର – 3.6 ରୁ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

ଚିତ୍ର 3.7 ଗୋଟିଏ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଚିତ୍ର ନୁହେଁ । (କାହିଁକି ?) ଏ ପ୍ରକାର ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶର ସଂଜ୍ଞା ତୁମକୁ ଦିଆଯାଇନାହିଁ । ଜ୍ୟାମିତିକ ସଂଜ୍ଞା ଦିଆଯାଇ ନ ଥିଲେ ମଧ୍ୟ ଅନ୍ତର୍ଦେଶକୁ ଛକ ଚିହ୍ନରେ ଚିହ୍ନିତ କରି ଚିତ୍ରରେ ଦେଖା ଦିଆଯାଇଛି । P ଓ Q ଅନ୍ତର୍ଦେଶର ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ସେମାନଙ୍କର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଯେ ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ନାହିଁ, ଏହା ଚିତ୍ର ଦେଖି ଜାଣି ପାରୁଥିବ । ତେଣୁ ଏ ପ୍ରକାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଉତ୍ତଳ ନୁହେଁ । ଏ ପ୍ରକାର ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ 'ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ' କୁହାଯାଏ ନାହିଁ – ଏହା ପୂର୍ବରୁ ଜାଣିଛ ।



(ଚିତ୍ର 3.7)

ବର୍ତ୍ତମାନ 'ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ' – ଏହି ନାମକରଣର ଯଥାର୍ଥତା ବୁଝି ପାରୁଥିବ । **'ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ' ହେଉଛି ଉତ୍ତଳ ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜ ।** ଏଣିକି 'ଚତୁର୍ଭୁଜ' କହିଲେ, ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ ବୁଝାଇବ ।

2. ଚତୁର୍ଭୁଜର ବହିର୍ଦେଶ ଉତ୍ତଳ ସେଟ ନୁହେଁ । ଏହା ଗୋଟିଏ ସହଜ ପରୀକ୍ଷା – ନିଜେ କରି ଦେଖ ।

3. ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ତାହାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ।

3.1.3 ଚତୁର୍ଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ର (Quadrilateral Region) :

ପୂର୍ବ ଅଧ୍ୟାୟରେ ତୁମେମାନେ ଜାଣିଥିଲ, **ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶର ସଂଯୋଗରୁ ଉତ୍ପନ୍ନସେଟକୁ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ର (Triangular region) କୁହାଯାଏ ଏବଂ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ,କୋଣ ଓ ବାହୁମାନଙ୍କୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଏହି ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ରର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ, କୋଣ ଓ ବାହୁ କୁହାଯାଏ ।**

ସେହିପରି –

(a) ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଓ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶର ସଂଯୋଗରୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ସେଟ୍‌କୁ ଏକ **ଚତୁର୍ଭୁଜ ଆକୃତିବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ର (Quadrilateral region) କୁହାଯାଏ ।**

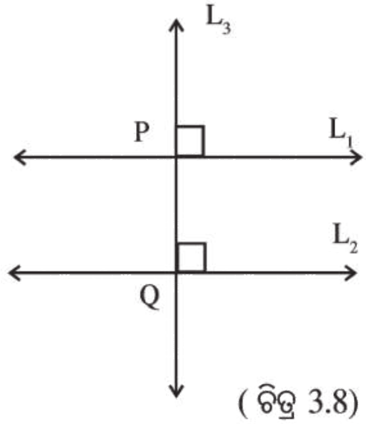
(b) ଚତୁର୍ଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ, କୋଣ ଓ ବାହୁମାନଙ୍କୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଏହି ଚତୁର୍ଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ରର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ, କୋଣ ଓ ବାହୁ କୁହାଯାଏ ।

3.2 ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ଚତୁର୍ଭୁଜ (Types of Quadrilaterals):

ତୁମେ ପ୍ରଥମ ଅଧ୍ୟାୟରେ ପଢ଼ିଥିବା ନିମ୍ନ ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ମନେପକାଅ ।

(i) ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ ନ କଲେ ସେ ଦୁଇଟିକୁ **ସମାନ୍ତର ରେଖା (Parallel Lines)** କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 3.8 ରେ L_1 ଓ L_2 ସମାନ୍ତର ରେଖା (ଆମେ ଲେଖୁ $L_1 \parallel L_2$) ।

(ii) L_3 ରେଖା L_1 ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଲେ L_2 ପ୍ରତି ମଧ୍ୟ ଲମ୍ବ ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 3.8)

(iii) L_1 ଓ L_2 ଉଭୟ ରେଖା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ L_3 ରେଖା L_1 ଓ L_2 କୁ ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ – L_1 ଓ L_2 ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା = PQ ।

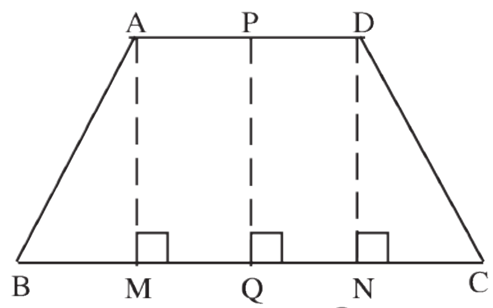
ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ଆମେ ଆବଶ୍ୟକ ସ୍ଥଳେ ବ୍ୟବହାର କରିବା ।

ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁ ଓ କୋଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ବିଭିନ୍ନ ସମ୍ବନ୍ଧ ନେଇ ବିଶେଷ ପ୍ରକାର ଚତୁର୍ଭୁଜମାନ (Special types of quadrilaterals) ଗଠନ କରାଯାଇପାରେ । ସେହିସବୁ ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ନାମରେ ନାମିତ କରାଯାଏ ।

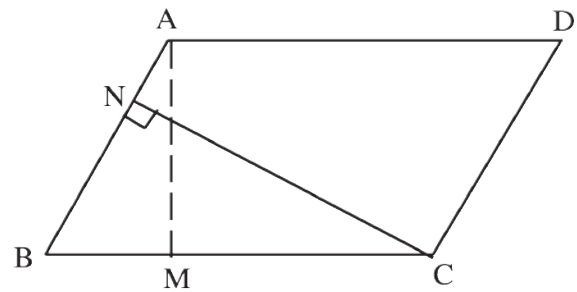
3.2.1. କେତେକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରକାର ଚତୁର୍ଭୁଜ :

1. ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍ : ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଏକ ଯୋଡ଼ା ବିପରୀତ ବାହୁ ସମାନ୍ତର ତାହାକୁ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍ (Trapezium) କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 3.8 ରେ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ହେତୁ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଏକ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍ ।

ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ବାହୁ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତାକୁ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର **ଉଚ୍ଚତା (Height)** କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 3.8 ରେ ABCD ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା PQ (ଅଥବା AM ଅଥବା DN)



(ଚିତ୍ର 3.8)



(ଚିତ୍ର 3.9)

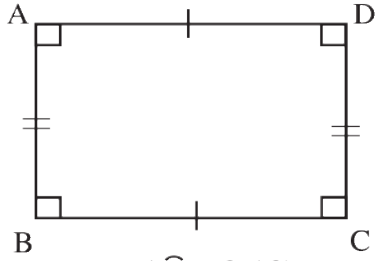
2. ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର :

ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଦୁଇଯୋଡ଼ା ବିପରୀତ ବାହୁ ସମାନ୍ତର ତାହା ଏକ ସାମାନ୍ତରିକଚିତ୍ର (Parallelogram) ।

ଚିତ୍ର 3.9 ରେ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ ବାହୁ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ । ଉକ୍ତ ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର କୁହାଯାଏ ।

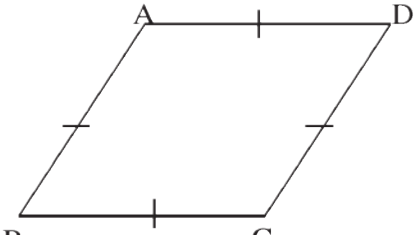
ଚିତ୍ର 3.9 ରେ ଥିବା ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ ବିପରୀତ ବାହୁ $\overline{AD}$ ଓ $\overline{BC}$ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା AM ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା CN । ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର $\overline{BC}$ ଅଥବା $\overline{AD}$ ବାହୁକୁ ଭୂମି ନିଆଗଲେ, AM କୁ ଉଚ୍ଚତା ରୂପେ ନିଆଯାଏ । ସେହିପରି $\overline{AB}$ ଅଥବା $\overline{DC}$ ଭୂମି ହେଲେ, ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର CN ଉଚ୍ଚତା ହୁଏ ।

(i) ଆୟତଚିତ୍ର : ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣ ସମକୋଣ ତାହା ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ର (Rectangle) । ଆଗକୁ ପ୍ରମାଣ କରାଯିବ ଯେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣ ସମକୋଣ ହେଲେ ବିପରୀତ ବାହୁମାନ ସମାନ୍ତର ହେବେ । ତେଣୁ ଆୟତ ଚିତ୍ର ଏକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରକାରର ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର, ଯାହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ 90^0 । ଚିତ୍ର 3.10 ରେ ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ର ABCD ପ୍ରଦର୍ଶିତ ହୋଇଛି ।



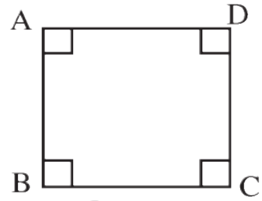
(ଚିତ୍ର 3.10)

(ii) ରମ୍ବସ୍ : ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ତାହା ଏକ ରମ୍ବସ୍ (Rhombus) । ଆଗକୁ ପ୍ରମାଣ କରାଯିବ ଯେ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେଲେ ବିପରୀତ ବାହୁମାନ ମଧ୍ୟ ସମାନ୍ତର ହେବେ । ତେଣୁ ରମ୍ବସ୍ ମଧ୍ୟ ଗୋଟିଏ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରକାରର ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର, ଯାହାର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ । ଚିତ୍ର 3.11ରେ ABCD ଏକ ରମ୍ବସ୍ ।



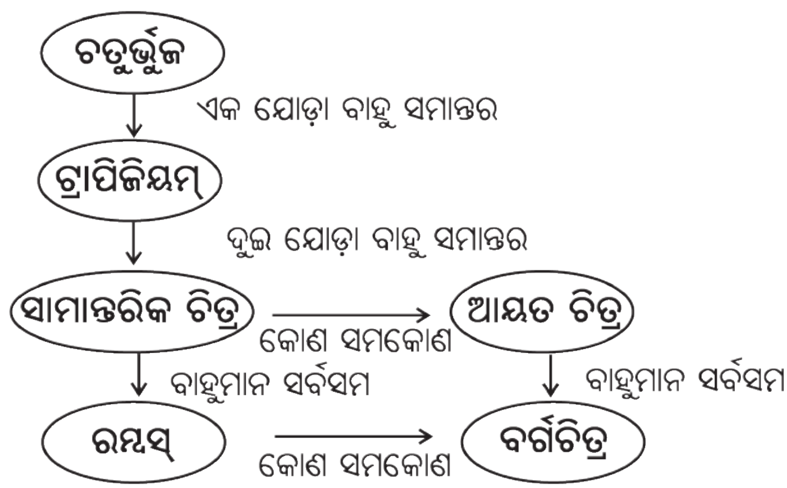
(ଚିତ୍ର 3.11)

(iii) ବର୍ଗଚିତ୍ର : ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ 90^0 ତାହା ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର (Square) । ଏଣୁ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଏକ ସମକୋଣ ବିଶିଷ୍ଟ ରମ୍ବସ୍ ଅଟେ । ଚିତ୍ର 3.12 ରେ ABCD ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ।



(ଚିତ୍ର 3.12)

ଉପରେ ଆଲୋଚିତ ଚତୁର୍ଭୁଜମାନଙ୍କର ପ୍ରକାରଭେଦକୁ ନିମ୍ନ ଚାର୍ଟରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି, ଦେଖ : –



ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (a)

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ଶେଷରେ ଟିକ୍ ଚିହ୍ନ (✓) ଓ ଭୁଲ୍ ଉକ୍ତି ଶେଷରେ ଛକି ଚିହ୍ନ (✘) ବସାଅ ।

(a) ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ☐

(b) ଯେକୌଣସି ପ୍ରକାର ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସର୍ବଦା ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ☐

(c) ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ସେ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଏକ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ। ☐

(d) ଚତୁର୍ଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ କର୍ଣ୍ଣ ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ । ☐

(e) ଚତୁର୍ଭୁଜର ବହିର୍ଦେଶ ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ । ☐

(f) ଚତୁର୍ଭୁଜର ବହିର୍ଦେଶ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଏକ ସେଟ୍ । ☐

(g) ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଓ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶର ସଂଯୋଗରେ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ ଚତୁର୍ଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟକ୍ଷେତ୍ର କୁହାଯାଏ। ☐

(h) ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଓ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ନ ଥାଏ । ☐

(i) ଚାରିଗୋଟି ବାହୁଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରକୁ ଚତୁର୍ଭୁଜ କୁହାଯାଏ । ☐

2. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(a) ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ---- ସମାନ ହେଲେ ଚିତ୍ରଟି ରମ୍ବସ୍ ହୁଏ ।

(b)ଏକ ---- ର କୋଣମାନ ସମକୋଣ ହେଲେ, ଚିତ୍ରଟି ଆୟତ ଚିତ୍ର ହେବ ।

(c) ଏକ ---- ର କୋଣମାନ ସମକୋଣ ହେଲେ, ଚିତ୍ରଟି ବର୍ଗଚିତ୍ର ହେବ ।

(d) ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ରର ---- ସମାନ ହେଲେ ଚିତ୍ରଟି ବର୍ଗଚିତ୍ର ହେବ ।

(e) କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜର ଏକଯୋଡ଼ା ବିପରୀତ ବାହୁ ସମାନ୍ତର ହେଲେ ଚିତ୍ରଟି ---- ହେବ ।

(f) କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜର ଦୁଇଯୋଡ଼ା ବିପରୀତ ବାହୁ ସମାନ୍ତର ହେଲେ ଚିତ୍ରଟି ---- ହେବ ।

(g) ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ବାହୁ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତାକୁ ଏହାର ---- କୁହାଯାଏ ।

(h) ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, ଏବଂ $m\angle ABC = 90^0$ ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଏକ --- ହେବ ।

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ଶେଷରେ ଟିକ୍ ଚିହ୍ନ (✓) ଓ ଭୁଲ୍ ଉକ୍ତି ଶେଷରେ ଛକି ଚିହ୍ନ (✘) ବସାଅ ।

(a) ପ୍ରତ୍ୟେକ ଆୟତଚିତ୍ର ଏକ ସାମାନ୍ତରିକଚିତ୍ର । ☐

(b) ପ୍ରତ୍ୟେକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଏକ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍ । ☐

(c) ପ୍ରତ୍ୟେକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଏକ ସାମାନ୍ତରିକଚିତ୍ର । ☐

(d) ପ୍ରତ୍ୟେକ ରମ୍ବସ୍ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର । ☐

(e) ପ୍ରତ୍ୟେକ ରମ୍ବସ୍ ଏକ ସାମାନ୍ତରିକଚିତ୍ର । ☐

(f) ପ୍ରତ୍ୟେକ ଆୟତଚିତ୍ର ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର । ☐

(g) ପ୍ରତ୍ୟେକ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍ ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର । ☐

3.3 ଚତୁର୍ଭୁଜ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ପରୀକ୍ଷା ଓ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ :

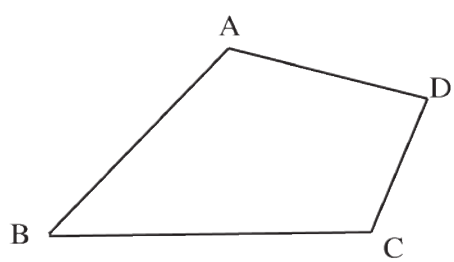
ଚତୁର୍ଭୁଜ ଓ ଚତୁର୍ଭୁଜ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଭିନ୍ନ ପଦର ସଂଜ୍ଞା ପୂର୍ବରୁ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି । କେତେକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରକାରର ଚତୁର୍ଭୁଜମାନଙ୍କୁ ମଧ୍ୟ ପୂର୍ବରୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଇଛି । ଉକ୍ତ ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ପରୀକ୍ଷା ଦ୍ୱାରା ଚତୁର୍ଭୁଜ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଭିନ୍ନ ତଥ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ପରୀକ୍ଷା ଦ୍ୱାରା ତଥ୍ୟ ସଂଗ୍ରହ :

(A) ଚତୁର୍ଭୁଜର କୋଣ ପରିମାଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ :

ପରୀକ୍ଷା – 1

ବିଭିନ୍ନ ଆକୃତିର ତିନୋଟି ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ ଚିତ୍ର 3.13 ଭଳି ନାମିତ କର ।



(ଚିତ୍ର 3.13)

$\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ର ପରିମାଣ ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ଦ୍ୱାରା ମାପି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ପରବର୍ତ୍ତୀ ସାରଣୀ ପୂରଣ କର ।

ଚିତ୍ର ନଂ	$m\angle A$	$m\angle B$	$m\angle C$	$m\angle D$	$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D$
1					
2					
3					

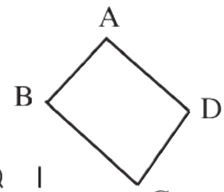
ସାରଣୀ – 3.1

ଉପରିସ୍ଥ ସାରଣୀର ଶେଷ ସ୍ତମ୍ଭରୁ ଦେଖିବ ଯେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରେ ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ର

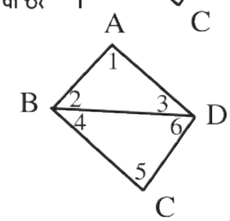
$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^0$

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ – (1) : **ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଚାରି କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 360^0 ।**

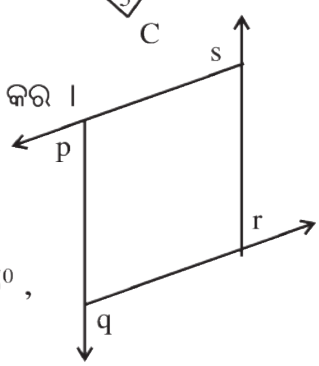
ତୁମ ପାଇଁ କାମ



1. ଗୋଟିଏ କାର୍ଡ଼ବୋର୍ଡ଼ ଆଣି ସେଥିରେ ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ।
2. ଚତୁର୍ଭୁଜର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣ ଅଙ୍କନ କରି ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜରେ ପରିଣତ କର ।
3. "ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିକୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0" ତଥ୍ୟକୁ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଚତୁର୍ଭୁଜର ଚାରିକୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 360^0 ।



ନିଜେ କର



1. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ p, q, r ଓ s ଚିହ୍ନିତ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ସ୍ଥିର କର ।
2. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ r କୋଣର ପରିମାଣ 70^0 ଏବଂ p କୋଣର ପରିମାଣ 50^0 ହେଲେ q ଓ s କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି କେତେ ?

ଉଦାହରଣ – 1 : ABCD ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $m\angle A = 105^0$, $m\angle B = 65^0$, $m\angle C = 60^0$ ହେଲେ, $m\angle D$ର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 360^0 ।

$\therefore m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^0$

$\Rightarrow 105^0 + 65^0 + 60^0 + m\angle D = 360^0 \Rightarrow 230^0 + m\angle D = 360^0$

$\Rightarrow m\angle D = 360^0 - 230^0 = 130^0$ $\therefore m\angle D$ ର ପରିମାଣ 130^0 ।

ଉଦାହରଣ – 2 : ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣର ଅନୁପାତ 2:3:5:8 ହେଲେ, ପ୍ରତ୍ୟେକର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଚତୁର୍ଭୁଜର କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ହେଲା : $2x^0, 3x^0, 5x^0$ ଏବଂ $8x^0$

$\therefore 2x^0 + 3x^0 + 5x^0 + 8x^0 = 360^0$ ($\because$ ଚତୁର୍ଭୁଜର କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 360^0)

$\Rightarrow 18x = 360 \Rightarrow x = \frac{360}{18} = 20$ ।

$\therefore$ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ $40^0, 60^0, 100^0$ ଏବଂ 160^0 । (ଉତ୍ତର)

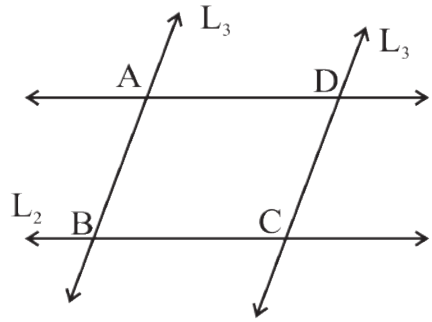
ପରୀକ୍ଷା - 2

(B) **ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ବିପରୀତ ବାହୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ ନିରୂପଣ :**

ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ବିପରୀତ ବାହୁମାନ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର, ଏହା ଆମେ ସଂଜ୍ଞାରୁ ଜାଣିଛୁ । ବର୍ତ୍ତମାନ ବିଭିନ୍ନ ଆକୃତିର ତିନିଗୋଟି ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ଏମାନଙ୍କର ବିପରୀତ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ବନ୍ଧ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରିବା ।

ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

(I) ତୁମେ ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିଥିବା ପ୍ରଣାଳୀ ଅନୁସାରେ ଦୁଇ ଯୋଡ଼ା ସାମନ୍ତର ସରଳ ରେଖା ଅଙ୍କନ କର । ବର୍ତ୍ତମାନ ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ପାଇବ ।



(ଚିତ୍ର 3.14)

(ii) ଚିତ୍ର 3.14 ଭଳି ଆଉ ଦୁଇଟି ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚତ୍ରର ନାମ ଦିଅ ABCD ।

ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଏକଯୋଡ଼ା ବିପରୀତ (ବା ସମ୍ମୁଖୀନ) ବାହୁ ହେଲେ $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ ଏବଂ ଅନ୍ୟଯୋଡ଼ା ବିପରୀତ ବାହୁ ହେଲେ $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ । ସେମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପି ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଲେଖ ।

ଚିତ୍ର ନଂ	$\overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (AB)	$\overline{CD}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (CD)	$\overline{BC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (BC)	$\overline{AD}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (AD)
1				
2				
3				

ସାରଣୀ - 3.2

ଉପରିସ୍ଥ ସାରଣୀରୁ ଦେଖିବ ଯେ ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ AB = CD ଓ AD = BC

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ - (2) : **ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ବିପରୀତ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପରସ୍ପର ସମାନ ।**

ଟୀକା : ଅବଶ୍ୟ ଅଙ୍କିତ ଚିତ୍ରମାନଙ୍କରେ ଦୁଇ ବିପରୀତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟରେ ସାମାନ୍ୟ ତାରତମ୍ୟ ଥାଇପାରେ । ତଥାପି ସେଦ୍ୱୟର ମାପ ପ୍ରାୟ ସମାନ ହେବାର ଦେଖାଯିବ । ଚିତ୍ର ଯେତେ ନିର୍ଭୁଲ ଭାବରେ ଅଙ୍କନ କରାଯିବ, ବିପରୀତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପର ତାରତମ୍ୟ ସେତେ କମି କମି ଯିବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ 1 : **ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ ବିପରୀତ ବାହୁମାନ ସମାନ୍ତର ଓ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ।**

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ 2 : **ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଏକ ଯୋଡ଼ା ବିପରୀତ ବାହୁ ସମାନ୍ତର ଏବଂ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ହେବ ।**

ଉଦାହରଣ – 3 : PQRS ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ପରିସୀମା ସ୍ଥିର କର, ଯେତେବେଳେ PQ = 12 ସେ.ମି. ଏବଂ RQ = 7 ସେ.ମି. ।

ସମାଧାନ : PQRS ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ PQ = RS = 12 ସେ.ମି. ଏବଂ RQ = SP = 7 ସେ.ମି.
(ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ବିପରୀତ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ)

PQRS ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ପରିସୀମା = PQ + QR + RS + SP
= (12 + 7 + 12 + 7) = 38 ସେ.ମି.

∴ ଦତ୍ତ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ପରିସୀମା = 38 ସେ.ମି.

ପରୀକ୍ଷା - 3

(C) ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ବିପରୀତ କୋଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ :

ଠିକ୍ ପୂର୍ବପରି ତିନୋଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଆକୃତିର ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକର ନାମ ABCD ରଖ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରୁ ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ସାହାଯ୍ୟରେ ମାପି m∠A, m∠B, m∠C ଓ m∠D ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ନିର୍ଣ୍ଣିତ ମାପକୁ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଲେଖ ।

ଚିତ୍ର ନଂ	m∠A	m∠C	m∠B	m∠D
1				
2				
3				

ସାରଣୀ – 3.3

ଉପରିସ୍ଥ ସାରଣୀରୁ ଦେଖିବ ଯେ ସାମାନ୍ତରିକଚିତ୍ର ABCD ରେ m∠A = m∠C, m∠B = m∠D

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ – (3) : **ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ବିପରୀତ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ପରସ୍ପର ସମାନ ।**

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ କୋଣର ପରିମାଣ ସମଷ୍ଟି 180^0 । ଉପରୋକ୍ତ ସାରଣୀର ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ କୋଣର ପରିମାଣକୁ ଯୋଗ କଲେ 180^0 ହେବ (ଅବଶ୍ୟ କୋଣଗୁଡ଼ିକୁ ନିର୍ଭୁଲ୍ ଭାବରେ ମପାଯାଇଥିବା ଦରକାର) ।

ଉଦାହରଣ - 4 : ଚିତ୍ର 3.17 ରେ ଥିବା ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ABCD ର $m\angle B = 45^0$ ହେଲେ ଏହାର ଅନ୍ୟ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $m\angle D = m\angle B = 45^0$ (ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ବିପରୀତ କୋଣ ହେତୁ)

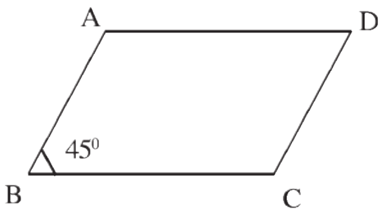
$m\angle B + m\angle D = 45^0 + 45^0 = 90^0$

ତେଣୁ $m\angle C + m\angle A = 360^0 - (m\angle B + m\angle D)$ (ସିଦ୍ଧାନ୍ତ -1)

$= 360 - 90 = 270^0$

କିନ୍ତୁ $m\angle A = m\angle C$ (ସିଦ୍ଧାନ୍ତ – 3)

$m\angle A = m\angle C = \frac{270^0}{2} = 135^0$ (ଉତ୍ତର)



(ଚିତ୍ର 3.17)

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : $m\angle B + m\angle C = 45^0 + 135^0 = 180^0$ ଏବଂ $m\angle A + m\angle D = 45^0 + 135^0 = 180^0$

ଏଣୁ ଆମେ ଜାଣିଲେ ଯେ – **ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କ୍ରମିକ କୋଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ ।**

ଉଦାହରଣ - 5 : ଚିତ୍ର 3.18ରେ ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । C ଠାରେ ABCD ସାମାନ୍ତରିକଚିତ୍ରର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ 50^0 ହେଲେ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $m\angle BCD = 180^0 - 50^0 = 130^0$ (କ୍ରମିକ କୋଣ ହେତୁ)

$m\angle BAD = m\angle BCD = 130^0$ (ସିଦ୍ଧାନ୍ତ – 3)

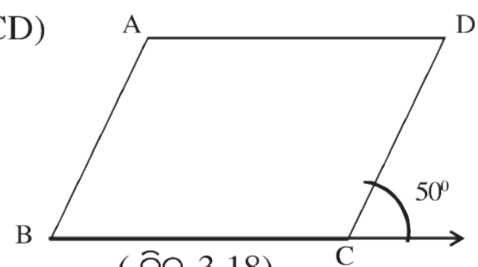
$m\angle ABC + m\angle ADC = 360^0 - (m\angle BAD + m\angle BCD)$

$= 360^0 - (130^0 + 130^0)$

$= 360^0 - 260^0 = 100^0$

କିନ୍ତୁ $m\angle ABC = m\angle ADC$ (ସିଦ୍ଧାନ୍ତ – 3)

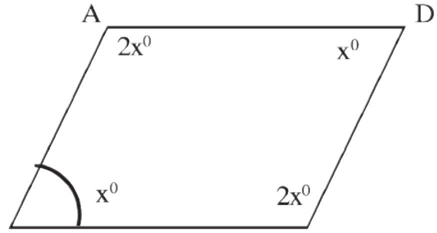
$\therefore m\angle ABC = m\angle ADC = \frac{100^0}{2} = 50^0$



(ଚିତ୍ର 3.18)

ଉଦାହରଣ - 6 : ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ କୋଣର ପରିମାଣ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ଅନ୍ୟଟିର ଦୁଇଗୁଣ ହେଲେ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 3.19 ରେ ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଯାହାର, $m\angle A = m\angle C$ ଏବଂ $m\angle B = m\angle D$



(ଚିତ୍ର 3.19)

ଏଠାରେ $\angle B$ ଓ $\angle C$ ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ କୋଣ

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $\angle C$ ର ପରିମାଣ $\angle B$ ର ପରିମାଣର ଦୁଇଗୁଣ

ମନେକର $m\angle B = x^0 \therefore m\angle C = 2x^0$

ଆମେ ଜାଣିଛୁ $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^0$

$\Rightarrow 2x^0 + x^0 + 2x^0 + x^0 = 360^0$ ($\because$ $m\angle B = m\angle D$ ଏବଂ $m\angle C = m\angle A$)

$\Rightarrow 6x^0 = 360^0 \Rightarrow x = 60^0$

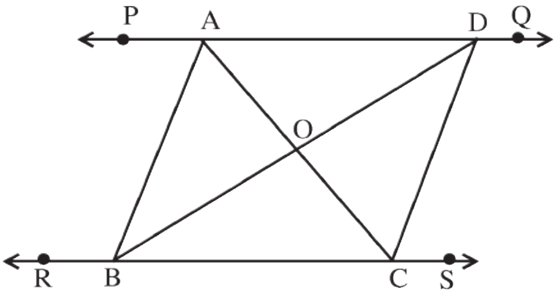
$\therefore$ $\angle A, \angle B, \angle C$ ଓ $\angle D$ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ $120^0, 60^0, 120^0$ ଏବଂ 60^0 (ଉତ୍ତର)

ପରୀକ୍ଷା – 4 :

ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ :

ପୂର୍ବ ବର୍ଣ୍ଣିତ ପ୍ରଣାଳୀରେ ବିଭିନ୍ନ ଆକୃତିବିଶିଷ୍ଟ ତିନିଗୋଟି ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଓ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଚିତ୍ର 3.20 ଅନୁରୂପ ନାମିତ କର । ପ୍ରତ୍ୟେକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର । କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁର ନାମ O ଦିଅ ।

$\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$, $\overline{DO}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପି ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ପୂରଣ କର ।



(ଚିତ୍ର 3.20)

ଚିତ୍ର ନଂ	AO	CO	BO	DO
1				
2				
3				

ସାରଣୀ – 3.4

ସାରଣୀରୁ ଦେଖିବ ଯେ, ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ AO = CO ଏବଂ BO = DO

ଅର୍ଥାତ୍, $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ - (4) : ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।

ଉଦାହରଣ - 7 :

PQRS ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ $\overline{PR}$ ଓ $\overline{QS}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ।
PO = 16 ସେ.ମି., OR = (x + y) ସେ.ମି., SO = 20 ସେ.ମି. ଏବଂ QO = (y + 7) ସେ.ମି. ହେଲେ x ଓ y ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

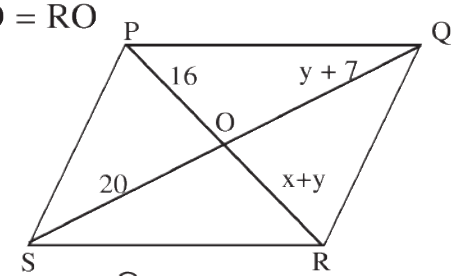
ସମାଧାନ : PQRS ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ SO = QO ଏବଂ PO = RO

$\therefore$ 20 = y + 7 ଏବଂ 16 = x + y ।

$y + 7 = 20 \Rightarrow y = 20 - 7 = 13$

ପୁନଶ୍ଚ $16 = x + y \Rightarrow x + 13 = 16 \Rightarrow x = 16 - 13 = 3$

$\therefore$ x ଓ y ର ମାନ ଯଥାକ୍ରମେ 13 ଓ 3 ।



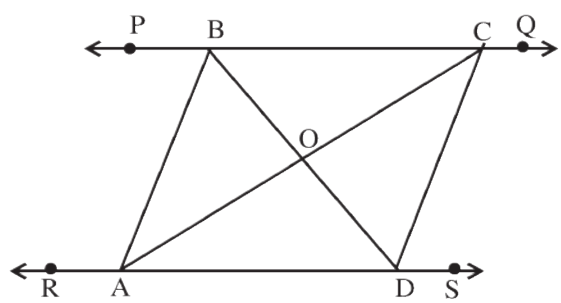
(ଚିତ୍ର 3.21)

ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ :

ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବା କଥା ଆମେ ଜାଣିଲେଣି । ଆମେ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ବାହୁ ଉପରେ ବିଭିନ୍ନ ସର୍ତ୍ତମାନ ଆରୋପ କରି ଏହାକୁ ଆୟତଚିତ୍ର, ରମ୍ବସ୍ ବା ବର୍ଗଚିତ୍ର ଭଳି ଅଧିକରୁ ଅଧିକ ସୁଷମ କରିଥାଉ । ଉକ୍ତ ଚିତ୍ରମାନଙ୍କର କର୍ଣ୍ଣ ମଧ୍ୟରେ ବି ବେଶ୍ ଆକର୍ଷଣୀୟ ସମ୍ବନ୍ଧ ରହିଛି । ପ୍ରଥମେ ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ବନ୍ଧକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରିବା ।

ରମ୍ବସ୍‌ର ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

ତୁମ ପାଇଁ କାମ



(ଚିତ୍ର 3.22)

(i) ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରାଙ୍କନର ସୋପାନ (i) ଅନୁରୂପ ସେଟ୍‌ସ୍କୋୟାର ସାହାଯ୍ୟରେ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{PQ}$ ଓ $\overleftrightarrow{RS}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) $\overleftrightarrow{PQ}$ ଓ $\overleftrightarrow{RS}$ ରେଖାଦ୍ୱୟର ଯେକୌଣସି ଛେଦକ $\overline{AB}$ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି $\overleftrightarrow{RS}$ ଉପରେ A ଓ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଉପରେ B ରହିବ ।

(iii) $\overleftrightarrow{RS}$ ଉପରେ D ବିନ୍ଦୁ ଏପରି ସ୍ଥାପନ କର, ଯେପରି AB = AD ହେବ (ଏହି ସୋପାନ ହିଁ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରକୁ ରମ୍ବସରେ ପରିଣତ କରେ) ।

(iv) D ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{AB}$ ସହ ସମାନ୍ତର $\overline{DC}$ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି $\overleftrightarrow{PQ}$ ଉପରେ C ରହିବ (ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନର ସୋପାନ (iii) ଅନୁରୂପ) । ABCD ରମ୍ବସ ଅଙ୍କିତ ହେଲା ।

ପରୀକ୍ଷା – 5 : ଏକ ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ ନିରୂପଣ :

ତିନୋଟି ଭିନ୍ନ ଆକୃତିବିଶିଷ୍ଟ ରମ୍ବସ୍ ଅଙ୍କନ କର ଓ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଚିତ୍ର 3.22 ଅନୁରୂପ ନାମ ଦିଅ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରେ କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର ଓ ଛେଦବିନ୍ଦୁକୁ O ବୋଲି ନାମ ଦିଅ ।

$\angle AOD$ ର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ $\overline{AO}$, $\overline{CO}$, $\overline{BO}$, $\overline{DO}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ । ନିର୍ଣ୍ଣିତ ମାପଗୁଡ଼ିକୁ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଲେଖ ।

ଚିତ୍ର ନଂ	$m\angle AOD$	AO	CO	BO	DO
1					
2					
3					

ସାରଣୀ – 3.5

ସାରଣୀରୁ ଦେଖିବ ଯେ ABCD ରମ୍ବସ୍‌ରେ $m\angle AOD = 90^0$ ଅର୍ଥାତ୍

$\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ....(1)

ପୁନଶ୍ଚ, AO = CO ଏବଂ BO = DO

ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ....(2)

ଉପରିସ୍ଥ (1) ଓ (2) ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣରୁ ଆମେ ନିମ୍ନ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ଉପନୀତ ହେଲେ –

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ – (5) : ଏକ ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।

ଆୟତ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ :

ଆୟତ ଚିତ୍ରର ବିଶେଷତ୍ୱ ହେଉଛି, ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣ ସମକୋଣ । ଏହି ସ୍ୱାତନ୍ତ୍ର୍ୟର କର୍ଣ୍ଣ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ବନ୍ଧ ଉପରେ କ'ଣ ପ୍ରଭାବ ଅଛି ତାହା ନିମ୍ନ ପରୀକ୍ଷା ମାଧ୍ୟମରେ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରିବା ।

ଆୟତ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

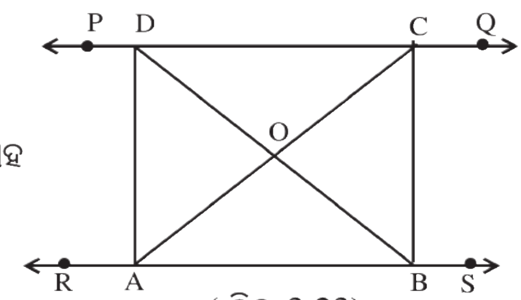
ତୁମ ପାଇଁ କାମ

(i) ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନର ସୋପାନ (i) ଅନୁରୂପ $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$ ରେଖାଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) $\overleftrightarrow{RS}$ ଉପରେ ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ A ଓ B ସ୍ଥାପନ କର ।

(iii) A ଓ Bଠାରେ $\overleftrightarrow{RS}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ଓ $\overleftrightarrow{PQ}$ ସହ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁକୁ ଯଥାକ୍ରମେ D ଓ C ରୂପେ ସୂଚାଅ ।

ABCD ଆୟତ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କିତ ହେଲା ।



(ଚିତ୍ର 3.23)

ପରୀକ୍ଷା – 6 : ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ ନିରୂପଣ :

ଉପର ବର୍ଣ୍ଣିତ ପ୍ରଣାଳୀରେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଆକାରର ତିନୋଟି ଆୟତ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ ଚିତ୍ର 3.23 ଅନୁରୂପ ନାମ ଦିଅ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରେ କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କରି ଛେଦବିନ୍ଦୁକୁ O ବୋଲି ସୂଚାଅ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AO}$, $\overline{CO}$, $\overline{BO}$, $\overline{DO}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପି ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଲେଖ ।

ଚିତ୍ର ନଂ	AC	BD	AO	CO	BO	DO
1						
2						
3						

ସାରଣୀ – 3.6

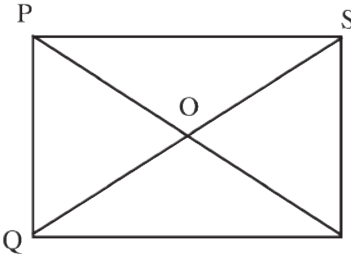
ସାରଣୀରୁ ଦେଖିବ ଯେ ABCD ଆୟତ ଚିତ୍ରରେ AC = BD ....(1)

ପୁନଶ୍ଚ AO = CO ଏବଂ BO = DO ....(2)

(1) ଓ (2) ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣରୁ ଆମେ ନିମ୍ନ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ଉପନୀତ ହୋଇପାରିବା ।

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ–6: ଏକ ଆୟତଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ଏବଂ ସେଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।

ଉଦାହରଣ - 8 : PQRS ଆୟତଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O । ଯଦି OQ=(2x+4) ଏକକ ଏବଂ OP=(3x+1) ଏକକ ହୁଏ ତେବେ x ର ମୂଲ୍ୟ ସ୍ଥିର କରି କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର 3.24)

ସମାଧାନ : PQRS ଆୟତ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ।

ଏଠାରେ $PR = QS \Rightarrow \frac{1}{2}PR = \frac{1}{2}\ QS$

$\Rightarrow PO = QO \Rightarrow 3x+1= 2x+ 4$

$\Rightarrow 3x - 2x = 4 - 1 \Rightarrow\ x = 3$ ଏକକ

$\therefore PO = 3$ ଏକକ $\Rightarrow 2PO = 6$ ଏକକ $\Rightarrow PR = 6$ ଏକକ

$\therefore PR = QS = 6$ ଏକକ ($\because$ ଆୟତଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ)

ବର୍ଗଚତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ :

ବର୍ଗଚିତ୍ରର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣ ସମକୋଣ । ଅର୍ଥାତ୍, ଏଥିରେ ରମ୍ବସ୍ ତଥା ଆୟତଚିତ୍ର ଉଭୟର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ରତାର ସମନ୍ୱୟ ଘଟିଛି । ବର୍ତ୍ତମାନ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ବନ୍ଧକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରିବା ।

ବର୍ଗଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

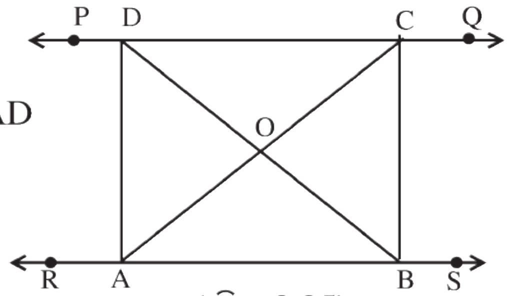
ତୁମ ପାଇଁ କାମ

(i) ଆୟତଚିତ୍ର ଅଙ୍କନର ସୋପାନ (i) ଅନୁରୂପ $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) $\overleftrightarrow{RS}$ ର ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁକୁ A ରୂପେ ଦର୍ଶାଅ ଓ A ଠାରେ $\overleftrightarrow{RS}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ ସେହି ଲମ୍ବ ଓ $\overleftrightarrow{PQ}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁକୁ D ବୋଲି ନାମ ଦିଅ ।

(iii) $\overleftrightarrow{RS}$ ଉପରେ B ବିନ୍ଦୁ ସ୍ଥାପନ କର, ଯେପରି AB = AD

(iv) B ବିନ୍ଦୁରେ $\overleftrightarrow{RS}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର । ଏହି ଲମ୍ବ ଓ $\overleftrightarrow{PQ}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁକୁ C ନାମରେ ନାମିତ କର । ବର୍ତ୍ତମାନ ABCD ବର୍ଗଚିତ୍ର ପାଇଲ ।



(ଚିତ୍ର 3.25)

ପରୀକ୍ଷା - 7 : ଏକ ବର୍ଗ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ ନିରୂପଣ :

ପୂର୍ବବର୍ଣ୍ଣିତ ପ୍ରଣାଳୀରେ ତିନୋଟି ବର୍ଗଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଚିତ୍ର 3.25 ଅନୁରୂପ ନାମ ଦିଅ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରେ କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କରି ଛେଦବିନ୍ଦୁକୁ O ନାମରେ ନାମିତ କର ।

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରୁ $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AO}$, $\overline{CO}$, $\overline{BO}$, $\overline{DO}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏବଂ $\angle AOD$ ର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ମାପଗୁଡ଼ିକୁ ସାରଣୀ -3.7 ରେ ଲେଖ ।

ଚିତ୍ର ନଂ	m∠AOD	AC	BD	AO	CO	BO	DO
1							
2							
3							

ସାରଣୀ – 3.7

ଉପରିସ୍ଥ ସାରଣୀରୁ ଦେଖିବ ଯେ ABCD ବର୍ଗଚିତ୍ରରେ, $m\angle AOD = 90^0$ ଅର୍ଥାତ୍ କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଏବଂ AC = BD ....(1)

ପୁନଶ୍ଚ, AO = OC ଏବଂ BO = OD ....(2)

ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ (1) ଓ (2) ରୁ ଆମେ ନିମ୍ନ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ଉପନୀତ ହୋଇପାରିବା ।

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ – 7: ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ ଓ ସେଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।

ସାମାନ୍ତରିକଚିତ୍ର, ରମ୍ବସ୍, ଆୟତ ଚିତ୍ର ଓ ବର୍ଗଚିତ୍ର, ଏ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରେ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ବନ୍ଧକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

(i) ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର, ଆୟତ ଚିତ୍ର ଓ ବର୍ଗଚିତ୍ର, ଏ ସମସ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରରେ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।

(ii) ରମ୍ବସ୍ ଓ ବର୍ଗଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।

(iii) ଆୟତଚିତ୍ର (ଓ ବର୍ଗଚିତ୍ର)ରେ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ ।

(iv) ବର୍ଗଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଉପରିସ୍ଥ ସମସ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧ ରହିଛି । ଅର୍ଥାତ୍ ବର୍ଗଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ, ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଏବଂ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।

3.4 ବିଭିନ୍ନ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଚତୁର୍ଭୁଜମାନଙ୍କର କର୍ଣ୍ଣ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ବନ୍ଧର ବିଶ୍ଳେଷଣ :

(i) ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ;

[ସମଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଓ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ନ ହୋଇପାରନ୍ତି ।]

(ii) ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ;

[ସମଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ ନ ହୋଇ ପାରନ୍ତି ।]

(iii) ଆୟତଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ ଓ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ;

[ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ନ ହୋଇ ପାରନ୍ତି ।]

(iv) ବର୍ଗଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସମଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ, ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଓ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି । ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ ବର୍ଗଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ବନ୍ଧ ତିନୋଟି ମଧ୍ୟରୁ ଅନ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଗୋଟିଏ ବା ଦୁଇଟି ସମ୍ବନ୍ଧ ରହିଛି ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (b)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(a) ...... ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।

(b) ....ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଏବଂ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।

(c) ....ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ, ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ଏବଂ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ ।

(d) ...... ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଏବଂ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।

(e) .... ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି; କିନ୍ତୁ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟ ନ ହୋଇପାରନ୍ତି ।

(f) ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ ହେଲେ, ଏହାର ବିପରୀତ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି .... ।

(g) ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ, ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଏବଂ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଥିଲେ, ଏହାର ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି .... ।

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ପାଇଁ ଯାହା ସତ୍ୟ ତା' ପାଖରେ T ଲେଖ ଓ ଯାହା ସତ୍ୟ ନୁହେଁ ତା' ପାଖରେ F ଲେଖ ।

(a) ବିପରୀତ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ସର୍ବଦା ସମାନ । [ ]

(b) ବିପରୀତ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ । [ ]

(c) କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ତଥ୍ୟ କିଛି ନାହିଁ । [ ]

(d) ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ କୋଣ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ । [ ]

(e) ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ କୋଣର ପରିମାଣ ପରସ୍ପର ସମାନ । [ ]

(f) ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣ ସମକୋଣ । [ ]

(g) ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ ଅନ୍ୟଟିର ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନ । [ ]

3. ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ପାଖରେ T ଓ ଭୁଲ୍ ଉକ୍ତି ପାଖରେ F ଲେଖ ।

(a) ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରକାର ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ସମାନ । [ ]

(b) ସାମାନ୍ତରିକଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି । [ ]

(c) କୌଣସି କୋଣ ସମକୋଣ ନ ହୋଇଥିବା ଏକ ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ ହେବେ ନାହିଁ ।[ ]

(d) ସନ୍ନିହିତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହୋଇ ନ ଥିବା ଆୟତ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ । [ ]

(e) ବର୍ଗଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ ଓ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ । [ ]

(f) ଏଭଳି ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ନାହିଁ ଯାହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ନାହିଁ । [ ]

4. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର $m\angle A = 70^0$ ହେଲେ, $\angle B$, $\angle C$ ଏବଂ $\angle D$ ର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

5. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ କୋଣର ପରିମାଣର ଅନୁପାତ 2:3 ହେଲେ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

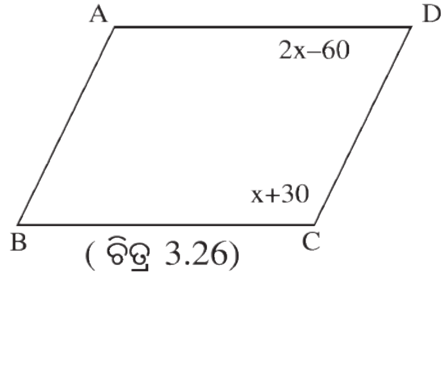
6. ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ଅନୁପାତ 1:3:7:9 ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

7. କୌଣସି ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ସମାନ ଏବଂ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଥିଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜଟି କେଉଁ ପ୍ରକାର ଚିତ୍ର ହେବ କାରଣ ସହ ଦର୍ଶାଅ ।

8. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ 60^0 ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ ରମ୍ବସ୍‌ଟିର କ୍ଷୁଦ୍ରତର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏହାର ଏକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନ ହେବ ।

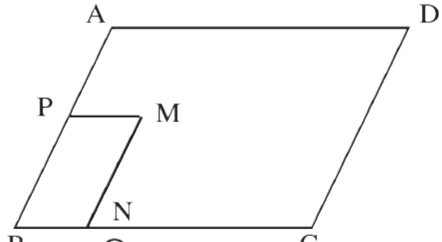
9. ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ କୋଣର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ 60^0 ଏବଂ 80^0 । ଅନ୍ୟକୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ସମାନ ହେଲେ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

10. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ $\angle C$ ଓ $\angle D$ ର ପରିମାଣ (ଡିଗ୍ରୀରେ) ଦିଆଯାଇଛି । ଦତ୍ତମାପକୁ ନେଇ ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର 3.26)

11. ଦତ୍ତ ଚିତ୍ର 3.27 ରେ ABCD ଓ PBNM ଦୁଇଟି ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । $m\angle D = 70^0$ ହେଲେ, $m\angle M$ ଓ $m\angle MNB$ କେତେ ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର 3.27)

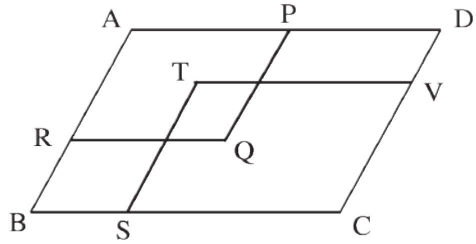
12. ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ କୋଣ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ପରିମାଣ ଅନ୍ୟ କୋଣର ପରିମାଣର ତିନିଗୁଣ ହେଲେ, ଏହାର କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

13. ଚିତ୍ର 3.28ରେ ABCD, APQR ଓ TSCV ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ।

(i) APQR ର କେଉଁ କେଉଁ କୋଣର ପରିମାଣ $m\angle C$ ସହ ସମାନ ?

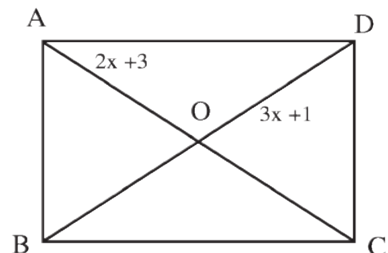
(ii) TSCV ର କେଉଁ କେଉଁ କୋଣର ପରିମାଣ $m\angle A$ ସହ ସମାନ ?

(iii) $m\angle T = 110^0$ ହେଲେ, ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।



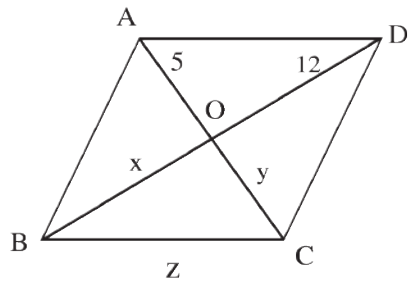
(ଚିତ୍ର 3.28)

14. ABCD ଆୟତଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ 'O' ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । AO = (2x + 3) ଏକକ ଏବଂ OD = (3x +1) ଏକକ ହେଲେ, x ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ଏବଂ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର 3.29)

15. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ABCD ଏକ ରମ୍ବସ୍ । ଚିତ୍ରରୁ x, y ଏବଂ z ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।



(ଚିତ୍ର 3.30)

16.(a) ସେଟ୍‌ସ୍କୋୟାର, ସ୍କେଲ୍ ଏବଂ ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ବ୍ୟବହାର କରି ଏକ ରମ୍ବସ୍ ଅଙ୍କନ କର, ଯାହାର ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ 60^0 ଏବଂ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4 ସେ.ମି. ।

(b) ସେଟ୍‌ସ୍କୋୟାର, ସ୍କେଲ୍ ଏବଂ ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ବ୍ୟବହାର କରି ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର, ଯାହାର ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ 70^0 ଏବଂ ଦୁଇ ସନ୍ନିହିତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 6.3 ସେ.ମି. ଓ 4.5 ସେ.ମି. ।

(c) ସେଟ୍‌ସ୍କୋୟାର୍, ସ୍କେଲ୍ ଏବଂ ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ବ୍ୟବହାର କରି ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 3.2 ସେ.ମି. ହେବ ।

*****

ଅଙ୍କନ (CONSTRUCTION)

ଅଧ୍ୟାୟ

4

MGZY5V

4.1 କେତେକ ମୌଳିକ ଅଙ୍କନ :

ଜ୍ୟାମିତିରେ ସ୍କେଲ୍ ଓ ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟରର ବ୍ୟବହାର ଯଥାକ୍ରମେ **ରୁଲର୍ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଓ ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ** ଦ୍ୱାରା ଅନୁମୋଦିତ । ଏହି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟାମିତିକ ଆଲୋଚନାରେ ସଂଖ୍ୟା ତତ୍ତ୍ୱର ବ୍ୟବହାରର ଯୁକ୍ତିଯୁକ୍ତତା ପ୍ରତିପାଦନ କରନ୍ତି । ଇଉକ୍ଲିଡ୍ ସଂଖ୍ୟାତତ୍ତ୍ୱରେ ଅଭିଜ୍ଞ ଥିଲେ ମଧ୍ୟ ଜ୍ୟାମିତିରେ ରୁଲର୍ ବା ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଭଳି କୌଣସି ସଂଖ୍ୟା ସମ୍ପୃକ୍ତ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଗ୍ରହଣ କରି ନ ଥିଲେ । ଜ୍ୟାମିତିକ ଅଙ୍କନ ପାଇଁ ଇଉକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଅନୁମୋଦିତ ଦୁଇଟି ମାତ୍ର ଯନ୍ତ୍ର ହେଉଛି ରୁଲର୍ ଓ କମ୍ପାସ୍ (ସଳଖ ଧାରକୁ ରୁଲର୍ କୁହାଯାଏ; ଯଥା– ସ୍କେଲ୍‌ର ସଳଖ ଧାର) । ତେଣୁ କେବଳ ରୁଲର୍ ଓ କମ୍ପାସ୍ ବ୍ୟବହାର କରି କରାଯାଉଥିବା ଅଙ୍କନକୁ **ଇଉକ୍ଲିଡ଼ୀୟ ଅଙ୍କନ (Euclidean construction)** କୁହାଯାଏ ।

ମହାମନୀଷୀ ଇଉକ୍ଲିଡ୍‌ଙ୍କ ପଦାଙ୍କ ଅନୁସରଣ କରି ଆମେ କେବଳ ରୁଲର୍ ଓ କମ୍ପାସ୍ ବ୍ୟବହାର କରି କେତେକ ଅଙ୍କନ କରିବା ଓ ମାପ କାର୍ଯ୍ୟ ପାଇଁ କେବଳ ସ୍କେଲ୍ ଓ ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ବ୍ୟବହାର କରିବା ।

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେମାନେ ନିମ୍ନ କେତେକ ମୌଳିକ ଅଙ୍କନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଅବଗତ ଅଛ ଏବଂ ସେ ଅଙ୍କନଗୁଡ଼ିକୁ ତୁମେମାନେ ମଧ୍ୟ ଆଗରୁ ଅଭ୍ୟାସ କରିଛ । ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲା –

1. ରୁଲର୍ ଓ କମ୍ପାସ ସାହାଯ୍ୟରେ ଅଙ୍କନ :

(କ) ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଦେଇ ଏକ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ

(ଖ) ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ

(ଗ) ଦତ୍ତ ରେଖାଖଣ୍ଡର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡୀକରଣ

(ଘ) ଏକ ଦତ୍ତ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡୀକରଣ

(ଙ) ଏକ ଦତ୍ତ କୋଣର ସମପରିମାଣବିଶିଷ୍ଟ ଅନ୍ୟ ଏକ କୋଣ ଅଙ୍କନ

(ଚ) ଏକ ଦତ୍ତ ରେଖା ସହ ସମାନ୍ତର କରି ତାହାର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଏକ ରେଖା ଅଙ୍କନ

(ଛ) ଏକ ଦତ୍ତ ସରଳରେଖାର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ସରଳରେଖା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ

ବିଭିନ୍ନ ତଥ୍ୟ ଆଧାରରେ ତ୍ରିଭୁଜ ଏବଂ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିବା ସମ୍ପର୍କରେ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଜାଣିବା । ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ମଧ୍ୟ ତୁମେମାନେ ବିଭିନ୍ନ ତ୍ରିଭୁଜ ତଥା ଚତୁର୍ଭୁଜମାନ ଅଙ୍କନ କରିଛ ।

4.2 ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ :

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟି କୋଣ ଓ ତିନୋଟି ବାହୁ ଥାଏ । ମାତ୍ର ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ ପାଇଁ ଏ ସମସ୍ତଙ୍କର ମାପ ଆବଶ୍ୟକ ହୁଏ ନାହିଁ । ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଜଣାଥିଲେ ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ । ସେହିପରି ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ ଓ ଦୁଇଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ହୋଇଗଲେ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ । ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣ ଓ ଗୋଟିଏ ବାହୁ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ହୋଇଗଲେ ତ୍ରିଭୁଜଟି ମଧ୍ୟ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ । ମୋଟ୍ ଉପରେ **ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ ପାଇଁ ପରସ୍ପରଠାରୁ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ତିନୋଟି ମାପ ହିଁ ଯଥେଷ୍ଟ ।** ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିକୋଣର ପରିମାଣ ପରସ୍ପରଠାରୁ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ମାପ ନୁହେଁ ; କାରଣ ଦୁଇଟି ମାପ ଜଣାଥିଲେ ଅନ୍ୟଟି ସ୍ୱତଃ ଜଣାପଡ଼ିବ । କାରଣ ତିନିକୋଣ ମାପର ସମଷ୍ଟି 180^0 । ମାତ୍ର ତିନିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପରସ୍ପରଠାରୁ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର । ତେଣୁ ତିନିବାହୁର ଦତ୍ତ ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ନେଇ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ; କିନ୍ତୁ ତିନିକୋଣର ପରିମାଣକୁ ନେଇ ଏକାଧିକ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ହୁଏ ।

ଆମେ ଏଠାରେ କେତେଗୋଟି ମାପ ଜଣାଥାଇ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

(i) ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ,

(ଯେକୌଣସି ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ ବୃହତ୍ତର)

(ii) ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ମାପ ଦତ୍ତ ଥିଲେ,

(iii) ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଏହା ସଂଲଗ୍ନ ଦୁଇଗୋଟି କୋଣର ମାପ ଦତ୍ତ ଥିଲେ,

(iv) ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଅନ୍ୟ ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ।

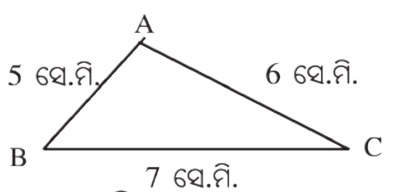
ଏହି ସବୁ ମାପ ଛଡ଼ା ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ମାପ ନେଇ ମଧ୍ୟ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ । ତାହା ପରେ ଜାଣିବ ।

ସୂଚନା : ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିବା ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରଥମେ ଏକ ରଫ୍ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ତାହାର ନାମକରଣ କରାଯାଏ । ଦତ୍ତ ଥିବା ଅଂଶଗୁଡ଼ିକର ମାପକୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଅଂଶର ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଦର୍ଶାଇଲେ ତାହାକୁ **'ବିଶ୍ଳେଷଣ ଚିତ୍ର'** ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ । ଏହା ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଥମେ କେଉଁ ଅଂଶ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ତାହା ଜାଣିହୁଏ । ରଫ୍ ଚିତ୍ର ନିଜର ସୁବିଧା ପାଇଁ କରାଯାଏ । ଏହା ଅଙ୍କନ-ପ୍ରଶ୍ନୋତ୍ତର ଦୃଷ୍ଟିରୁ ବାଧ୍ୟତାମୂଳକ ନୁହେଁ । ମାତ୍ର ଏହା ସାହାଯ୍ୟରେ ଅଙ୍କନର ବିଭିନ୍ନ ସୋପାନ ସହଜରେ ସ୍ଥିର କରି ହୁଏ ।

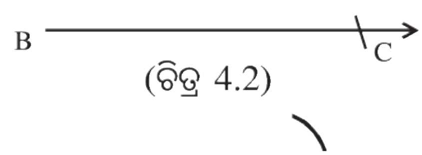
ମନେରଖ : ΔABC ରେ $\angle$A, $\angle$B ଓ $\angle$C ର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ a, b ଓ c ସଙ୍କେତଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ -1 : ତିନି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ (ବାହୁ – ବାହୁ – ବାହୁ):

ଉଦାହରଣ -1 : ΔABC ଅଙ୍କନ କର, ଯାହାର a = 7 ସେ.ମି., b = 6 ସେ.ମି. ଓ c = 5 ସେ.ମି. ।



(ଚିତ୍ର 4.1) (ବିଶ୍ଳେଷଣ ଚିତ୍ର)



(ଚିତ୍ର 4.2)

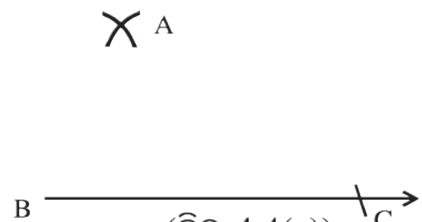
ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

(i) 7 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ $\overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) Bକୁ କେନ୍ଦ୍ର ରୂପେ ନେଇ 5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର ।

(ଚିତ୍ର 4.3)

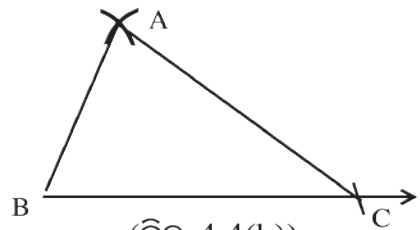
(iii) C କୁ କେନ୍ଦ୍ର ନେଇ 6 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧବିଶିଷ୍ଟ ଏକଚାପ ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରି B କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି ଅଙ୍କିତ ହୋଇଥିବା ଚାପକୁ ଏହା ଛେଦ କରିବ । ଛେଦବିନ୍ଦୁର ନାମ A ଦିଅ ।



(ଚିତ୍ର 4.4(a))

(iv) $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆବଶ୍ୟକ ΔABC ମିଳିଲା ।



(ଚିତ୍ର 4.4(b))

ଟୀକା : B ଓ C ବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ର ନେଇ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଥିବା ଚାପଦ୍ୱୟ $\overline{BC}$ ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ । ଫଳରେ A ବିନ୍ଦୁର ଦୁଇଗୋଟି ଅବସ୍ଥିତି ମିଳିବ । ମାତ୍ର A ର ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ ଅବସ୍ଥିତିକୁ ନେଇ ΔABC ଅଙ୍କନ କଲେ ଯଥେଷ୍ଟ ହେବ ।

ବି.ଦ୍ର. : ତୁମମାନଙ୍କର ଜାଣିବା ପାଇଁ ସୋପାନ ଅନୁଯାୟୀ ଅଙ୍କନଗୁଡ଼ିକୁ ଦର୍ଶାଯାଇଛି । କିନ୍ତୁ ଗୋଟିଏ ସ୍ଥାନରେ ଏବଂ ଗୋଟିଏ ଚିତ୍ରରେ (ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ ଅନୁସରଣରେ) ଅଙ୍କନ କରିବା ବିଧେୟ ।

ନିଜେ କର

ନିମ୍ନରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରଶ୍ନରେ ତିନୋଟି ଲେଖାଏଁ ଦୈର୍ଘ୍ୟମାପ ଦିଆଯାଇଛି । କେଉଁ ତିନୋଟିକୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ରୂପେ ନେଇ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ଦର୍ଶାଅ ।

(i) 7 ସେ.ମି, 5 ସେ.ମି., 6.3 ସେ.ମି.

(ii) 7 ସେ.ମି., 4.5 ସେ.ମି., 12 ସେ.ମି.

(iii) 6.2 ସେ.ମି., 9.5 ସେ.ମି., 9.5 ସେ.ମି.

ବି.ଦ୍ର. : ତ୍ରିଭୁଜର ଯେକୌଣସି ଦୁଇବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ଏହାର ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (a)

(ସମସ୍ତ ଅଙ୍କନ ଲାଗି କେବଳ ସ୍କେଲ୍ ଓ କମ୍ପାସ୍ ବ୍ୟବହାର କର)

1. ABC ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର, ଯହିଁରେ $a = 7$ ସେ.ମି., $b = 3.5$ ସେ.ମି. ଓ $c = 5$ ସେ.ମି. । ଏହାର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ A ରୁ $\overline{BC}$ ବାହୁ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର । ସେହି ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ ।

2. ΔABCର $AB = AC = BC = 6.1$ ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରି ଏହାର କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ମାପି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ΔABC ଅଙ୍କନ କର, ଯାହାର $BC = 5$ ସେ.ମି., $AB = AC = 6.3$ ସେ.ମି., ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରି $\overline{BC}$ ର ସଂଲଗ୍ନ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ΔLMN ଅଙ୍କନ କର, ଯାହାର $LM = 5$ ସେ.ମି., $LN = 4.7$ ସେ.ମି. ଓ $MN = 6.1$ ସେ.ମି., ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରି ଏହାର କୋଣଗୁଡ଼ିକ ମାପ ଓ କେଉଁ କୋଣଟି ବୃହତ୍ତମ ତାହା ଦେଖାଅ ।

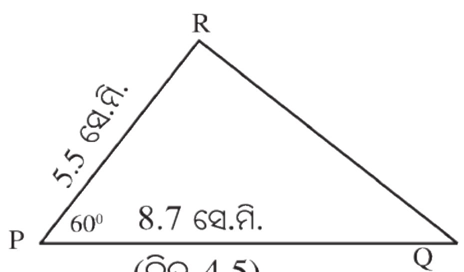
5. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର ତିନି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 5.8 ସେ.ମି., 4.7 ସେ.ମି. ଓ 3.9 ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରି 5.8 ସେ.ମି., 4.7 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଅଙ୍କନ କର ।

6. a = 6 ସେ.ମି., b = 7 ସେ.ମି. ଓ c = 8 ସେ.ମି. ନେଇ ΔABC ଅଙ୍କନ କର । ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବମାନ ଅଙ୍କନ କର ।

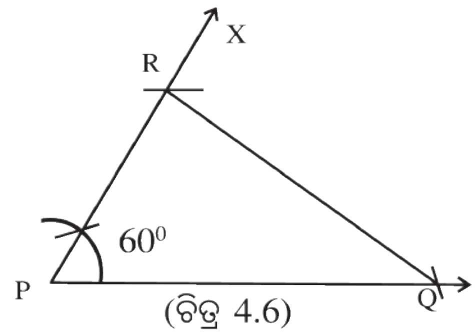
(ଅଙ୍କନ ତ୍ରୁଟିଶୂନ୍ୟ ହୋଇଥିଲେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବଗୁଡ଼ିକ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ)

ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ - 2 : ଦୁଇଗୋଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ପରିମାଣ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ (ବାହୁ – କୋଣ – ବାହୁ) :

ଉଦାହରଣ - 2 : ΔPQR ଅଙ୍କନ କର, ଯହିଁରେ PQ = 8.7 ସେ.ମି., PR = 5.5 ସେ.ମି. ଓ $m\angle P = 60^0$ ।



(ଚିତ୍ର 4.5)
(ବିଶ୍ଳେଷଣ ଚିତ୍ର)



(ଚିତ୍ର 4.6)
(ଅଙ୍କିତ ଚିତ୍ର)

(i) 8.7 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ $\overline{PQ}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) $\overrightarrow{PX}$ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି $m\angle XPQ = 60^0$

(iii) P କୁ କେନ୍ଦ୍ର ନେଇ 5.5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରି ତାହା $\overrightarrow{PX}$ କୁ ଛେଦ କରିବ । ଛେଦବିନ୍ଦୁର ନାମ R ଦିଅ ଏବଂ $\overline{RQ}$ ଅଙ୍କନ କର । ବର୍ତ୍ତମାନ ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ΔPQR ମିଳିଲା ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (b)

1. ΔABC ଅଙ୍କନ କର, ଯାହାର a = 5.6 ସେ.ମି., $m\angle B = 60^0$, c = 6.3 ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରି $\angle C$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଅଙ୍କନ କର ।

2. ΔABCରେ AB = AC = 5.7 ସେ.ମି., $m\angle A = 120^0$; ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରି $\angle B$ ଓ $\angle C$ର ପରିମାଣ ମାପି ଲେଖ । ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ପର୍କ ଲେଖ ।

3. ΔPQR ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର PQ = 7 ସେ.ମି., PR = 5.6 ସେ.ମି. ଓ $m\angle P = 45^0$ । ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରି R ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{PQ}$ ପ୍ରତି ଏକ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ।

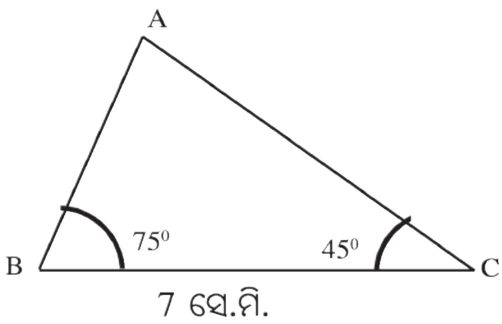
4. ΔABC ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି $m\angle B = 75^0$, AB = 3 ସେ.ମି., BC = 4 ସେ.ମି. ।

ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ - 3 :

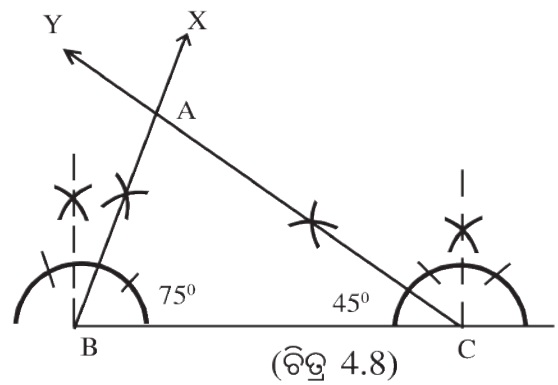
ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ସେହି ବାହୁର ସଂଲଗ୍ନ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ (କୋଣ–ବାହୁ–କୋଣ) :

ଉଦାହରଣ – 3 :

ΔABC ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରି BC = 7 ସେ.ମି., $m\angle B = 75^0$, $m\angle C = 45^0$ ।



(ଚିତ୍ର 4.7)
(ବିଶ୍ଳେଷଣ ଚିତ୍ର)



(ଚିତ୍ର 4.8)
(ଅଙ୍କିତ ଚିତ୍ର)

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

(i) 7 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ $\overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) $\overrightarrow{BX}$ ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରି $m\angle CBX = 75^0$ ହେବ ।

(iii) $\overrightarrow{CY}$ ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରି $m\angle BCY = 45^0$ ହେବ ।

(iv) $\overrightarrow{BX}$ ଓ $\overrightarrow{CY}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁର ନାମ A ଦିଅ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ΔABC ମିଳିଲା ।

ସୂଚନା : ΔABCର $\overline{BC}$ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏବଂ $\angle B$ ଓ $\angle A$ ର ପରିମାଣ ଦତ୍ତ ଥିଲେ

$m\angle C = 180^0 - (m\angle A + m\angle B)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ । ଫଳରେ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ତିନିକୋଣ ମଧ୍ୟରୁ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ – 4 (c)

1. ΔABC ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରି a = 7.5 ସେ.ମି., $m\angle B = 75^0$ ଓ $m\angle C = 30^0$

2. ΔABC ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରି $m\angle A = 60^0$, $m\angle B = 75^0$ ଓ c = 5.9 ସେ.ମି. ।

3. ΔABC ର BC = 6.5 ସେ.ମି., $\overline{BC}$ ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଲଗ୍ନ କୋଣର ପରିମାଣ = 75^0 । ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରି $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. Δ PQR ଅଙ୍କନ କର, ଯାହାର PQ = 5.7 ସେ.ମି., $m\angle P = 60^0$ ଓ $m\angle Q = 45^0$ ।

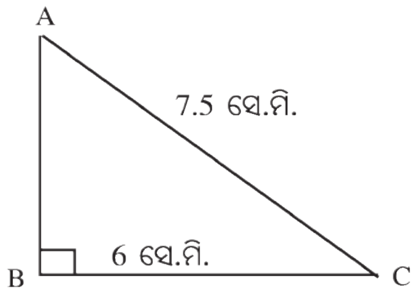
5. b = 7 ସେ.ମି., $m\angle A = 60^0$ ଓ $m\angle B = 75^0$ ନେଇ ΔABC ଅଙ୍କନ କର ।

ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ - 4 :

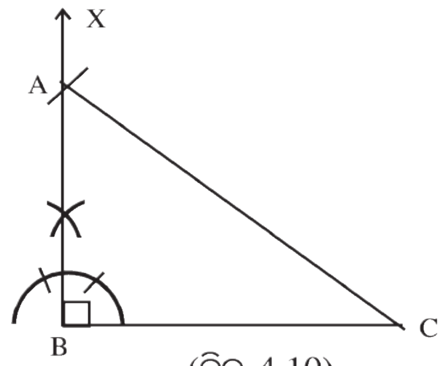
କର୍ଣ୍ଣ ଓ ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ (ସମକୋଣ–କର୍ଣ୍ଣ–ବାହୁ) :

ଉଦାହରଣ - 4 :

ABC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 7.5 ସେ.ମି. ଓ BC = 6 ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 4.9)
(ବିଶ୍ଳେଷଣ ଚିତ୍ର)



(ଚିତ୍ର 4.10)
(ଅଙ୍କିତ ଚିତ୍ର)

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

(i) 6 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ $\overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) $\overrightarrow{BX}$ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି $m\angle XBC = 90^0$ ହେବ ।

(iii) C କୁ କେନ୍ଦ୍ର ନେଇ 7.5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଏକ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର ଓ ତାହା $\overrightarrow{BX}$ କୁ ଛେଦ କରୁ । ଛେଦବିନ୍ଦୁର ନାମ A ଦିଅ ।

(iv) $\overline{AC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ΔABC ମିଳିଲା ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (d)

1. ABC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର, ଯହିଁରେ କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 5 ସେ.ମି. ଓ BC = 3 ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରି $\overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ ।

2. ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର, ଯାହାର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 8 ସେ.ମି. ଓ ଅନ୍ୟ ଏକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 5.1 ସେ.ମି. ।

3. ABC Δ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି AB = BC = 5.6 ସେ.ମି. । B ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{AC}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ପାଦବିନ୍ଦୁ D । BD = 4 ସେ.ମି. ।

ସୂଚନା: ΔABD ରେ $\angle D$ ସମକୋଣ ଓ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି । ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ-4 ପ୍ରଣାଳୀରେ ପ୍ରଥମେ ΔABD ଅଙ୍କନ କର । ତା'ପରେ $\overrightarrow{AD}$ ଉପରେ C ବିନ୍ଦୁ ନିରୂପଣ କରି ΔABC ଅଙ୍କନ କର ।

4. ΔABC ରେ AC = 5 ସେ.ମି. । $\overline{AB}$ ପ୍ରତି $\overline{CD}$ ଲମ୍ବ । CD = 4 ସେ.ମି., BC = 6 ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର ।

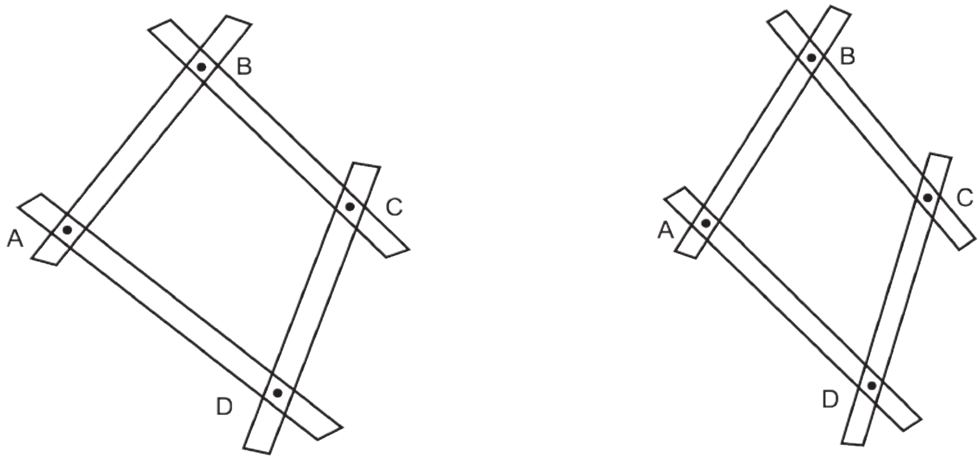
4.3 ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ :

ଆମେ ତ୍ରିଭୁଜ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ତିନୋଟି ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ମାପ ନେଇ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିପାରୁ; ଯେପରି ତ୍ରିଭୁଜର (i) ତିନିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, (ii) ଦୁଇବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ମାପ, (iii) ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଦୁଇଟି କୋଣର ମାପ, (iv) ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ଓ ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଇତ୍ୟାଦି ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରଶ୍ନ ଉଠୁଛି – ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜ ପାଇଁ ଚାରିଗୋଟି ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ମାପ ଜାଣିଗଲେ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିବା ସର୍ବଦା ସମ୍ଭବ କି ?

ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଭଳି ଚତୁର୍ଭୁଜର ଚାରିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମଧ୍ୟ ଚାରୋଟି ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ମାପ । ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଜାଣିଗଲେ ଆମେ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଭାବରେ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିପାରୁଥିଲେ । ତେବେ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଚାରିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଜାଣିଗଲେ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଭାବରେ ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଆଙ୍କିପାରିବା କି ?

ତୁମ ପାଇଁ କାମ



(କ) (ଖ)

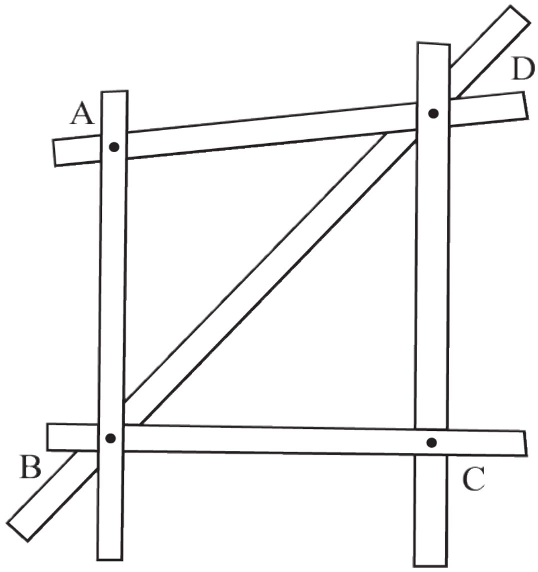
(ଚିତ୍ର 4.11)

(i) ଚାରିଗୋଟି ବାଉଁଶପାତିଆ (ଅଥବା ପଟିକାଗଜ) ନିଅ । ପ୍ରତି ପାତିଆର ଦୁଇ ମୁଣ୍ଡରେ ଦୁଇଟି ରନ୍ଧ୍ର କର । ପାତିଆଗୁଡ଼ିକୁ ପିନ୍ ବା ସ୍କ୍ରୁ ଦ୍ୱାରା ମୁଣ୍ଡକୁ ମୁଣ୍ଡ ଯୋଡ଼ି ପ୍ରଦର୍ଶିତ ଚିତ୍ର 4.11(କ) ଭଳି ଚତୁର୍ଭୁଜଟିଏ ତିଆରି କର । ଏହି ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁ ଚାରୋଟି, ଦତ୍ତ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ।

(ii) ବର୍ତ୍ତମାନ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଦୁଇ ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷକୁ (A ଓ Cକୁ) ଚାପି ଦିଅ । ଦେଖିବ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଆକୃତି ବଦଳି ଯାଇଛି; ଯଦିଓ ଏହାର ଚାରିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପୂର୍ବ ପରି ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହିଛି । ଚିତ୍ର 4.11(ଖ) ଦେଖ । ଏହିପରି ଚାପ ଦେଇ ଏକାଧିକ ଆକୃତିବିଶିଷ୍ଟ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଗଠନ ହୋଇପାରୁଥିବାର ଦେଖିବ ।

(iii) ଉକ୍ତ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣରୁ କ'ଣ ଜାଣିଲ ?

(ଏଥିରୁ ଆମେ ଜାଣିଲୁ ଯେ, ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର କେବଳ ଚାରିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ନେଇ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଚତୁର୍ଭୁଜ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।)



(ଚିତ୍ର 4.11 (ଗ))

(iv) ବର୍ତ୍ତମାନ ଅନ୍ୟ ଏକ ପାତିଆ ନେଇ ପୂର୍ବରୁ ଗଠିତ ହୋଇଥିବା ଚତୁର୍ଭୁଜର ଦୁଇ ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷ B ଓ D ସହ ସଂଯୋଗ କର । $\overline{BD}$, ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର ଏକ କର୍ଣ୍ଣ ହେବ । [ଚିତ୍ର 4.11(ଗ)]

(v) ପୁନଶ୍ଚ ପାତିଆଗୁଡ଼ିକ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ ଚାରିପଟୁ ଚାପ ଦେଇ ଦେଖ । ଗଠିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଆକୃତି ବଦଳାଇବା ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।

(vi) ଏଥିରୁ କ'ଣ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲ ?

ବି.ଦ୍ର.: (ପରସ୍ପର ନିରପେକ୍ଷ ପାଞ୍ଚଟି ଅଂଶର ମାପ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ।)

ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଶ୍ଳେଷଣ :

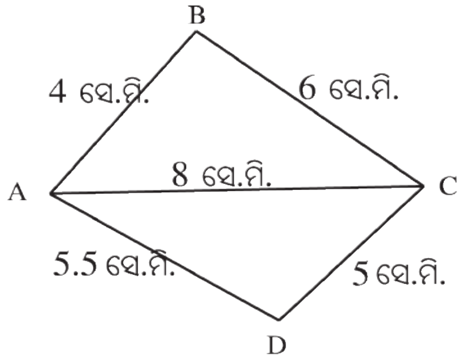
ଦତ୍ତ ମାପ ବ୍ୟବହାର କରି ଚତୁର୍ଭୁଜଟିଏ ଅଙ୍କନ କରିବା ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରଥମେ ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର ରଫ୍ ଚିତ୍ର (ବିଶ୍ଳେଷଣ ଚିତ୍ର) ଅଙ୍କନ କରି ଦତ୍ତ ମାପଗୁଡ଼ିକୁ ସେହି ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଅ । ଏହି ରଫ୍ ଚିତ୍ରକୁ ଦେଖି ସ୍ଥିର କର ପ୍ରଥମେ ଚତୁର୍ଭୁଜର କେଉଁ ଅଂଶଟିକୁ ଅଙ୍କନ କରିବ ବା କେଉଁ ବାହୁଟିରୁ ଅଙ୍କନ ଆରମ୍ଭ କରିବ; ତା'ହେଲେ ଅଙ୍କନ ସହଜ ହେବ ।

ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ - 1 : ଚାରିବାହୁ ଓ ଏକ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ :

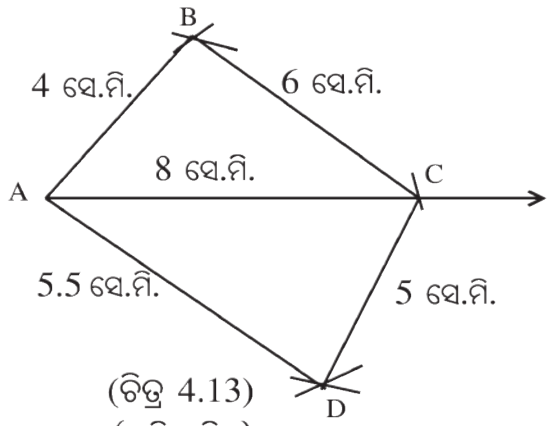
ଉଦାହରଣ - 5 :

ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର, ଯହିଁରେ AB = 4 ସେ.ମି., BC = 6 ସେ.ମି., CD = 5 ସେ.ମି., AD = 5.5 ସେ.ମି. ଓ କର୍ଣ୍ଣ AC = 8 ସେ.ମି. ।

ବିଶ୍ଳେଷଣ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର ରଫ୍ ଚିତ୍ରଟିଏ ଅଙ୍କନ କର । ତହିଁରେ $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{AD}$ ଓ $\overline{AC}$ ର ମାପଗୁଡ଼ିକ ସୂଚାଅ । ΔABC ଓ Δ ACD ପ୍ରତ୍ୟେକର ତିନିବାହୁ ଦତ୍ତ ଥିବାରୁ ଆମେ କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ABC ଓ ACD ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟକୁ ଅଙ୍କନ କରିପାରିବା ଓ ଏହାଦ୍ୱାରା ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ମିଳିଯିବ ।



(ଚିତ୍ର 4.12)
(ବିଶ୍ଳେଷଣ ଚିତ୍ର)



(ଚିତ୍ର 4.13)
(ଅଙ୍କିତ ଚିତ୍ର)

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

(i) 8 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ $\overline{AC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) A କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି 4 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର ।

(iii) C କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି 6 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଏକ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରି ତାହା A କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି ଅଙ୍କିତ ଚାପକୁ ଛେଦ କରିବ । ଛେଦବିନ୍ଦୁର ନାମ B ଦିଅ । $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(iv) ଏବେ A କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି 5.5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧବିଶିଷ୍ଟ ଅନ୍ୟ ଏକ ଚାପ, $\overline{AC}$ ର ଯେଉଁ ପାର୍ଶ୍ୱରେ B ଅଛି, ତାହାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅଙ୍କନ କର ।

(v) C କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି 5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧବିଶିଷ୍ଟ ଅନ୍ୟ ଏକ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର । ତାହା A କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି ଅଙ୍କିତ 5.5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧବିଶିଷ୍ଟ ଚାପକୁ ଛେଦ କରୁ । ଛେଦବିନ୍ଦୁର ନାମ D ଦିଅ ।

(vi) $\overline{CD}$ ଓ $\overline{AD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ମିଳିଲା ।

ସୂଚନା : ରଫ୍ ଚିତ୍ରରୁ ଆମେ ଜାଣିଲୁ ଯେ $AB + BC > AC$ (କାରଣ 4 ସେ.ମି. + 6 ସେ.ମି. > 8 ସେ.ମି.) ଓ $AD + DC > AC$ (କାରଣ 5.5 ସେ.ମି. + 5 ସେ.ମି. >8 ସେ.ମି.) । ତେଣୁ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରିବା ସମ୍ଭବପର ହେଲା ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (e)

1. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରି AB = 4 ସେ.ମି., BC = 3 ସେ.ମି., AD = 2.5 ସେ.ମି., CD = 3 ସେ.ମି. ଓ BD = 4 ସେ.ମି. ।

2. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି AB = BC = 5.5 ସେ.ମି., CD = 4 ସେ.ମି., AD = 6.3 ସେ.ମି. ଏବଂ AC = 9.4 ସେ.ମି. । ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରି $\overline{BD}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍ ଅଙ୍କନ କର, ଯାହାର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4.5 ସେ.ମି. ଏବଂ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 6 ସେ.ମି. । ରମ୍ବସ୍‌ଟି ଅଙ୍କନ କରି ତାହାର ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପି ସ୍ଥିର କର ।

4. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର AB = 3 ସେ.ମି., BC = 4.2 ସେ.ମି. ଓ କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 6 ସେ.ମି. ।

ନିଜେ କର

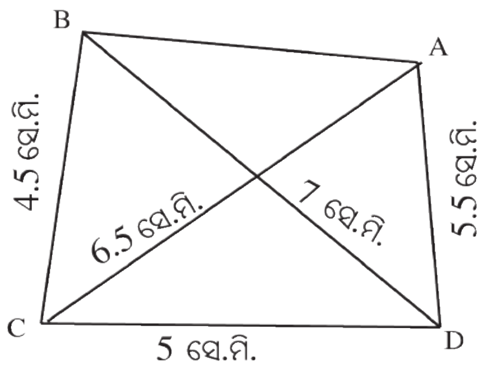
ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର AB = 3 ସେ.ମି., BC = 4 ସେ.ମି., CD = 5.5 ସେ.ମି., DA = 6 ସେ.ମି. ଏବଂ BD = 9 ସେ.ମି. ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ କି ? ଯଦି ଉତ୍ତର 'ନାହିଁ' ହୁଏ, ତେବେ କାରଣ ଦର୍ଶାଅ ।

ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ - 2 :

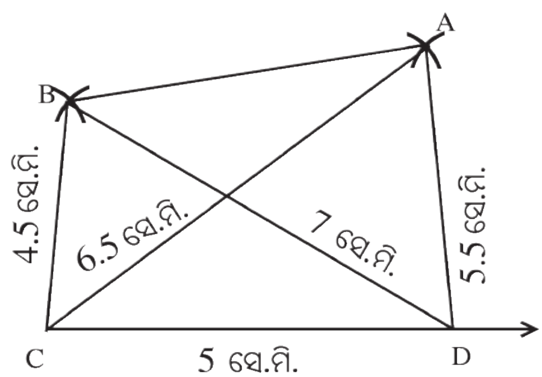
ତିନୋଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଦୁଇଟି କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ :

ଉଦାହରଣ – 6 :

ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି BC = 4.5 ସେ.ମି., CD = 5 ସେ.ମି., DA = 5.5 ସେ.ମି., AC = 6.5 ସେ.ମି. ଏବଂ BD = 7 ସେ.ମି. ।



(ବିଶ୍ଳେଷଣ ଚିତ୍ର)
(ଚିତ୍ର 4.14)



(ଅଙ୍କିତ ଚିତ୍ର)
(ଚିତ୍ର 4.15)

ବିଶ୍ଳେଷଣ ଚିତ୍ରରୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ΔACD ଓ ΔBCD ଦ୍ୱୟର ତିନିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି । ତେଣୁ ଉଭୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଅଙ୍କନ ମାଧ୍ୟମରେ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ହେବ ।

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

(i) 5 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ $\overline{CD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) C କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି 4.5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ $\overline{CD}$ ର କୌଣସି ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଏକ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର ।

(iii) D କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି 7 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଏକ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରି ତାହା C କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି ଅଙ୍କିତ ଚାପକୁ ଛେଦ କରିବ । ଛେଦବିନ୍ଦୁର ନାମ B ଦିଅ ।

(iv) ପୁନଶ୍ଚ C କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି 6.5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଏକ ଚାପ $\overline{CD}$ ର ଯେଉଁ ପାର୍ଶ୍ୱରେ B ଅଛି, ସେହି ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅଙ୍କନ କର ।

(v) D କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି 5.5. ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଏକ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର ଓ ତାହା C ବିନ୍ଦୁରେ (iv)ରେ ଅଙ୍କିତ ଚାପକୁ ଛେଦ କରୁ । ଛେଦବିନ୍ଦୁର ନାମ A ଦିଅ ।

(vi) $\overline{DA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆବଶ୍ୟକ ମାପଗୁଡ଼ିକ ଥାଇ ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ମିଳିଲା ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (f)

1. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର, ଯାହାର AB = 7.0 ସେ.ମି., BC = 5.5 ସେ.ମି., AD = 7.4 ସେ.ମି., AC = 8.0 ସେ.ମି. ଓ BD = 8.5 ସେ.ମି. ।

2. PQRS ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର, ଯହିଁରେ QR = 7.5 ସେ.ମି., RP = PS = 6.0 ସେ.ମି., RS = 5 ସେ.ମି. ଓ QS = 10 ସେ.ମି. ।

3. BC = 7.5 ସେ.ମି., AC = AD = 8.3 ସେ.ମି., CD = 6.5 ସେ.ମି. ଓ BD = 11.0 ସେ.ମି. ମାପ ନେଇ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର ।

4. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର, ଯାହାର BC = 2.6 ସେ.ମି., CA = 4.0 ସେ.ମି., AD = 3.5 ସେ.ମି., CD = 2 ସେ.ମି. ଓ BD = 3.0 ସେ.ମି. ।

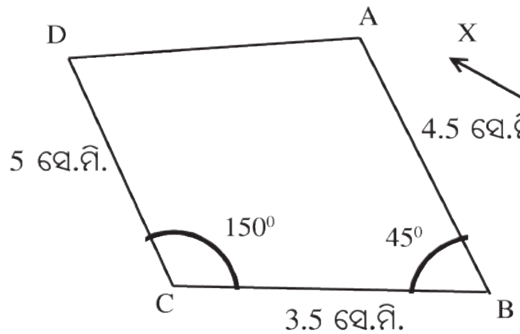
5. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ AB = 4.5 ସେ.ମି., CD = 6.0 ସେ.ମି., AD = 6.3 ସେ.ମି., BD = 5.0 ସେ.ମି. ଓ AC = 5.5 ସେ.ମି. । ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର ।

ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ -3

ତିନିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ସେହି ବାହୁମାନଙ୍କର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ :

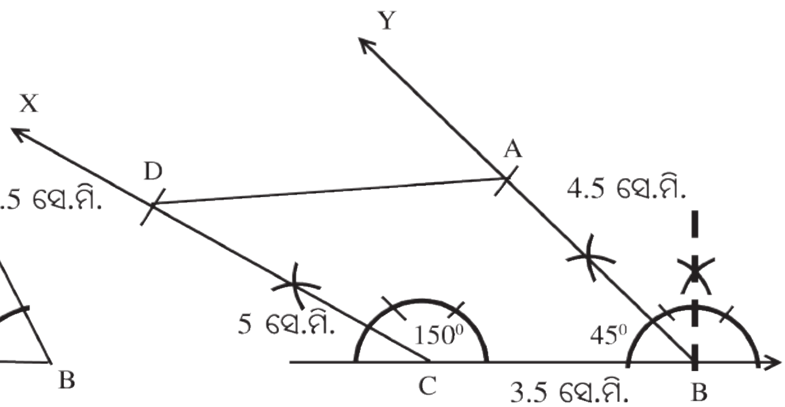
ଉଦାହରଣ - 7 :

ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର, ଯାହାର AB = 4.5 ସେ.ମି., BC = 3.5 ସେ.ମି., CD = 5 ସେ.ମି., $m\angle B = 45^0$ ଓ $m\angle C = 150^0$



(ବିଶ୍ଳେଷଣ ଚିତ୍ର)

(ଚିତ୍ର 4.16)



(ଅଙ୍କିତ ଚିତ୍ର)

(ଚିତ୍ର 4.17)

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

(i) 3.5 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟର $\overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) C ବିନ୍ଦୁରେ $\overrightarrow{CX}$ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରିକି $m\angle BCX = 150^0$ ହେବ ।

(iii) Cକୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି 5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଏକ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର ଓ ତାହା $\overrightarrow{CX}$ କୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ।

(iv) B ବିନ୍ଦୁରେ $\overrightarrow{BY}$ ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରିକି $m\angle CBY = 45^0$ ହେବ ।

(v) B କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି 4.5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଏକଚାପ ଅଙ୍କନ କର ଓ ତାହା $\overrightarrow{BY}$ କୁ A ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ।

(vi) $\overline{AD}$ ଅଙ୍କନ କର । ABCD ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଚତୁର୍ଭୁଜ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (g)

1. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର, ଯାହାର AB = 3.5 ସେ.ମି., BC = 5.5 ସେ.ମି., CD = 5 ସେ.ମି. ଏବଂ $m\angle B = 120^0$, $m\angle C= 90^0$ ।

2. PQRS ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରିକି PQ = QR = 3 ସେ.ମି., PS = 5 ସେ.ମି., $m\angle P = 90^0$, $m\angle Q = 105^0$ ।

3. PQRS ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର, ଯହିଁରେ $m\angle Q = 45^0$, $m\angle R = 90^0$, PQ = 5.5 ସେ.ମି., QR = 5 ସେ.ମି. ଏବଂ RS = 4 ସେ.ମି. ।

4. ABCD ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍ ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରି $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, AB = 3.8 ସେ.ମି., BC = 6 ସେ.ମି., CD = 4 ସେ.ମି. ଏବଂ $m\angle B = 60^0$ ।

ନିଜେ କର

(i) Δ XBC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର XB= 7.6 ସେ.ମି., XC = 8 ସେ.ମି. ଏବଂ BC = 6 ସେ.ମି. ।

(ii) $\overline{XB}$ ଓ $\overline{XC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ D ସ୍ଥିର କର ।

(iii) $\overline{AD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

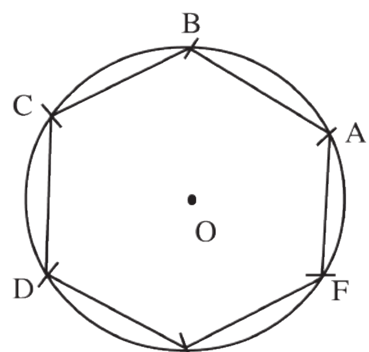
(iv) $\angle XAD$ ଓ $\angle B$ ର ପରିମାଣ ମଧ୍ୟରେ ଏକ ସଂପର୍କ କ'ଣ ଅଛି, ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

(v) ଅଙ୍କିତ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜଟି କେଉଁ ପ୍ରକାରର ଚତୁର୍ଭୁଜ ହେବ ?

4.4 ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜ, ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ :

(1) ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ :

ଯେଉଁ ବହୁଭୁଜର ବାହୁଗୁଡ଼ିକ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଓ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ, ତାହାକୁ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜ କୁହାଯାଏ । ଛଅଟି ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜକୁ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜ (ଚିତ୍ର 4.18(i)) କହନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 4.18(i))

ମନେରଖ : ଗୋଟିଏ ବହୁଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଏକ ବୃତ୍ତରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ ତାହାକୁ **ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ବହୁଭୁଜ** କୁହାଯାଏ ।

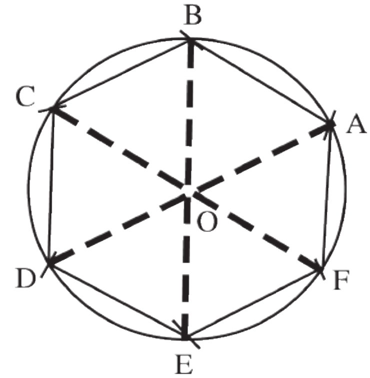
ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ କରିବାକୁ ହେଲେ ଆମକୁ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଛଅଟି ବିନ୍ଦୁ – ମନେକର A, B,,C, D, E, F - ଏଭଳି ଭାବରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ, ଯେପରି ABCDEF ଏକ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜ ହେବ ।

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ : ଚିତ୍ର 4.18(i) ଦେଖ । ମନେକର ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଅଟେ ।

(i) ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ନେଇ ତାହାର ନାମ A ଦିଅ ।

(ii) A କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି r ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଗୋଟିଏ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର । ଏହି ଚାପ ବୃତ୍ତକୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ନାମ B ଦିଅ । ପୁଣି B କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି ପୂର୍ବ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧବିଶିଷ୍ଟ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର । ତାହା ବୃତ୍ତକୁ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ (A ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ) ତାହାର ନାମ C ଦିଅ । ଏହି କ୍ରମରେ ବୃତ୍ତ ଉପରେ D, E, F ବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FA}$ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନ ଅଙ୍କନ କର । ABCDEF ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜ ।



(ଚିତ୍ର 4.18(ii))

କେତୋଟି ଜାଣିବା କଥା :

(a) F କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି r ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଚାପ ଅଙ୍କନ କଲେ ତାହା ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିପାରିବ । ସେଥିରୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ E ଓ ଅନ୍ୟଟି A ଅଟେ । ତେଣୁ ଷଡ଼ଭୁଜର ବାହୁ ଛଅଟି, ସମଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ।

(b) ଚିତ୍ର 4.18 (i) ରେ

OA = OB = OC = OD = OE = OF = r (ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ) ସେହିପରି

AB = BC = CD = DE = EF = FA = r (ଅଙ୍କନ ବେଳେ ଚାପଗୁଡ଼ିକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ନିଆଯାଇଛି ।)

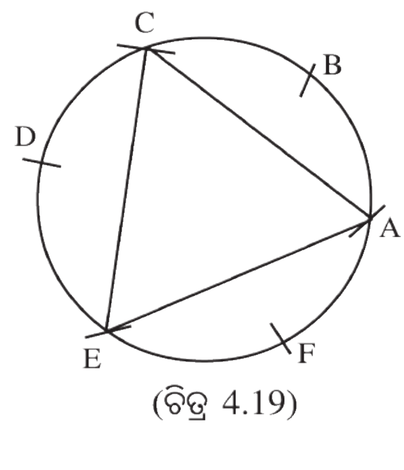
ତେଣୁ ଷଡ଼ଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଓ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ର ସଂଯୋଗକାରୀ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନ ଅଙ୍କନ କଲେ ଆମେ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଛଅଟି ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ପାଇବା ।

ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ 60^0 ହୋଇଥିବାରୁ ଅଙ୍କିତ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ 120^0 ଅଟେ ।

2. ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ :

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

(i) ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜ ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀର ପ୍ରଥମ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ସୋପାନ ଅନୁସରଣ କରି ବୃତ୍ତ ଉପରେ A, B, C, D, E, F ବିନ୍ଦୁ କ୍ରମିକ ଭାବରେ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 4.19)

(ii) ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ଗୋଟିଏ ଛଡ଼ା ଗୋଟିକୁ (ଯେପରି A, C, E) ନେଇ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କର,

ଯେପରି $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{EA}$ ।

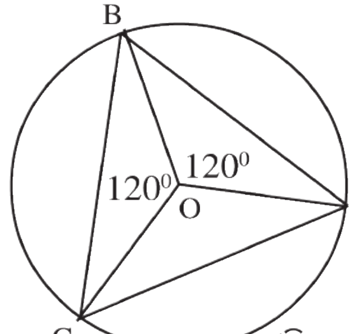
ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ΔACE ଆବଶ୍ୟକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ । (ପ୍ରମାଣ ପରେ ଜାଣିବ)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଚିତ୍ର 4.19ରେ ଆମେ ଆହୁରି ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ କରିପାରିବା । ତାହା ହେଉଛି ΔBDF ।

ନିଜେ କର

(i) ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର, ଯାହାର କେନ୍ଦ୍ର O ହେବ ।

(ii) କେନ୍ଦ୍ର O କୁ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ ନେଇ $\angle AOB$ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର ପରିମାଣ 120^0 ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 4.20)

(iii) ପୁନଶ୍ଚ O କୁ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ ନେଇ $\angle BOC$ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର ପରିମାଣ 120^0 ହେବ ।

(iv) ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ A, B ଓ C କୁ ଚିହ୍ନଟ କର ଏବଂ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ ଅଙ୍କନ କରି ତ୍ରିଭୁଜ ABC ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ କର ।

(v) ବର୍ତ୍ତମାନ ତ୍ରିଭୁଜ ABC (ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ) ବୃତ୍ତରେ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେଲା ।

3. ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ :

ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଦୁଇଟି ବ୍ୟାସ ଅଙ୍କନ କରି ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରାଯାଏ । ପ୍ରଥମେ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରିସାରି ନିମ୍ନ ପ୍ରଣାଳୀ ଅନୁସରଣ କର :

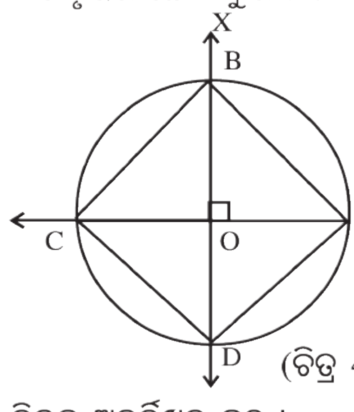
(i) ମନେକର ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଅଟେ । ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ A ନେଇ $\overrightarrow{AO}$ ଅଙ୍କନ କର । ତାହା ବୃତ୍ତକୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ନାମ C ଦିଅ । ବୃତ୍ତର $\overline{AC}$ ଗୋଟିଏ ବ୍ୟାସ ।

(ii) $\overrightarrow{OX}$ ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରି $\angle AOX$ ଏକ ସମକୋଣ ହେବ । $\overrightarrow{OX}$ ଓ ବୃତ୍ତର ଛେଦବିନ୍ଦୁର ନାମ B ଦିଅ ।

(iii) $\overrightarrow{BO}$ ଅଙ୍କନ କର । ତାହା ବୃତ୍ତକୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ନାମ D ଦିଅ । $\overline{BD}$ ବୃତ୍ତର ଆଉ ଗୋଟିଏ ବ୍ୟାସ, ଯେପରି $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ।

(iv) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ଓ $\overline{DA}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ABCD ଆବଶ୍ୟକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ବର୍ଗଚିତ୍ର ।



(ଚିତ୍ର 4.21)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (h)

1. 4 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ କର ।
2. 4 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ କର ।
3. 10 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜ ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ କର ।

*****

ପରିମିତି (MENSURATION)

ଅଧ୍ୟାୟ 5

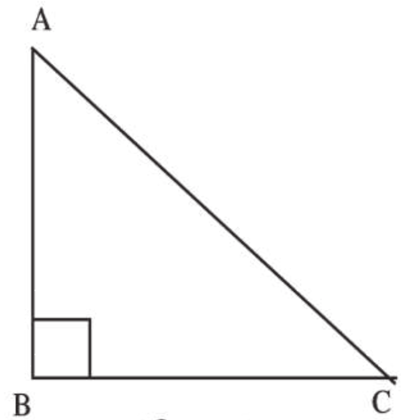
HH9U7I

5.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀମାନଙ୍କରେ ତୁମେମାନେ ବିଭିନ୍ନ ସାମତଳିକ ଚିତ୍ରର ପରିସୀମା ଏବଂ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କାହାକୁ କହନ୍ତି ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକର ପରିସୀମା ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କିପରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ ସେ ବିଷୟରେ ସମ୍ୟକ୍ ଆଭାସ ପାଇସାରିଛ । ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ଚତୁର୍ଭୁଜର ପରିସୀମା ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟର ପ୍ରଥମ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ । ଏହା ବ୍ୟତୀତ ସମଘନ, ଆୟତଘନ ପ୍ରଭୃତି ଘନ ପଦାର୍ଥର ଘନଫଳ ବା ଆୟତନ ଏବଂ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଆଲୋଚନା ଏ ଅଧ୍ୟାୟର ଅନ୍ୟ ଏକ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ । ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ଚତୁର୍ଭୁଜାକାର କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ କେତେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉକ୍ତ ସାମତଳିକ କ୍ଷେତ୍ରର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏବଂ କୋଣର ପରିମାଣର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡ଼େ । ତେଣୁ ପ୍ରଥମେ ଉପରୋକ୍ତ ସାମତଳିକ ଚିତ୍ର ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

5.2 ପିଥାଗୋରାସ୍‌ଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ଓ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ :

(A) ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ :



(ଚିତ୍ର 5.1)

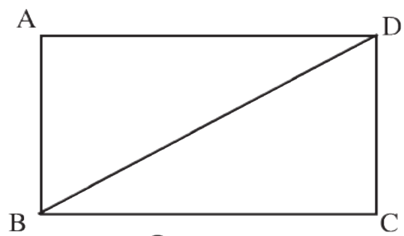
ΔABC ର $\angle B$ ସମକୋଣ ଓ $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣ (hypotenuse) ।

$\angle B$ର ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ମଧ୍ୟରୁ $\overline{BC}$ କୁ ଭୂମି (base) ଓ $\overline{AB}$କୁ ଲମ୍ବ (perpendicular) କୁହାଯାଏ । ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା (height) କୁହାଯାଏ ।

ଉପରୋକ୍ତ ବାହୁମାନଙ୍କର ଇଂରାଜୀ ପ୍ରତିଶବ୍ଦର ମୂଳ ଅକ୍ଷର p, b ଓ h ଦ୍ୱାରା ଯଥାକ୍ରମେ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା, ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ ପ୍ରତିପାଦନ କରିବା ପାଇଁ ସୁପ୍ରସିଦ୍ଧ ଉପପାଦ୍ୟ ହେଲା –

'ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗ ଏହାର ଅନ୍ୟ ଦୁଇବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ।' ଏହି ଉପପାଦ୍ୟକୁ **ପିଥାଗୋରାସ୍‌ଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ** କୁହାଯାଏ । (ଏହାର ପ୍ରମାଣ ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିବା ।)

ଭାରତୀୟ ଗଣିତଜ୍ଞ ବୌଧାୟନ (ପ୍ରାୟ ଖ୍ରୀ.ପୂ. 800) ରେ ସାଧାରଣ ରୂପରେ ଅନେକ ଉଦାହରଣ ଦେଇ ଦର୍ଶାଇଥିଲେ ଯେ **'ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ତାହାର ଦୁଇ ବାହୁ ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ।'**



(ଚିତ୍ର 5.2)

ABCD ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର । ଏହାର $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏହାର $\overline{AD}$ ଓ $\overline{AB}$ ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ।

ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟି (Pythagorean Triple) :

ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ପର୍କ $p^2 + b^2 = h^2$ ଯେଉଁ ତିନିଟିକିଆ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଗୋଷ୍ଠୀ ଦ୍ୱାରା ସିଦ୍ଧ ହୁଏ, ତାକୁ **ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀ** ଅଥବା **ପିଥାଗୋରୀୟ ଟ୍ରିପଲ୍** କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $3^2 + 4^2 = 5^2$ ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ ଅଟେ । ଅନ୍ୟ କଥାରେ କହିଲେ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁଗୁଡ଼ିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 3, 4 ଓ 5 ଏକକ ହେଲେ ତାହା ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ହେବ । ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର 3 ଏକକ ଓ 4 ଏକକ ଦୀର୍ଘ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣଟି ସମକୋଣ ହେଲେ ଅନ୍ୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 5 ଏକକ ହେବ; ଯାହାକି ସେହି ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣକୁ ସୂଚାଏ ।

ସୁତରାଂ ଚିତ୍ର 5.1 ରୁ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$h^2 = p^2 + b^2$ କିମ୍ବା $h = \sqrt{p^2 + b^2}$ ....(1)

$p^2 = h^2 - b^2$ କିମ୍ବା $p = \sqrt{h^2 - b^2}$ ....(2)

$b^2 = h^2 - p^2$ କିମ୍ବା $b = \sqrt{h^2 - p^2}$ ....(3)

ସୁତରାଂ (1), (2) ବା (3) ସୂତ୍ରଦ୍ୱାରା ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ଯେକୌଣସି ଦୁଇବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଜଣାଥିଲେ, ଅନ୍ୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ହେବ ।

ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟୀ (ଟ୍ରିପଲ୍) ମନେରଖ ।

(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 40, 41) । ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରୟୀର ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ପରସ୍ପର ମୌଳିକ । ତେଣୁ ଉପରୋକ୍ତ ତ୍ରୟୀଗୁଡ଼ିକୁ **ମୌଳିକ ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀ** କୁହାଯାଏ । ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀ ଜାଣିବା ପାଇଁ ଏକ ସୂତ୍ର ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ।

ମନେକର m ଓ n ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଯେଉଁଠି $m > n$ । ତ୍ରୟୀର ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ $m^2 - n^2$, 2mn ଓ m^2+n^2 । ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା 2 ଓ 1 ଏବଂ $2 > 1$, ତ୍ରୟୀର ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ $2^2 - 1^2$, $2 \times 2 \times 1$ ଓ $2^2 + 1^2$ ।

ଅର୍ଥାତ୍ ତ୍ରୟୀଟି (3, 4 ଓ 5) । ସେହିପରି ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ନିଜେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

a, b ଓ c ଗୋଟିଏ ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀ ହେଲେ (ka, kb ଓ kc) ଗୋଟିଏ ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀ ହେବ ଯେଉଁଠି k ଶୂନ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ଏକ ଧ୍ରୁବକ ।

ମନେକର k = 10 ଓ ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀଟି (3, 4, 5) । ତେବେ (30, 40 ଓ 50) ମଧ୍ୟ ଏକ ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀ । ଏହି ତ୍ରୟୀର ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ପରସ୍ପର ମୌଳିକ ନୁହଁନ୍ତି । ତେଣୁ ଏହା ଏକ ମୌଳିକ ତ୍ରୟୀ ନୁହେଁ । ସେହିପରି ଅନେକ ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀ ଆମେ ସ୍ଥିର କରିପାରିବା ।

ବି.ଦ୍ର. : a, b, c ଏକ ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀ ହେଲେ, $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$ ମଧ୍ୟ ଗୋଟିଏ ତ୍ରୟୀ ହେବ ।

ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ କହିଲେ **''ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବୃହତ୍ତମ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗ ଅନ୍ୟ ଦୁଇବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ହେଲେ ବୃହତ୍ତମ ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣର ପରିମାଣ 90^0 ହେବ । ଅର୍ଥାତ୍ ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମକୋଣୀ ହେବ ।''** ଏହା ପିଥାଗୋରାସ୍‌ଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟର ବିପରୀତ କଥନ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, 5, 12 ଓ 13 ଏକକ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜଟି ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଓ 13 ଏକକ ବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣଟି ସମକୋଣ ।

ନିଜେ କର ଦଶଗୋଟି ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାହିତ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ

ଉଦାହରଣ – 1 : ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 2.5 ସେ.ମି. ଓ 6 ସେ.ମି. ହେଲେ ତା'ର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

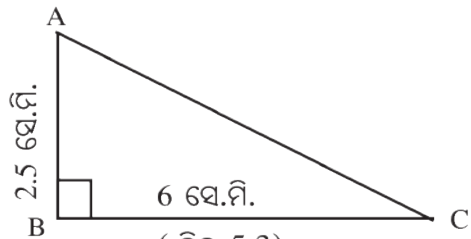
ସମାଧାନ : ଚିତ୍ର 5.3 ରେ ABC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର $\angle B$ ସମକୋଣ । ମନେକର AB = 2.5 ସେ.ମି. ଓ BC = 6 ସେ.ମି. ।

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ (ପିଥାଗୋରାସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ)

$= (2.5)^2 + (6)^2 = 6.25 + 36 = 42.25$

$\therefore AC = \sqrt{42.25} = 6.5$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 6.5 ସେ.ମି. ।



(ଚିତ୍ର 5.3)

ଉଦାହରଣ – 2 : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 6 ସେ.ମି., 4.5 ସେ.ମି. ଓ 7.5 ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମକୋଣୀ ? ଯଦି ଉତ୍ତର ହଁ ହୁଏ, ତେବେ କେଉଁ ବାହୁଟି ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ଅଟେ ?

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 6 ସେ.ମି., 4.5 ସେ.ମି. ଓ 7.5 ସେ.ମି. ।

ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମକୋଣୀ ହେବ ଯଦି, $(6)^2 + (4.5)^2 = (7.5)^2$ ହେବ । (ପିଥାଗୋରାସ୍‌ର ବିପରୀତ ଉପପାଦ୍ୟ)

ବର୍ତ୍ତମାନ, ବାମପକ୍ଷ = $(6)^2 + (4.5)^2 = 36 + 20.25 = 56.25$

ମାତ୍ର $(7.5)^2 = 56.25 =$ ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ

$\therefore\ (6)^2 + (4.5)^2 = (7.5)^2$

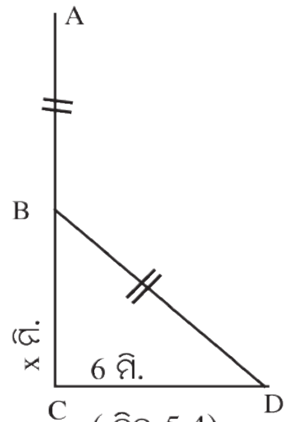
$(6)^2 + (4.5)^2 = (7.5)^2$ ସର୍ତ୍ତଟି ପୂରଣ ହେଉଥିବାରୁ ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମକୋଣୀ ।

ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ବୃହତ୍ତମ ବାହୁଟି କର୍ଣ୍ଣ ହେଉଥିବାରୁ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 7.5 ସେ.ମି. ।

ଉଦାହରଣ – 3 :

ପ୍ରବଳ ବାତ୍ୟାରେ ଗୋଟିଏ ସିଧା ନଡ଼ିଆ ଗଛ ଭାଙ୍ଗି ପଡ଼ିବାରୁ ଭଗ୍ନ-ଅଂଶଟି ମୂଳଗଣ୍ଡି ସହ ଲାଗିରହି ଅଗ୍ରଭାଗ ଗଛମୂଳରୁ 6 ମି. ଦୂରରେ ଭୂମିକୁ ସ୍ପର୍ଶ କଲା । ଭାଙ୍ଗିଯାଇଥିବା ଅଂଶଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ମାଟି ଉପରେ ଥିବା ଥୁଣ୍ଟା ଅଂଶର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅପେକ୍ଷା 2 ମିଟର ଅଧିକ ହେଲେ, ଗଛଟିର ଉଚ୍ଚତା କେତେ ଥିଲା ?

ସମାଧାନ : ମନେକର AC ଗଛର ଉଚ୍ଚତା । ଏହା B ବିନ୍ଦୁରେ ଭାଙ୍ଗିଯିବାରୁ ଗଛର ଅଗ୍ରଭାଗ A ଭୂମିକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କଲା ।



(ଚିତ୍ର 5.4)

ମନେକର BC = x ମି. ।

AB = BD = (x + 2) ମି.

BCD ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ CD = 6 ମି., BC = x ମି.

ଏବଂ BD = x + 2 ମି.

ପିଥାଗୋରାସ୍ଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁସାରେ, $BD^2 - BC^2 = CD^2$

$\Rightarrow (x + 2)^2 - x^2 = (6)^2$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 - x^2 = 36 \qquad [\because (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$

$\Rightarrow 4x + 4 = 36 \Rightarrow 4x = 36 - 4$

$\Rightarrow 4x = 32 \Rightarrow x = \frac{32}{4} = 8$

$\therefore$ x = 8 ମି.

$\therefore$ ଗଛର ଉଚ୍ଚତା = x + x + 2 = (8 + 8 + 2) ମି. = 18 ମି. ।

ବି.ଦ୍ର. : $(x+2)^2 = (x+2)(x+2) = x(x+2) + 2(x + 2) = x^2 + 2x + 2x + 4 = x^2 + 4x + 4$

ଉଦାହରଣ – 4 : ଗୋଟିଏ ପୋଖରୀରେ ଫୁଟିଥିବା ଏକ ପଦ୍ମଫୁଲ ପାଣି ଉପରୁ 2 ଡେସି ମିଟର ଦେଖାଯାଉଥିଲା । ପବନ ବହିବାରୁ ତାହା 8 ଡେସିମିଟର ଦୂରକୁ ଘୁଞ୍ଚିଯାଇ ପାଣି ସହିତ ମିଶିଗଲା । ପୋଖରୀରେ ଜଳର ଗଭୀରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $\overline{AB}$ ପଦ୍ମନାଡ଼ର ପ୍ରଥମ ଅବସ୍ଥା ସୂଚାଉଛି । ଏହାର $\overline{AC}$ ଅଂଶ ଜଳ ଉପରେ ଏବଂ $\overline{BC}$ ଅଂଶ ଜଳ ମଧ୍ୟରେ ଥିଲା । ବାୟୁ ଦ୍ୱାରା ଚାଳିତ ହୋଇ ଏହାର ଅବସ୍ଥାନ $\overline{AB}$ ପରିବର୍ତ୍ତେ $\overline{BD}$ ହେଲା ଏବଂ ଏହା "D" ବିନ୍ଦୁରେ ପାଣିରେ ମିଶିଗଲା ।

$\therefore$ AB = BD, CD = 8 ଡେସିମିଟର, AC = 2 ଡ଼େସିମିଟର

ମନେକର ଜଳର ଗଭୀରତା BC = x ଡେସିମିଟର

$\therefore$ AB = BC + AC = (x + 2) ଡେସିମିଟର ।

$\therefore$ BD = (x + 2) ଡେସି ମିଟର ।

$\therefore$ ପଦ୍ମନାଡ଼ଟି ଜଳପୃଷ୍ଠ ସହିତ ଲମ୍ବ ଭାବରେ ଅବସ୍ଥିତ,

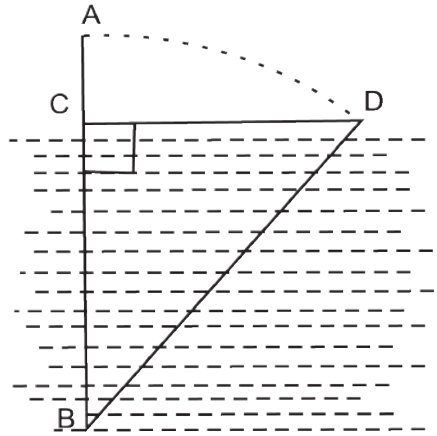
$\therefore$ BCD ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ, $BD^2 - BC^2 = CD^2$

$$\Rightarrow (x + 2)^2 - x^2 = (8)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 - x^2 = 64 \Rightarrow 4x + 4 = 64$$

$$\Rightarrow 4x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{4} = 15$$

$\therefore$ ଜଳର ଗଭୀରତା 15 ଡେସିମିଟର ।



(ଚିତ୍ର 5.5)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (a)

1. କେତେକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁ ଦୁଇଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି । ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀ ସାହାଯ୍ୟରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 3 ମି. ଓ 4 ମି. (ii) 5 ସେ.ମି. ଓ 12 ସେ.ମି. (iii) 7 ସେ.ମି. ଓ 24 ସେ.ମି.

(iv) 8 ମି. ଓ 15 ମି. (v) 1.5 ସେ.ମି. ଓ 2 ସେ.ମି. (vi) 10 ସେ.ମି. ଓ 24 ସେ.ମି. ।

2. ନିମ୍ନରେ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ଯଥାକ୍ରମେ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି । ତ୍ରିଭୁଜର ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।

(i) 2.5 ସେ.ମି. ଓ 2.4 ସେ.ମି. (ii) 4.1 ମି. ଓ 4 ମି. (iii) 12.5 ମି. ଓ 10 ମି.

(iv) 125 ମି. ଓ 100 ମି. (v) 299 ମି. ଓ 276 ମି.

3. ନିମ୍ନରେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ।

(i) 11 ସେ.ମି., 60 ସେ.ମି. ଓ 61 ସେ.ମି. (ii) 0.8 ମି., 1.5 ମି. ଓ 1.7 ମି.

(iii) 0.9 ଡେ.ମି. 4 ଡେ.ମି. ଓ 4.1 ଡେ.ମି. (iv) 0.7 ସେ.ମି., 2.4 ସେ.ମି. ଓ 2.5 ସେ.ମି.

4. ABC ତ୍ରିଭୁଜରେ ବାହୁତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦିଆଯାଇଛି । ପ୍ରଥମେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ABC ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ କି ? ଯଦି ଉତ୍ତର ହଁ ହୁଏ, ତେବେ ତ୍ରିଭୁଜର କେଉଁ କୋଣର ପରିମାଣ 90^0 ହେବ ?

(i) AB = 3 ସେ.ମି., BC = 4 ସେ.ମି. ଏବଂ CA = 5 ସେ.ମି. ।

(ii) CA = 5 ସେ.ମି., AB = 12 ସେ.ମି. ଏବଂ BC = 13 ସେ.ମି. ।

(iii) BC = 7 ସେ.ମି., CA = 24 ସେ.ମି. ଏବଂ AB = 25 ସେ.ମି. ।

(iv) BC = 9 ସେ.ମି., AB = 40 ସେ.ମି. ଏବଂ AC = 41 ସେ.ମି. ।

(v) AB = 8 ସେ.ମି., BC = 15 ସେ.ମି. ଏବଂ CA = 17 ସେ.ମି. ।

5. ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତି A ସ୍ଥାନରୁ ବାହାରି ପୂର୍ବ ଦିଗକୁ 50 ମିଟର ଗତି କଲାପରେ ସେଠାରୁ ଉତ୍ତର ଦିଗକୁ 120 ମିଟର ଗତି କରି B ନାମକ ସ୍ଥାନରେ ପହଞ୍ଚିଲେ । A ଠାରୁ B ର ଦୂରତା କେତେ ?

6. 20 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଗୋଟିଏ ତାଳଗଛ ଝଡ଼ରେ ନଇଁ ପଡ଼ିବାରୁ ତା'ର ଅଗ୍ରଭାଗ ସେହି ଗଛର ମୂଳଠାରୁ 12 ମିଟର ଦୂରରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକ ସ୍ତମ୍ଭର ଅଗ୍ରଭାଗକୁ ସ୍ପର୍ଶ କଲା । ସ୍ତମ୍ଭଟିର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ଗୋଟିଏ କୋଠାଘରର ବାହାର କାନ୍ଥର ପାଦଦେଶରୁ 8 ମିଟର ଦୂରରେ ଗୋଟିଏ ନିଶୁଣି ରଖି କାନ୍ଥକୁ ଡେରିଦେଲେ, ନିଶୁଣିର ଅଗ୍ରଭାଗ କାନ୍ଥର ଉପରିଭାଗକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରେ । ନିଶୁଣିଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 10 ମିଟର ହେଲେ, କାନ୍ଥର ଉଚ୍ଚତା ସ୍ଥିର କର ।

8. ଗୋଟିଏ ଘରର ଦୁଇ ବିପରୀତ କାନ୍ଥର ଉଚ୍ଚତା ଯଥାକ୍ରମେ 25 ଡେସିମି. ଓ 64 ଡେସିମି. । କାନ୍ଥ ଦୁଇଟିର ଉପରିଭାଗକୁ ଲାଗିଥିବା ଗୋଟିଏ ସଳଖକଡ଼ିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 65 ଡେସିମି. ହେଲେ ଘରର ପ୍ରସ୍ଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

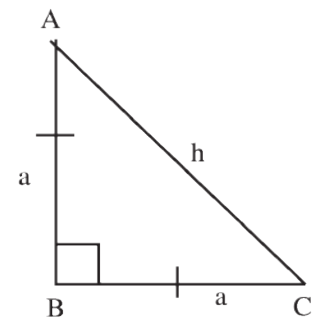
9. ଗୋଟିଏ ପୋଖରୀରେ ଥିବା ଏକ ପଦ୍ମକଡ଼ିର ଅଗ୍ରଭାଗ ଜଳ ଉପରକୁ 1 ମିଟର ଦେଖାଯାଉଥିଲା । କିନ୍ତୁ ବାୟୁଦ୍ୱାରା ଏହି କଡ଼ିଟି ଆସ୍ତେ ଆସ୍ତେ ଘୁଞ୍ଚିଯାଇ 3 ମିଟର ଦୂରରେ ଜଳସ୍ତର ସଙ୍ଗେ ମିଶିଗଲା । ପୋଖରୀରେ ଜଳର ଗଭୀରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 32 ସେ.ମି. । ତାହାର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅପେକ୍ଷା 8 ସେ.ମି. ବୃହତ୍ତର ହେଲେ, କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।

(B) ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ :

କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପରସ୍ପର ସମାନ ହେଲେ ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜଟିକୁ **ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ** କୁହାଯାଏ । ଗୋଟିଏ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ ହେଲେ ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜକୁ **ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ** କୁହାଯାଏ ।

ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ:



(ଚିତ୍ର 5.6)

ΔABC ଏକ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ମନେକର $AB = BC = a$ ଏକକ ଏବଂ $AC = h$ ଏକକ ।

$\because AC^2 = AB^2 + BC^2$ ତେବେ $h^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\Rightarrow h = \sqrt{2}\, a \Rightarrow a = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$ ଏକକ

କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (h) = ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x $\sqrt{2}$ ଅର୍ଥାତ୍ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\dfrac{\text{କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}{\sqrt{2}}$

ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା $= AB + BC + CA = a + a + \sqrt{2}\, a$

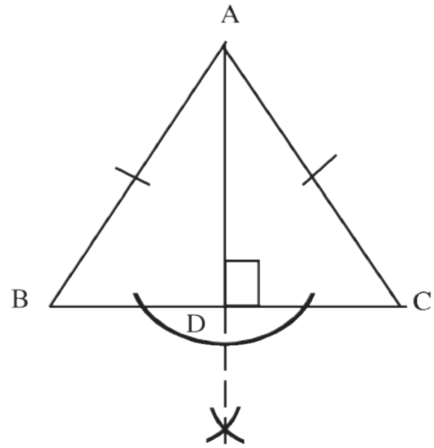
$= 2a + \sqrt{2}\, a = \sqrt{2}\, a\, (\sqrt{2} + 1)$ ଏକକ

ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା = $\sqrt{2}$ x ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ($\sqrt{2}$ + 1)

(ନିଜେ କର) ତୁମ ଖାତାରେ ତିନୋଟି ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯେଉଁମାନଙ୍କର ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 3 ସେ.ମି, 4 ସେ.ମି ଓ 5 ସେ.ମି. ହେବ । ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ କର୍ଣ୍ଣଟିକୁ ମାପି $\sqrt{2}$ ର ଆସନ୍ନମାନ ଦଶମିକ ଏକ ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିରୂପଣ କର ।

ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା:

ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ସମାନ ଦୁଇବାହୁ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ବାହୁକୁ ସାଧାରଣତଃ ଏହାର ଭୂମି କୁହାଯାଏ । ଏକଥା ତୁମେ ଆଗରୁ ଜାଣିଛ । ବର୍ତ୍ତମାନ ପରୀକ୍ଷା ଦ୍ୱାରା ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିର ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁରୁ ଭୂମି ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଏକ ତଥ୍ୟ ଜାଣିବା ।



(ଚିତ୍ର 5.7)

ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ମାପ ନେଇ ତିନୋଟି ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର । (5.7 ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଯାଇଥିବା ଭଳି ତିନିଗୋଟି ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର, ସେହି ଚିତ୍ରର ଅନୁରୂପ ନାମ ଦିଅ ।) ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରେ A ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି $\overline{AD}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର । ତ୍ରିଭୁଜ ତିନୋଟିକୁ (i), (ii), (iii) ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନଟ କର ।

ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ଥଳେ, ସମାନ ବାହୁଦ୍ୱୟ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ରୂପେ ନାମିତ ହୋଇଛି । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରୁ BD ଓ DC ମାପି ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଲେଖ ।

ଚିତ୍ର ନଂ	BD	DC
(i)		
(ii)		
(iii)		

ସାରଣୀ – 5.1

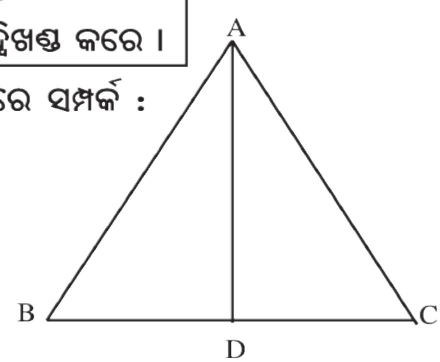
ଏହି ସାରଣୀରୁ ଦେଖିବା ଯେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରେ BD = DC । **ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିର ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁରୁ ଭୂମି ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ଭୂମିକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।**

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ **ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁରୁ ଏହାର ବିପରୀତ ବାହୁ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ଉକ୍ତ ବାହୁକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।**

ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା, ଭୂମି ଓ ସମାନ ବାହୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ :

ABC ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ । ଚିତ୍ର 5.8 ଦେଖ । AB = AC ଓ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି $\overline{AD}$ ଲମ୍ବ ହେଉ । ΔABC ର ଭୂମି $\overline{BC}$ ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା AD । AB = AC = a ଏକକ ଓ BC = b ଏକକ ହେଉ ।

ଫଳରେ $BD = DC = \frac{1}{2}b$ ଏକକ ଏବଂ ΔADC ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ । $\therefore AD^2 = AC^2 - DC^2$



(ଚିତ୍ର 5.8)

$= a^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = a^2 - \frac{1}{4}b^2 \quad \therefore AD = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2}$ ଏକକ

$$\boxed{\begin{aligned} \text{ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା} &= \sqrt{(\text{ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ})^2 - (\text{ଅର୍ଦ୍ଧଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ})^2} \\ &= \sqrt{(\text{ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ})^2 - \frac{1}{4}(\text{ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ})^2} \end{aligned}}$$

ଟୀକା: ଯଦି $AB = BC = CA = a$ ଏକକ ହୁଏ, ତେବେ ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମବାହୁ । ଏପରି ସ୍ଥଳେ –

$b = a$ ହେବ ଏବଂ $AD = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3} \times a}{2}$ ହେବ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\boxed{\text{ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ।}}$

ନିଜେ କର

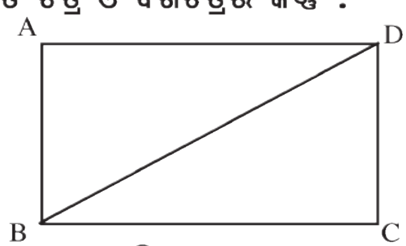
(i) ΔABC ରେ $AB = AC = 5$ ସେ.ମି. $BC = 8$ ସେ.ମି. ହେଲେ AD ଉଚ୍ଚତା କେତେ ?

(ii) ΔABC ରେ $AC = AB = BC = 4$ ସେ.ମି. ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା AD କେତେ ?

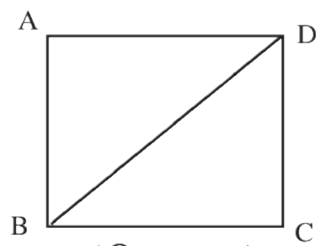
(iii) ΔABC ରେ $AB = AC = 10$ ସେ.ମି., $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ଏବଂ $AD = 8$ ସେ.ମି. ହେଲେ BC କେତେ ?

(iv) ΔABC ରେ $AB = AC = a$ ସେ.ମି., ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା h ସେ.ମି. ହେଲେ BC କେତେ ?

(C) ଆୟତ ଚିତ୍ର ଓ ବର୍ଗଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣ :



(ଚିତ୍ର 5.9(i))



(ଚିତ୍ର 5.9(ii))

ତୁମେ ଜାଣ ଯେ, **ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ ବାହୁଗୁଡ଼ିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣ ସମକୋଣ, ତାହାକୁ ଆୟତ ଚିତ୍ର କୁହାଯାଏ । ଯେଉଁ ଆୟତ ଚିତ୍ରର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ତାହାକୁ ବର୍ଗଚିତ୍ର କୁହାଯାଏ ।**

ABCD ଆୟତ ଚିତ୍ରରେ (ଚିତ୍ର 5.9 (i)) କର୍ଣ୍ଣ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର । $AD = BC = l$ ଏକକ

$AB = CD = b$ ଏକକ ଓ $BD = h$ ଏକକ ହେଉ ।

BCD ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $BD^2 = BC^2 + DC^2$ ବା $h^2 = l^2 + b^2$

$\therefore h = \sqrt{l^2 + b^2}$ ଅର୍ଥାତ୍ $\boxed{\text{ଆୟତ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣ} = \sqrt{(\text{ଦୈର୍ଘ୍ୟ})^2 + (\text{ପ୍ରସ୍ଥ})^2}}$

l = b ହେଲେ, ABCD ଏକକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ହେବ । (ଚିତ୍ର 5.9(ii)) ।

ତେଣୁ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $h = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ ଅର୍ଥାତ୍, $\boxed{\text{ବର୍ଗଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ} = \sqrt{2} \times \text{ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ।}}$

ସମାହିତ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ

ଉଦାହରଣ – 5 : ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 20 ସେ.ମି. । ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\dfrac{\text{କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}{\sqrt{2}} = \dfrac{20}{\sqrt{2}}$ ସେ.ମି.

$= \dfrac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$ ସେ.ମି.

(ଉଭୟ ଲବ ଓ ହରକୁ $\sqrt{2}$ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣାଗଲା ।)

$= \dfrac{20\sqrt{2}}{2}$ ସେ.ମି. = $10\sqrt{2}$ ସେ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 6 :

ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗ 200 ବ.ମି. ହେଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ଏହାର ପରିସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗ = 200 ବ.ମି.

$\therefore$ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\sqrt{200}$ ମି. = $\sqrt{2 \times 100} = 10\sqrt{2}$ ମି.

$\therefore$ ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\dfrac{\text{କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}{\sqrt{2}} = \dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ମି. = 10 ମି. ।

ପରିସୀମା = $\sqrt{2}$ x ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $(\sqrt{2}+1) = \sqrt{2} \times 10\,(\sqrt{2}+1)$

ଅଥବା $(20 + 10\sqrt{2})$ ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 7 : ଗୋଟିଏ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ଦୁଇ ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା 40 ସେ.ମି. ହେଲେ ଏହାର ପରିସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ଦୁଇ ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା = 40 ସେ.ମି. । ଅର୍ଥାତ୍ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 40 ସେ.ମି. ।

$\therefore$ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\dfrac{40\,\text{ସେ.ମି.}}{\sqrt{2}} = \dfrac{40 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$ ସେ.ମି.

$= \dfrac{40\sqrt{2}}{2}$ ସେ.ମି. = $20\sqrt{2}$ ସେ.ମି. ।

$\therefore$ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ପରିସୀମା = 4 x ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 4 x $20\sqrt{2}$ ସେ.ମି.= $80\sqrt{2}$ ସେ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 8 : ଗୋଟିଏ ଆୟତ ଚିତ୍ରର ସନ୍ନିହିତ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 120 ସେ.ମି. ଓ 27 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

ସମାଧାନ : ସନ୍ନିହିତ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 120 ସେ.ମି. ଓ 27 ସେ.ମି. ।

$\therefore$ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= \sqrt{120^2 + 27^2}$ ସେ.ମି. $= \sqrt{3^2(40^2 + 9^2)}$ ସେ.ମି.

$= \sqrt{3^2 \times 41^2}$ ସେ.ମି. ($\because$ 9, 40, 41 ଏକ ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀ)

$= 3 \times 41$ ସେ.ମି. $= 123$ ସେ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 9 : 24 ସେ.ମି. ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

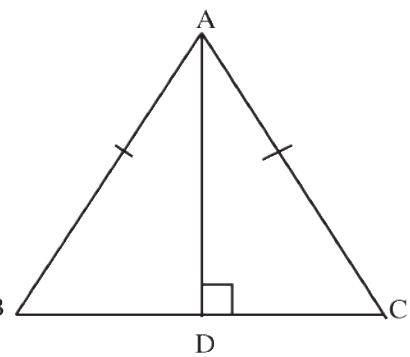
ସମାଧାନ : ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା = ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $\times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ ସେ.ମି. $= 12\sqrt{3}$ ସେ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 10 : ଗୋଟିଏ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମି 36 ସେ.ମି. ଏବଂ ସମାନ ବାହୁଦ୍ୱୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ 82 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ ହେଲେ, ଏହାର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : Δ ABCରେ AB = AC = 82 ସେ.ମି., BC = 36 ସେ.ମି. । $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

$\therefore$ BD $= \frac{BC}{2} = \frac{36}{2}$ ସେ.ମି. $= 18$ ସେ.ମି.



(ଚିତ୍ର 5.10)

ADB ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ,

AD $= \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{82^2 - 18^2}$ ସେ.ମି.

$= \sqrt{(82+18)(82-18)}$ ସେ.ମି. $= \sqrt{100 \times 64}$ ସେ.ମି.

$= 10 \times 8$ ସେ.ମି. $= 80$ ସେ.ମି.

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଉଚ୍ଚତା = 80 ସେ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 11 : ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା $30\sqrt{3}$ ସେ.ମି. ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times$ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ

$\Rightarrow$ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = ଉଚ୍ଚତା $\times \frac{2}{\sqrt{3}} = 30\sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 60$ ସେ.ମି.

$\therefore$ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା = 3 $\times$ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = (3×60) ସେ.ମି. = 180 ସେ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (b)

1. ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜରେ

(i) ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 10 ସେ.ମି. ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 13 ସେ.ମି. ହେଲେ ଉଚ୍ଚତା କେତେ ?

(ii) ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 41 ସେ.ମି. ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା 9 ସେ.ମି. ହେଲେ ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

(iii) ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 14 ସେ.ମି. ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା 24 ସେ.ମି. ହେଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

(iv) ଉଚ୍ଚତା 12 ସେ.ମି. ଓ ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଉଚ୍ଚତାଠାରୁ 2 ସେ.ମି. କମ୍ ହେଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

2. ABC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle B = 90^0$ ଓ $AB = BC$

(i) AB = 8 ସେ.ମି. କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) AB = 7 ସେ.ମି. ହେଲେ, $\overline{AC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 40 ସେ.ମି. ହେଲେ $\overline{BC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iv) କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 25 ସେ.ମି. ହେଲେ $\overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. (i) ଗୋଟିଏ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 7 ସେ.ମି. ହେଲେ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) ଗୋଟିଏ ବର୍ଗଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 18 ସେ.ମି. ହେଲେ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) ଗୋଟିଏ ବର୍ଗଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $22\sqrt{2}$ ସେ.ମି. ହେଲେ ଏହାର ପରିସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iv) ଗୋଟିଏ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 2 ସେ.ମି. ବଢ଼ିଗଲେ କର୍ଣ୍ଣ କେତେ ସେ.ମି. ବଢ଼ିବ ?

4. ଗୋଟିଏ ଆୟତଚିତ୍ରର ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିମ୍ନରେ ଦତ୍ତ ଅଛି । କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 75 ମି. ଓ 40 ମି. (ii) 14 ମି. ଓ 48ମି.

5. ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା 24 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁରୁ ବିପରୀତ ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା $15\sqrt{3}$ ଡେସିମିଟର ହେଲେ, ଏହାର ପରିସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ଗୋଟିଏ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନ ବାହୁ 51 ସେ.ମି. ଓ ତୃତୀୟ ବାହୁ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଉଚ୍ଚତାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 45 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. ଗୋଟିଏ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 96 ସେ.ମି. ଓ ଉଚ୍ଚତା 14 ସେ.ମି. ହେଲେ ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏବଂ ପରିସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

9. ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା $8\left(\sqrt{2}+1\right)$ ମିଟର ହେଲେ ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ଗୋଟିଏ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 5 ସେ.ମି. ବଢ଼ିଗଲେ ଏହାର ପରିସୀମାରେ କେତେ ବୃଦ୍ଧି ଘଟିବ ଏବଂ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟରେ ମଧ୍ୟ କେତେ ବୃଦ୍ଧି ଘଟିବ ସ୍ଥିର କର ।

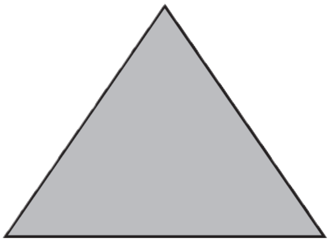
5.2 କ୍ଷେତ୍ର ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Region and Area):

ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ର:

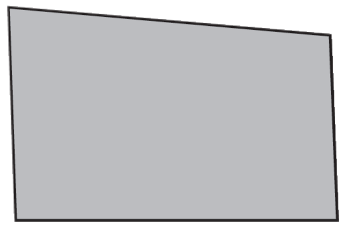
ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶର ସଂଯୋଗରେ ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ର (triangular region) ଗଠିତ ହୁଏ । (ଚିତ୍ର 5.11 (i))

ଚତୁର୍ଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ର :

ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ସହ ଏହାର ଚାରିବାହୁର ସଂଯୋଗରେ ଚତୁର୍ଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ର ଗଠିତ ହୁଏ । (ଚିତ୍ର 5.11(ii))



(ଚିତ୍ର 5.11 (i))



(ଚିତ୍ର 5.11 (ii))

ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ଓ ଚତୁର୍ଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ର ଦ୍ୱିତୀୟ ଓ ତୃତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି । ସେହିପରି ପଞ୍ଚଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ଓ ଷଡ଼ଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ରର ଧାରଣା ନିଆଯାଇପାରେ । ତ୍ରିଭୁଜ ଆକୃତିବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବୋଲି କହିବା । ସେହିପରି ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ପଞ୍ଚଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଆଦି ଭାଷାର ବ୍ୟବହାର କରାଯିବ ।

କ୍ଷେତ୍ର (region) ର ମାପକୁ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (area) କୁହାଯାଏ ।

କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Area) ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ :

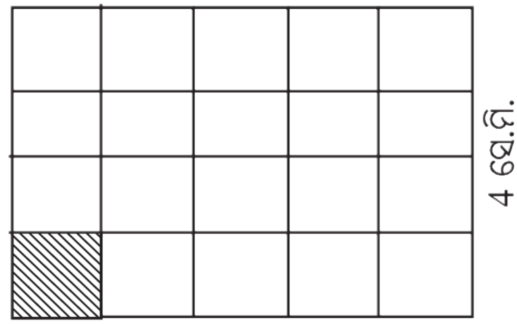
ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ – 1 : ପ୍ରତ୍ୟେକ ବହୁଭୁଜ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ର (closed region) ର ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଅଛି । ଏହା ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ – 2 : ଗୋଟିଏ ବହୁଭୁଜ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ଏହାକୁ ଗଠନ କରୁଥିବା ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ରମାନଙ୍କର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ।

5.2.1 କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ମାପ (କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସୂତ୍ରର କ୍ରମ ବିକାଶ) :

(i) କ୍ଷେତ୍ରକୁ ମାପିବା ପାଇଁ ପ୍ରଥମ ପର୍ଯ୍ୟାୟଟି ହେଉଛି ମାପର ଏକକ ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କରିବା । ଯେଉଁ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏକ ଏକକ, ତାହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳକୁ ଏକ ବର୍ଗ ଏକକ ଭାବେ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଏ । ଯଥା – 1 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ଅଟେ । ସେହିପରି 1 ମି. ଦୀର୍ଘ ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1 ବର୍ଗ ମି. ।

(ii) ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ମଧ୍ୟରେ 1 ଏକକ ବ୍ୟବଧାନରେ ଏହାର ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ରେଖାମାନ ଟାଣି ଏହାକୁ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ଏକକ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରରେ ପରିଣତ କରାଯାଏ । ଏହି ଛୋଟ ଛୋଟ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରକୁ ଗଣିବା ଦ୍ୱାରା ଯେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ମିଳେ, ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥର ଗୁଣଫଳରୁ ସେହି ସଂଖ୍ୟା ମିଳେ । ଯଥା: 5 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ 4 ସେ.ମି. ପ୍ରସ୍ଥବିଶିଷ୍ଟ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ମଧ୍ୟରେ 1 ସେ.ମି. ବ୍ୟବଧାନରେ ଏହାର ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର କରି ସରଳରେଖା ଟାଣିବାଦ୍ୱାରା ଦେଖାଯାଏ ଯେ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରଟି 20 ଗୋଟି 1 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରରେ ବିଭକ୍ତ ହେଉଛି ।



(ଚିତ୍ର 5.12)

ଚିତ୍ର 5.12 ରେ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ସଂଖ୍ୟା 5 ଓ 4 ରୁ ସଂଖ୍ୟା 20 ମିଳିଲା । ଏପରି ଅନୁଧ୍ୟାନରୁ ଆମେ ଜାଣିପାରୁ ଯେ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥର ଗୁଣଫଳ ଅଟେ ।

ଅର୍ଥାତ୍ 20 ବର୍ଗ ସେ.ମି.= 5ସେ.ମି. x 4 ସେ.ମି. ।

ସାଧାରଣ ଭାବରେ ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ l ଏକକ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ b ଏକକ ହେଲେ,

ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = (l x b) ବର୍ଗ ଏକକ ଓ

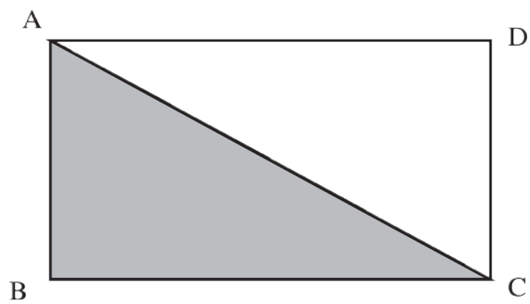
ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର ବାହୁ a ଏକକ ହେଲେ, ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = a^2 ବର୍ଗ ଏକକ

(iii) ଯୁକ୍ତିମୂଳକ ଭାବରେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରକୁ ସମାନ କ୍ଷେତ୍ରଫଳବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ କରେ । (ଚିତ୍ର 5.13) ।

ସୁତରାଂ ABC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= $\frac{1}{2}$ x ABCD ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= $\frac{1}{2}$ x ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ପ୍ରସ୍ଥ = $\frac{1}{2}$ x BC x AB



(ଚିତ୍ର 5.13)

ଅର୍ଥାତ୍ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ x ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳ ।

ସମାହିତ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ

ଉଦାହରଣ -1: ଗୋଟିଏ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 948.64 ବର୍ଗଡେକାମିଟର । ଏହାର ଚାରି ପାଖରେ ବାଡ଼ ଦେବାକୁ ହେଲେ ପ୍ରତି ମିଟରକୁ 40 ଟଙ୍କା ହିସାବରେ କେତେ ଖର୍ଚ୍ଚ ହେବ ?

ସମାଧାନ : ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 948.64 ବର୍ଗଡେକାମିଟର

= 948.64 x 100 ବ.ମି. = 94864 ବ.ମି.

$\therefore$ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\sqrt{94864}$ ମିଟର = 308 ମିଟର

$\therefore$ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର ପରିସୀମା = 4 x 308 ମିଟର = 1232 ମିଟର

ଏକ ମିଟରକୁ ବାଡ଼ ଦେବା ପାଇଁ ଖର୍ଚ୍ଚ = 40 ଟଙ୍କା

1232 ମିଟରକୁ ବାଡ଼ଦେବା ପାଇଁ ଖର୍ଚ୍ଚ = (40 x 1232) ଟଙ୍କା = 49280 ଟଙ୍କା (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 2 : ଗୋଟିଏ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥର ତିନିଗୁଣ । ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 711.48 ବର୍ଗ ମିଟର ହେଲେ ଏହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସେଣ୍ଟିମିଟରରେ କେତେ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : 711.48 ବ.ମି. = 711.48 x 10000 ବ.ସେ.ମି. = 7114800 ବ.ସେ.ମି.

($\because$ 1 ବ.ମି. = 10000 ବ.ସେ.ମି.)

ମନେକର ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ପ୍ରସ୍ଥ = a ସେ.ମି., $\therefore$ ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 3a ସେ.ମି.

$\therefore$ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ପ୍ରସ୍ଥ = (3a x a) ବ.ସେ.ମି. = $3a^2$ ବ.ସେ.ମି.

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ, $3a^2 = 7114800$

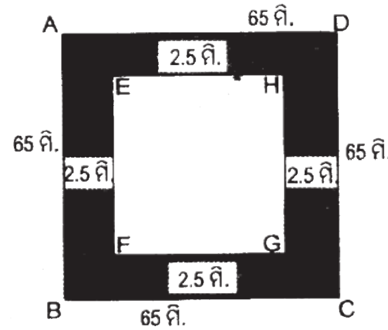
$$\Rightarrow a^2 = \frac{7114800}{3} = 2371600 \Rightarrow a = \sqrt{2371600} = 1540$$

$\therefore$ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ପ୍ରସ୍ଥ = 1540 ସେ.ମି. ଓ ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 3 x 1540 ସେ.ମି. = 4620 ସେ.ମି. ।(ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 3 :

65 ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବର୍ଗାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ବଗିଚାର ପରିସୀମାକୁ ଲାଗି ଭିତରପଟେ 2.5 ମି. ଚଉଡ଼ାର ଏକ ରାସ୍ତା ତିଆରି କରାଗଲା । ବର୍ଗମିଟର ପିଛା 5 ଟଙ୍କା ହିସାବରେ ରାସ୍ତା ତିଆରି ପାଇଁ କେତେ ଖର୍ଚ୍ଚ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ABCD ଏକ ବର୍ଗାକୃତିବିଶିଷ୍ଟ ବଗିଚା । ଏହାର ଭିତର ସୀମାକୁ ଲାଗି ରହିଥିବା ରାସ୍ତା, ଛାୟାଙ୍କିତ ଅଂଶ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ।



(ଚିତ୍ର 5.14)

EFGH ଏକ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ।

EFGH ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = (65 – 2 x 2.5) ମି.

= (65 – 5) ମି. = 60 ମି.

$\therefore$ ରାସ୍ତାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= ABCD ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ – EFGH ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= (65 x 65 – 60 x 60) ବ.ମି. = (4225 – 3600) ବ.ମି. = 625 ବ.ମି.

1 ବର୍ଗମିଟର ରାସ୍ତା ତିଆରି ପାଇଁ ଖର୍ଚ୍ଚ = 5.00 ଟଙ୍କା

625 ବର୍ଗମିଟର ରାସ୍ତା ତିଆରି ପାଇଁ ଖର୍ଚ୍ଚ = 625 x 5 ଟଙ୍କା = 3125 ଟଙ୍କା । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (c)

1. ଗୋଟିଏ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 900 ବର୍ଗ ମିଟର ହେଲେ, ଏହାର ପରିସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. ଗୋଟିଏ ଆୟତକାର ଘାସ ପଡ଼ିଆର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଏହାର ପ୍ରସ୍ଥର ଦୁଇଗୁଣ । ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 800 ବର୍ଗ ମିଟର ହେଲେ, ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଗୋଟିଏ ବର୍ଗାକାର କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 139876 ବର୍ଗ ମିଟର । ଏହାର ଚାରିପାଖରେ ବାଡ଼ଦେବାରେ ପ୍ରତି ମିଟରକୁ ଟ. 15.00 ହିସାବରେ କେତେ ଖର୍ଚ୍ଚ ହେବ ?

4. ଗୋଟିଏ ବର୍ଗାକାର ବଗିଚାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 30 ମିଟର । ତାହାର ଭିତର ସୀମାର ଚାରିଧାରକୁ ଲାଗି 1 ମିଟର ଚଉଡ଼ାର ଏକ ରାସ୍ତା ନିର୍ମାଣ କରାଯାଇଛି ।

(i) ରାସ୍ତାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) ରାସ୍ତାଟି ତିଆରି ପାଇଁ ବର୍ଗମିଟରକୁ ଟ 2.40 ପଇସା ହିସାବରେ କେତେ ଖର୍ଚ୍ଚ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. 5 ମି. x 3 ମି. ମାପର ଘର ଚଟାଣକୁ ଟାଇଲ ବିଛାଇବାକୁ ହେଲେ 60 ସେ.ମି. x 50 ସେ.ମି. ମାପର କେତେ ଖଣ୍ଡ ଟାଇଲ ଆବଶ୍ୟକ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

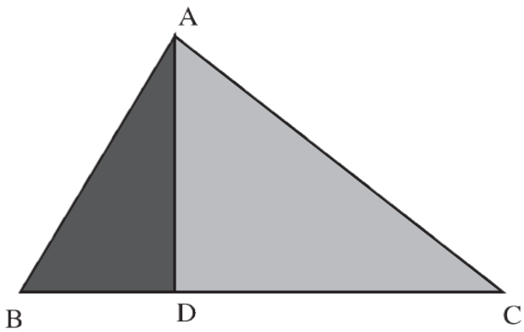
6. ରାମ କିଣିଥିବା ଖଣ୍ଡିଏ ଜମିର ଆକାର 20 ମି. x 24 ମି. । ଶ୍ୟାମ କିଣିଥିବା ଖଣ୍ଡିଏ ଜମିର ଆକାର 22 ମି. x 22 ମି. । ଏହି ଦୁଇଖଣ୍ଡ ଜମିର (i) ପରିସୀମାର ଅନ୍ତର (ii) କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନ୍ତର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ଗୋଟିଏ ଆୟତାକାର କ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 125 ମିଟର ଓ ପ୍ରସ୍ଥ 60 ମିଟର । ଏହାର ଭିତର ପାଖରେ ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୋଟିଏ ଧାରକୁ ଓ ପ୍ରସ୍ଥର ଦୁଇଧାରକୁ ଏହିପରି ତିନିଧାରକୁ ଲାଗି 2 ମିଟର ଚଉଡ଼ାର ଏକ ରାସ୍ତା ଅଛି । ରାସ୍ତାଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. ଗୋଟିଏ ଆୟତାକାର ପଡ଼ିଆର ମଧ୍ୟଭାଗରେ 2 ମିଟର ଚଉଡ଼ାର ଦୁଇଟି ରାସ୍ତା ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରନ୍ତି, ଯେପରିକି ପ୍ରତ୍ୟେକ ରାସ୍ତା ଆୟତାକାର ପଡ଼ିଆର ଗୋଟିଏ ବାହୁ ସହିତ ସମାନ୍ତର । ଆୟତାକାର ପଡ଼ିଆର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 72 ମି. ଓ ପ୍ରସ୍ଥ 48 ମି. ହେଲେ, ରାସ୍ତାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5.3 ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ :

(A) ଯେକୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଲାଗି ସୂତ୍ର "$\frac{1}{2}$ **x ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ**" ଏବଂ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ-2 କୁ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇପାରିବ । ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ABC ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ $\overline{AD}$ ଲମ୍ବ $\overline{BC}$ ଭୂମି ଉପରେ ଟଣାଯାଇଛି । ଫଳରେ ଏହା ADB ଓ ADC ଦୁଇଟି ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ ହେଲା ।



(ଚିତ୍ର 5.15)

ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \Delta ABD$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + Δ ADC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= \frac{1}{2} \times BD \times AD + \frac{1}{2} \times DC \times AD$

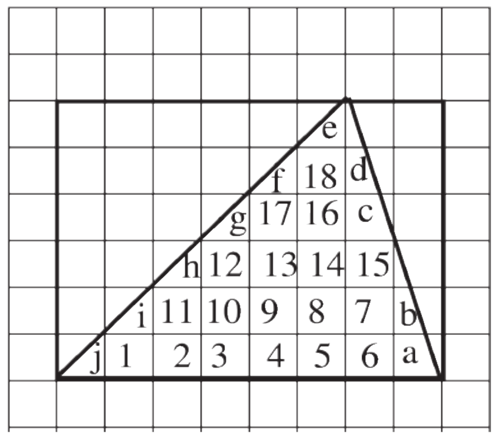
$= \frac{1}{2} (BD + DC) \times AD = \frac{1}{2} \times BD \times AD$

$= \frac{1}{2}$ x ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ଉଚ୍ଚତା

ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ x ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ଉଚ୍ଚତା

∴ ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\frac{2 \times \text{କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\text{ଉଚ୍ଚତା}}$ ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା = $\frac{2 \times \text{କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\text{ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}$

ତୁମ ପାଇଁ କାମ :



(1) ଗୋଟିଏ ବର୍ଗକାଗଜ ବା ଗ୍ରାଫ୍ କାଗଜରେ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର । (ବର୍ଗକାଗଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷୁଦ୍ର ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1 ବର୍ଗ ସେ.ମି.)

(2) ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଥିବା ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗଚିତ୍ର ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।

(3) ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ କ୍ଷୁଦ୍ର ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର ଅର୍ଦ୍ଧେକ କିମ୍ବା ତଦୁର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ଅଂଶ ରହୁଥିବା କ୍ଷେତ୍ରସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।

(4) 2 ଓ 3 ସୋପାନରେ କ୍ଷେତ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ସ୍ଥିର କର ।

(**ବି.ଦ୍ର.:** ଅର୍ଦ୍ଧେକ ଅଂଶ ରହୁଥିବା ଦୁଇଟି କ୍ଷେତ୍ରକୁ ଗୋଟିଏ ବର୍ଗ ଏକକ ନିଅ ଏବଂ ଅର୍ଦ୍ଧେକରୁ ଅଧିକ ଅଂଶ ରହୁଥିବା କ୍ଷେତ୍ରକୁ ଗୋଟିଏ ବର୍ଗ ଏକକ ନିଅ ।) ତତ୍ପରେ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶସ୍ଥ କ୍ଷେତ୍ରସଂଖ୍ୟାକୁ ନେଇ ଏହାକୁ ବର୍ଗ ଏକକରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(5) ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଉଚ୍ଚତା କେତେ, ତାହାକୁ ଚିତ୍ରରୁ ସ୍ଥିର କର ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ସ୍ଥିର କର । ଏହାକୁ ବର୍ଗ ଏକକରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(6) ସୋପାନ 4 ଓ 5 ରୁ ବାହାରିଥିବା ଉତ୍ତର ଦେଖି କେଉଁ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ପହଞ୍ଚିଲ ଲେଖ ।

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ x ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ଉଚ୍ଚତା

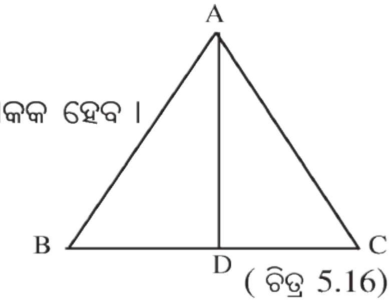
(7) ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏବଂ ଉଚ୍ଚତାକୁ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଯଥାକ୍ରମେ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ ନେଇ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ବର୍ଗ ଏକକ ସ୍ଥିର କର ।

(8) ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ମଧ୍ୟରେ କ'ଣ ସଂପର୍କ ଦେଖୁଛ ଲେଖ ।

ସଂପର୍କ : ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 2 x ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

(**ବି.ଦ୍ର.:** ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ବର୍ଗକାଗଜ ଦ୍ୱାରା କୌଣସି କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିରୂପଣର ପ୍ରଣାଳୀ ଆଗରୁ ପଢ଼ିଛ । ସାଧାରଣତଃ ଯେକୌଣସି ସାମତଳିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିରୂପଣ ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀରେ କରାଯାଇଥାଏ ।)

(B) ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ:



(ଚିତ୍ର 5.16)

ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ a ଏକକ ହେଲେ ଏହାର ଉଚ୍ଚତା = $\frac{\sqrt{3}}{2}$a ଏକକ ହେବ ।

ABC ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ଉଚ୍ଚତା

$= \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ ବର୍ଗ ଏକକ ।

ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ a ଏକକ ହେଲେ, କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ ବର୍ଗ ଏକକ ।	...(i)

ଉଚ୍ଚତା ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ସମବାହୁ ତିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ (ଉଚ୍ଚତା)^2 ବର୍ଗ ଏକକ	...(ii)

(ii) ର ପ୍ରମାଣ ନିଜେ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କର ।

(C) ତିନିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ a, b ଓ c ଏକକ ହେଲେ,

ପରିସୀମା $2s = a + b + c \Rightarrow s = \frac{a+b+c}{2}$ ଅର୍ଥାତ୍ ଅର୍ଦ୍ଧପରିସୀମା $= \frac{a+b+c}{2}$

ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ବର୍ଗ ଏକକ (s = ଅର୍ଦ୍ଧପରିସୀମା)

(ଏହା **ହେରନ୍‌ଙ୍କ ସୂତ୍ର (Heron's formula)** ରୂପେ ନାମିତ ହୋଇଆସୁଅଛି । ଏ ସୂତ୍ରଟି ଆର୍ଯ୍ୟଭଟ୍ଟଙ୍କୁ ମଧ୍ୟ ଜଣାଥିଲା ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।)

କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ମାପର ପ୍ରଚଳିତ ଏକକ :

ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଏକକ	(ବର୍ଗ କଲେ)	କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏକକ
1 ମି. = 10 ଡେସି.ମି.	⇒1 ବର୍ଗ ମି.	= 100 ବର୍ଗ ଡେସି.ମି.
1 ମି = 100 ସେ.ମି.	⇒ 1 ବର୍ଗ ମି.	= 10,000 ବର୍ଗ ସେ.ମି.
1 ଡେକାମି. = 10 ମି.	⇒ 1 ବର୍ଗ ଡେକା ମି.	= 100 ବର୍ଗ ମି. = 1 ଏୟର
1 ହେକ୍ଟୋମିଟର= 100 ମି.	⇒ 1 ବର୍ଗ ହେକ୍ଟୋମିଟର	= 1 ହେକ୍ଟର = 10,000 ବ.ମି.

ସମାହିତ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ

ଉଦାହରଣ – 1 : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ଆକୃତିବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 5.4 ଏୟର । ଏହାର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 27 ମିଟର ହେଲେ, ଉଚ୍ଚତା କେତେ ମିଟର ?

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 5.4 ଏୟର = 5.4 x 100 ବ.ମି. = 540 ବ.ମି. । ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 27 ମି. ।

$\therefore$ ଏହାର ଉଚ୍ଚତା $= \frac{2 \times \text{କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\text{ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \frac{2 \times 540}{27} = 40$ ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 2 : ABC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର $\angle B$ ସମକୋଣ AB = 60 ଡେସି.ମି.

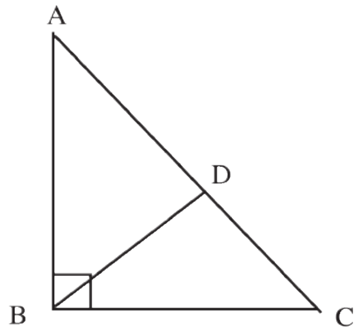
ଓ BC = 45 ଡେସି.ମି. ହେଲେ, $\overline{AC}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ $\overline{BD}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : AB = 60 ଡେସି.ମି. ଓ BC = 45 ଡେସି.ମି.,

$\therefore$ କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= \sqrt{60^2 + 45^2}$ ଡେସି.ମି. $= \sqrt{15^2(4^2 + 3^2)}$ ଡେସି. ମି.

$= \sqrt{15^2 \times 5^2}$ ଡେସି. ମି.

$= 15 \times 5$ ଡେସିମି. $= 75$ ଡେସି. ମି. ।



(ଚିତ୍ର 5.17)

ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times AC \times BD$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 60 \times 45 = \frac{1}{2} \times 75 \times BD$

$\Rightarrow BD = \frac{60 \times 45}{75} = 36$ ଡେସି. ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 3 : ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 16 ସେ.ମି. ହେଲେ, (i) ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । (ii) କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : (i) ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା = ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $\times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ ସେ.ମି. $= 8\sqrt{3}$ ସେ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

(ii) ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times$ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ)^2

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 16^2$ ବର୍ଗସେ.ମି. $= 64\sqrt{3}$ ବ.ସେ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ : ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{\sqrt{3}} \times$ (ଉଚ୍ଚତା)$^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \left(8\sqrt{3}\right)^2$ ବର୍ଗସେ.ମି.

$= \frac{64 \times 3}{\sqrt{3}}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. $= 64\sqrt{3}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 4 :

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 39 ମି., 41 ମି. ଓ 50 ମି. । ଏହାର ବୃହତ୍ତମ ବାହୁ ଉପରେ ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟି ବାହୁ 39 ମି., 41 ମି. ଓ 50 ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ

ତ୍ରିଭୁଜର ଅର୍ଦ୍ଧପରିସୀମା $= s = \frac{39+41+50}{2}$ ମି. $= \frac{130}{2}$ ମି. $= 65$ ମି.

ତ୍ରିଭୁଜଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{65(65-39)(65-41)(65-50)}$ ବ.ମି.

$= \sqrt{65 \times 26 \times 24 \times 15}$ ବ.ମି.$= \sqrt{13 \times 5 \times 13 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}$ ବ.ମି.

$= 13 \times 5 \times 3 \times 2 \times 2 = 780$ ବ.ମି.

ତ୍ରିଭୁଜଟିର ବୃହତ୍ତମ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= 50$ ମି.

ମନେକର ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= x$ ମି.

$\therefore$ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2} \times 50 \times x$ ବ.ମି.

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ, $\frac{1}{2} \times 50 \times x = 780$

$$\Rightarrow x = \frac{780 \times 2}{50} \text{ ମି.} = 31.20 \text{ ମି.}$$

ଅଥବା, ବୃହତ୍ତମ ବାହୁ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= \dfrac{2 \times \text{କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\text{ବୃହତ୍ତମ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}$

$= \dfrac{2 \times 780}{50} = 31.20$ ମିଟର ।(ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (d)

1. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 2.55 ଡେସିମିଟର ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା 68 ସେ.ମି. । କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ଆକୃତିବିଶିଷ୍ଟ ପାର୍କର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 288 ମିଟର ଏବଂ ସେହି ବାହୁର ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ତାହା ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 115 ମିଟର ହେଲେ କ୍ଷେତ୍ରଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ନିମ୍ନରେ ଦୁଇଟି ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି । ପ୍ରତ୍ୟେକର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $14\sqrt{2}$ ସେ.ମି. (ii) $8\sqrt{6}$ ମିଟର

4. ନିମ୍ନରେ ଦୁଇଟି ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା ଦତ୍ତ ଅଛି । ପ୍ରତ୍ୟେକର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 12 ଡେସି.ମି. (ii) $36\sqrt{3}$ ମି.

5. ନିମ୍ନୋକ୍ତ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 42 ସେ.ମି., ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 35 ସେ.ମି. ।

(ii) ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 22 ମି., ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 61 ମି. ।

(iii) ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ସେ.ମି., ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ y ସେ.ମି. ।

6. ΔABC ରେ $\overline{AD}$ ଓ $\overline{BE}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ । BC = 30 ସେ.ମି., CA = 35 ସେ.ମି. ଓ AD = 25 ସେ.ମି. ହେଲେ, $\overline{BE}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ଦୁଇଗୋଟି ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିକର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଉଚ୍ଚତା ଯଥାକ୍ରମେ ଅନ୍ୟଟିର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଉଚ୍ଚତାର ଦୁଇଗୁଣ ଓ ତିନିଗୁଣ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । (ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ପାଇଁ ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ x, 2x ଓ ଉଚ୍ଚତାକୁ y, 3y ନିଅ ।)

8. ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 120 ଡେସି ମିଟର ହେଲେ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

9. ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 484 ବର୍ଗ ମିଟର ହେଲେ, ଏହାର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ନିମ୍ନରେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି । ପ୍ରତ୍ୟେକର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

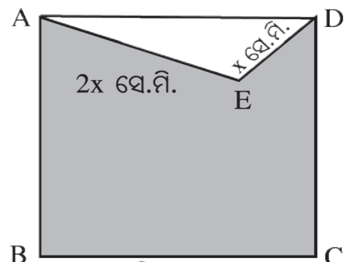
(i) 13ସେ.ମି., 14 ସେ.ମି. ଏବଂ 15 ସେ.ମି. ।

(ii) 25 ସେ.ମି., 26 ସେ.ମି. ଏବଂ 17 ସେ.ମି. ।

(iii) 39 ମିଟର, 42 ମିଟର ଏବଂ 45 ମିଟର ।

11. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁଗୁଡ଼ିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 10 ସେ.ମି., 17 ସେ.ମି. ଏବଂ 21 ସେ.ମି. ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ତ୍ରିଭୁଜର ବୃହତ୍ତମ ବାହୁ ଉପରେ ସେହି ବାହୁର ବିପରୀତ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ ABCD ଏକ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର । AED ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର $\overline{AE}$ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 2xସେ.ମି. । $\overline{ED}$ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ସେ.ମି. । AED ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 16 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେଲେ, ABCDE କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର 5.18)

13. ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 44 ମି. ଏବଂ ଅନ୍ୟ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି 88 ମିଟର ହେଲେ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

14. ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବୃହତ୍ତମ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 56 ସେ.ମି. । ଏହି ବାହୁ ଉପରେ ସମକୋଣର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

15. ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜରେ ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 96 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର ସମକୋଣର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁରୁ କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।

5.4 ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ଓ ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ :

(କ) ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର:

ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ ବାହୁଯୋଡ଼ାଗୁଡ଼ିକ ସମାନ୍ତର ତାହା ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । ଏଣୁ ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ରର ବିପରୀତ ବାହୁଯୋଡ଼ାଗୁଡ଼ିକ ସମାନ୍ତର ତାହା ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ।

ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ସମ୍ବନ୍ଧରେ କେତେକ ତଥ୍ୟ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା । ଆବଶ୍ୟକତା ଅନୁଯାୟୀ ଏଗୁଡ଼ିକର ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇଥାଏ । ସେଗୁଡ଼ିକୁ ମନେରଖିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ଯେକୌଣସି ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରରେ –

(i) ବିପରୀତ ବାହୁଗୁଡ଼ିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ;

(ii) ବିପରୀତ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସମାନ;

(iii) କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ;

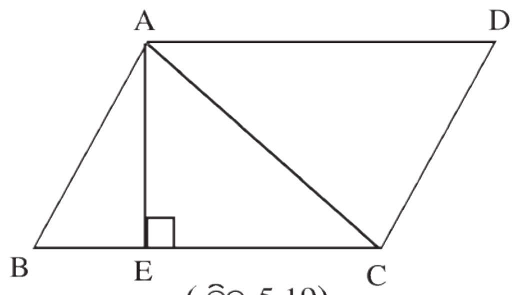
(iv) ପ୍ରତ୍ୟେକ କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ଏହାର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ;

(v) ପ୍ରତ୍ୟେକ କର୍ଣ୍ଣ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରକୁ ଦୁଇଟି ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ କରେ;

(vi) ଦୁଇଟି କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱାରା କ୍ଷେତ୍ରଟି ଚାରିଗୋଟି ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ ହୁଏ ଏବଂ

(vii) ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର, ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଓ ରମ୍ବସ୍ ଆକୃତିବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ର ମଧ୍ୟ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର । ଫଳରେ ଉପରୋକ୍ତ ସମସ୍ତ ତଥ୍ୟ ରମ୍ବସ, ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ତଥା ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ଆଦି ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।

ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ:



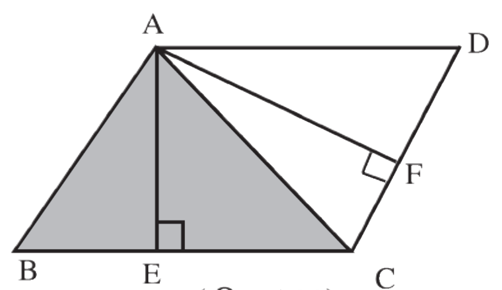
(ଚିତ୍ର 5.19)

ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣ ଅଙ୍କନ କରାଗଲେ, ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରଟି ଦୁଇଟି ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜରେ ପରିଣତ ହୁଏ । ଦୁଇଗୋଟି କର୍ଣ୍ଣ ଅଙ୍କନ କରାଗଲେ, ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରଟି ଚାରୋଟି ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜରେ ପରିଣତ ହୁଏ । ଉପରୋକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜଗୁଡ଼ିକର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ ।

ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ସମାନ୍ତର ବାହୁ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନ ବା ଲମ୍ବ ଦୂରତାକୁ ଉକ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରର ଉଚ୍ଚତା କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 5.19 ରେ $\overline{BC}$ ଭୂମି ପ୍ରତି $\overline{AE}$ ଲମ୍ବ । $\overline{AE}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ AE କୁ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଉଚ୍ଚତା କୁହାଯାଏ ।

ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିସ୍ଥିତିରେ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କିପରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରୁଛି ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

(A) **ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ସେହି ବାହୁ ପ୍ରତି ଉଚ୍ଚତା ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ:**



(ଚିତ୍ର 5.20)

ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରରେ A ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ $\overline{AE}$ ଟାଣ ଏବଂ $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣ ଅଙ୍କନ କର । ବର୍ତ୍ତମାନ ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରଟି $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱାରା ଦୁଇଟି ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ ହେଲା ।

Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2} \times BC \times AE$

$\therefore$ ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= 2 \times \Delta$ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

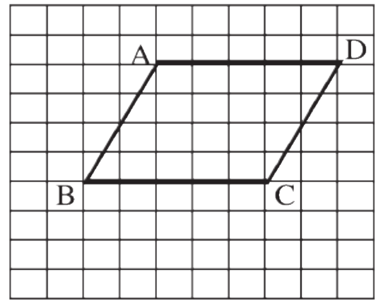
$$= 2 \times \frac{1}{2} \times BC \times AE = BC \times AE$$

ସେହିପରି A ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{DC}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ $\overline{AF}$ ଅଙ୍କନ କରି ସ୍ଥିର କରାଯାଇ ପାରେ ଯେ,

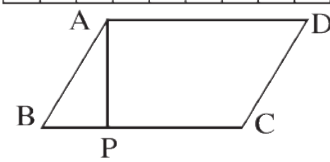
ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = DC x AF

ଅର୍ଥାତ୍ : **ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ= ଏକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ସେହି ବାହୁ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଉଚ୍ଚତା ।**

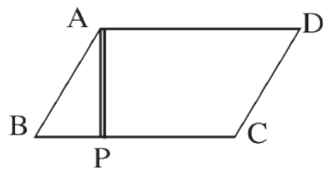
ତୁମ ପାଇଁ କାମ



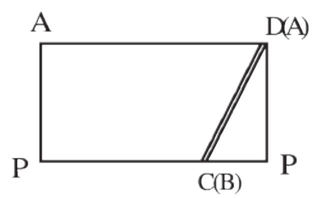
(1) ଗୋଟିଏ ବର୍ଗ କାଗଜ ବା ଗ୍ରାଫ୍ କାଗଜରେ ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର । ତତ୍ପରେ ଗ୍ରାଫ୍ କାଗଜରୁ (ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର) ଅଙ୍କିତ ଅଂଶକୁ କାଟି ବାହାର କର ।



(2) କାଗଜଟିକୁ ଭାଙ୍ଗି $\overline{BC}$ ଉପରେ P ବିନ୍ଦୁ ନିରୂପଣ କର ଯେପରି $\overline{AP}$, $\overline{BC}$ ଉପରେ ଲମ୍ବ ହେବ ।



(3) $\overline{AP}$ ଧାର ଦେଇ କାଗଜକୁ କାଟି ମୂଳ କ୍ଷେତ୍ର ABCD ରୁ ଅଲଗା କର ।



(4) ABP ତ୍ରିଭୁଜାକାର ଅଂଶକୁ ABCD ଚିତ୍ରିତ ଅଂଶରୁ ଅଲଗା କରି ସାରିବା ପରେ ABP ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି ଅଂଶକୁ APCD ଚିତ୍ରିତ ଅଂଶ ସହ (ଚିତ୍ରରେ ଦେଖା ଯାଉଥିବା ଭଳି) ଅଠା ଦ୍ୱାରା ଯୋଡ଼ି ରଖ ଯେପରିକି $\overline{DC}$ ଧାର ସହ $\overline{AB}$ ଧାର ମିଶି ରହିବ ।

(5) ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହ ସମାନ ହେବ କି ? ଯଦି ହେବ କାହିଁକି ?

(6) ସୋପାନ (1) ରୁ ବର୍ଗ କାଗଜରେ ଅଙ୍କିତ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ଏବଂ ତତ୍ପରେ ସୋପାନ (5) ରେ ବାହାରିଥିବା କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହ ମିଳାଇ ଦେଖ, କ'ଣ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରୁଛ ?

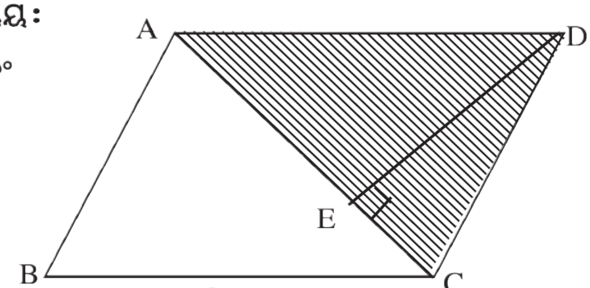
(B) ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଏହାର ସମ୍ମୁଖୀନ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ଏହା ପ୍ରତି ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ:

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣ ଏବଂ D ବିନ୍ଦୁରୁ ଏହା ପ୍ରତି $\overline{DE}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି ।

ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= 2 \times \Delta ACD$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

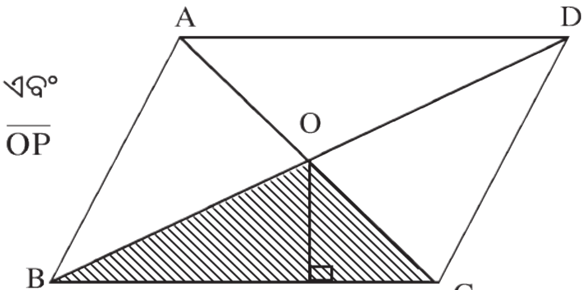
$= 2 \times \frac{1}{2} \times AC \times DE = AC \times DE$



(ଚିତ୍ର 5.21)

ଅର୍ଥାତ୍, **ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ଏହି କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ଏହାର ସମ୍ମୁଖୀନ ଏକ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ।**

(C) ଗୋଟିଏ ବାହୁ ଓ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁରୁ ସେହି ବାହୁ ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :



(ଚିତ୍ର 5.22)

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ବାହୁ $\overline{BC}$ ଏବଂ ଏହି ବାହୁ ପ୍ରତି କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ଠାରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ $\overline{OP}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି ।

ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

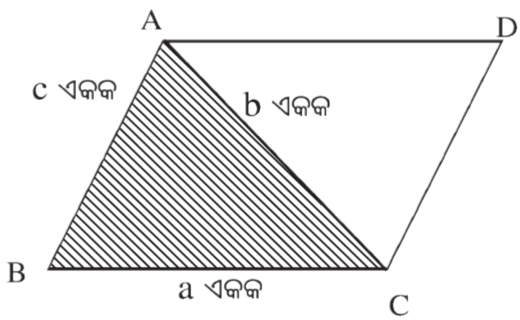
$= 4 \times \Delta OBC$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ।

($\because$ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ଏହାକୁ ଚାରୋଟି ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜରେ ପରିଣତ କରେ ।)

$= 4 \times \frac{1}{2} \times BC \times OP = 2 \times BC \times OP$

$\therefore$ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 2 x ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁରୁ ସେହି ବାହୁ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ।

(D) ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ବାହୁ ଓ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ:



(ଚିତ୍ର 5.23)

ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରରେ –

AC = b ଏକକ, BC = a ଏକକ, AB = c ଏକକ ହେଉ

ABC Δ ର ଅର୍ଦ୍ଧପରିସୀମା s ହେଲେ,

$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ ଏକକ ହେବ ।

$\therefore$ ABC Δର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ବର୍ଗ ଏକକ

ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 2 X ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ବର୍ଗ ଏକକ ।

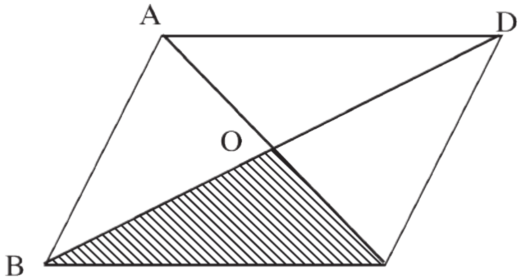
ଅର୍ଥାତ୍, **ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$**
ଯେଉଁଠି, ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଦୁଇ ସନ୍ନିହିତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ a ଏକକ ଓ c ଏକକ ଏବଂ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ b ଏକକ, ଫଳରେ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

(E) **କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ଓ ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :**

ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର BC, AC ଓ BD ଦତ୍ତ ଅଛି । $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ

ଛେଦ କରନ୍ତୁ । ΔOBC ରେ $OB = \frac{BD}{2}$, $CO = \frac{AC}{2}$ ଏବଂ BC ଦତ୍ତ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ΔOBC ର ତିନି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଜଣାଥିବାରୁ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିହେବ ।



(ଚିତ୍ର 5.24)

ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 4 x ΔOBC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

ସମାହିତ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ

ଉଦାହରଣ – 1 : ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 25 ସେ.ମି. ଏବଂ ସେହି ଭୂମି ପ୍ରତି ଉଚ୍ଚତା 12 ସେ.ମି. । ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ଉଚ୍ଚତା

= (25 x 12) ବର୍ଗ ସେ.ମି. = 300 ବର୍ଗ ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 2 : ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 75 ସେ.ମି. ଏବଂ ଏହି କର୍ଣ୍ଣର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ କର୍ଣ୍ଣ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 12 ସେ.ମି. ହେଲେ, ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

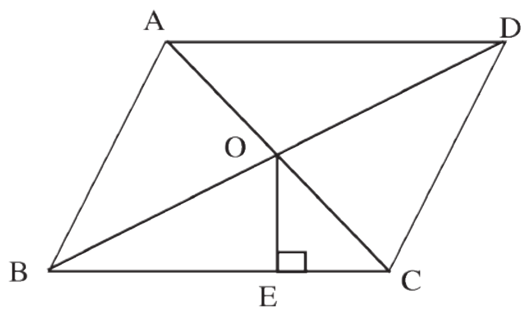
ସମାଧାନ :

ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x କର୍ଣ୍ଣ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ

= 75 ସେ.ମି. x 12 ସେ.ମି. = 900 ବର୍ଗ ସେ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 3 : ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 25 ସେ.ମି. ଏବଂ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁଠାରୁ ସେହି ବାହୁ ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4.5 ସେ.ମି. ହେଲେ, ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଚିତ୍ର 5.25 ରେ ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ରୁ $\overline{BC}$ ବାହୁ ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ $\overline{OE}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ= 4.5 ସେ.ମି. । BC = 25 ସେ.ମି.



(ଚିତ୍ର 5.25)

ΔOBC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ x BC x OE

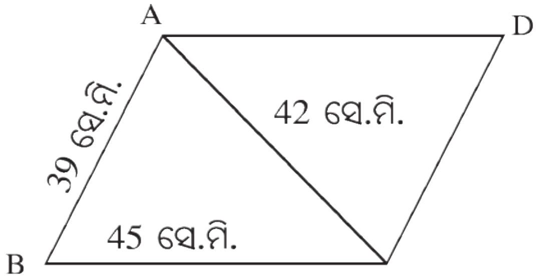
= $\frac{1}{2}$ x 25 x 4.5ବର୍ଗସେ.ମି. = $\frac{112.5}{2}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.

$\therefore$ ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 4 x ΔOBCର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= 4 x $\frac{112.5}{2}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. = 225 ବର୍ଗ ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 4 :

ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 39 ସେ.ମି. ଏବଂ 45 ସେ.ମି. ଏବଂ ଏହାର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 42 ସେ.ମି. ହେଲେ, ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର 5.26)

ସମାଧାନ :

ଦତ୍ତ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର, BC = a = 45 ସେ.ମି., AC = b = 42 ସେ.ମି., AB = c = 39 ସେ.ମି. ।

Δ ABC ର ଅର୍ଦ୍ଧପରିସୀମା $= s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{45+42+39}{2}$ ସେ.ମି. = 63 ସେ.ମି.

Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{63(63-45)(63-42)(63-39)}$ ବ.ସେ.ମି.

$= \sqrt{63 \times 18 \times 21 \times 24}$ ବ.ସେ.ମି.

$= \sqrt{21 \times 3 \times 3 \times 6 \times 21 \times 6 \times 2 \times 2}$ ବ.ସେ.ମି.

$= 21 \times 3 \times 6 \times 2 = 756$ ବ.ସେ.ମି.

ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 2 x ΔABCର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

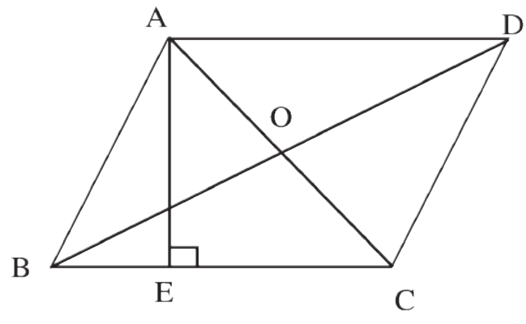
= 2 x 756 ବର୍ଗ ସେ.ମି. = 1512 ବର୍ଗ ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 5 : ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 34 ସେ.ମି. ଓ 78 ସେ.ମି. ଏବଂ ଏହାର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 44 ସେ.ମି. ହେଲେ, ସେହି ବାହୁ ଓ ତାହାର ବିପରୀତ ବାହୁ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଲମ୍ବ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର BC = 44 ସେ.ମି.

BD = 78 ସେ.ମି. ଓ AC = 34 ସେ.ମି.

$\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ହେଉ ।



(ଚିତ୍ର 5.27)

$\therefore OB = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{1}{2} \times 78$ ସେ.ମି. = 39 ସେ.ମି.

$OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{1}{2} \times 34$ ସେ.ମି. =17 ସେ.ମି.

Δ OBC ର ଅର୍ଦ୍ଧପରିସୀମା $= s = \dfrac{39+44+17}{2}$ ସେ.ମି.

$= \dfrac{100}{2}$ ସେ.ମି. = 50 ସେ.ମି.

Δ OBC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{50(50-39)(50-44)(50-17)}$ ବ.ସେ.ମି.

$= \sqrt{50 \times 11 \times 6 \times 33}$ ବ.ସେ.ମି.

$= \sqrt{5 \times 5 \times 2 \times 11 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11}$ ବ.ସେ.ମି.

$= 5 \times 2 \times 11 \times 3 = 330$ ବ.ସେ.ମି.

$\therefore$ ABCD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 4 x ΔOBC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= 4 x 330 ବର୍ଗ ସେ.ମି. = 1320 ବର୍ଗ ସେ.ମି.

$\overline{AE}$ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\dfrac{\text{ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\text{ଭୂମି } \overline{BC} \text{ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \dfrac{1320}{44}$ ସେ.ମି.= 30 ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (e)

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର

(i) ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4 ଡେସି.ମି. ଓ ସେହି ବାହୁ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଉଚ୍ଚତା 1 ଡେସି.ମି. 8 ସେ.ମି. ।

(ii) ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 2 ମି. 55 ସେ.ମି., ସେହି ବାହୁ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଉଚ୍ଚତା 1 ମି. 4 ସେ.ମି. ।

(iii) ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 12 ମି. ଓ ଏହାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଗୋଟିଏ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଏହା ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4 ମି. ।

2. ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ବାହୁ ଓ ଏକ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 26 ମି. ଓ 28 ମି. ଏବଂ 30 ମି. ହେଲେ, ତାହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 204 ସେ.ମି. ଓ 252 ସେ.ମି. ଏବଂ ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 60 ସେ.ମି. । ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 34 ସେ.ମି. ଓ 50 ସେ.ମି. ଏବଂ ଏହାର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 26 ସେ.ମି. ହେଲେ, ସେହି ବାହୁ ଓ ତାହାର ବିପରୀତ ବାହୁ ମଧ୍ୟରେ ଲମ୍ବ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଦୁଇ ସନ୍ନିହିତ ବାହୁ ଓ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 20 ସେ.ମି., 42 ସେ.ମି. ଓ 34 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଉକ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରର ବୃହତ୍ତମ ବାହୁ ପ୍ରତି ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. କୌଣସି ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 7.5 ମିଟର ଏବଂ ଏହି ବାହୁ ଉପରେ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 0.8 ମିଟର ହେଲେ, କ୍ଷେତ୍ରଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. 63 ମିଟର ଭୂମି ଓ 36 ମିଟର ଉଚ୍ଚତାବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହ ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ । ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 42 ମିଟର ହେଲେ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ଖ) ରମ୍ବସ୍ :

ସଂଜ୍ଞା : ଯେଉଁ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପରସ୍ପର ସମାନ, ତାହାକୁ ରମ୍ବସ୍ (Rhombus) କହନ୍ତି ।

ରମ୍ବସ୍ ସମ୍ବନ୍ଧରେ କେତେକ ଜ୍ୟାମିତିକ ତଥ୍ୟ :

(i) ରମ୍ବସ୍ ଏକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରକାର ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର (ସମସ୍ତ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ରମ୍ବସ ନୁହଁନ୍ତି);

(ii) ଏହାର ଚାରୋଟିଯାକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ;

(iii) ଏହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି;

(iv) ପ୍ରତ୍ୟେକ ରମ୍ବସ୍ ତାହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ଚାରୋଟି ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳବିଶିଷ୍ଟ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ ହୁଏ;

(v) ପ୍ରତ୍ୟେକ କର୍ଣ୍ଣ, ରମ୍ବସ୍ର ଦୁଇଟି ବିପରୀତ କୋଣକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ଏବଂ

(vi) ରମ୍ବସ୍ର ଦୁଇଯୋଡ଼ା ସମାନ୍ତର ବାହୁ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନ (ବା ଲମ୍ବ ଦୂରତ୍ୱ ବା ଉଚ୍ଚତା) ପରସ୍ପର ସମାନ ।

ରମ୍ବସ୍ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

(A) କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ରମ୍ବସ୍ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ABCD ରମ୍ବସ୍ର କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି । ଆମେ ଜାଣୁ ରମ୍ବସ୍ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି । ଚିତ୍ର 5.28ରେ, AO = CO, BO =DO, $\overline{BO} \perp \overline{AC}$ ଏବଂ $\overline{DO} \perp \overline{AC}$

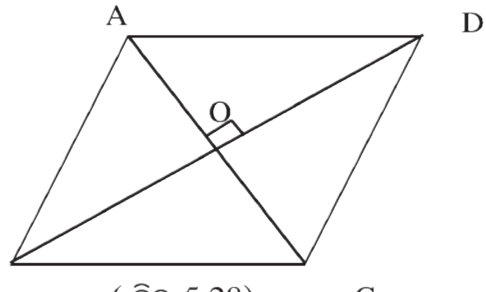
ABCD ରମ୍ବସ୍ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= 2 \times \Delta ABC$ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= 2 \times \frac{1}{2} \times AC \times BO$

$= AC \times BO$

$= AC \times \frac{BD}{2} = \frac{1}{2}(AC \times BD)$



(ଚିତ୍ର 5.28)

କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ d_1 ଓ ଅନ୍ୟଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ d_2 ହେଲେ, ରମ୍ବସ୍ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2} d_1 d_2$

ଅର୍ଥାତ୍, **ରମ୍ବସ୍ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ x କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳ ।**

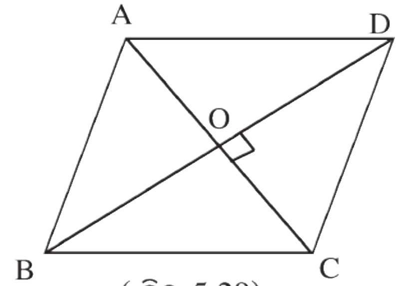
ମନ୍ତବ୍ୟ -1 : ରମ୍ବସ୍ ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ହୋଇଥିବାରୁ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ରମ୍ବସ୍ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।

(B) ରମ୍ବସ୍‌ର ଦୁଇଟି କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ABCD ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ସମକୋଣରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।

ମନେକର $AC = d_1$ (ପ୍ରଥମ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ଏବଂ $BD = d_2$(ଦ୍ୱିତୀୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ)

$CO = \frac{d_1}{2}$ ଏବଂ $BO = \frac{d_2}{2}$



(ଚିତ୍ର 5.29)

$\therefore$ BOC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ

$$BC = \sqrt{CO^2 + BO^2} = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$$

ଅର୍ଥାତ୍, ରମ୍ବସ୍‌ର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ

$$= \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^{\,2} + d_2^{\,2}}$$

ରମ୍ବସ୍‌ର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\frac{1}{2}\sqrt{(\text{ପ୍ରଥମ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ})^2 + (\text{ଦ୍ୱିତୀୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ})^2}$

ମନ୍ତବ୍ୟ – 2 : ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣ ଓ ଏହାର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ପର୍କ ପ୍ରତିପାଦିତ ହେଲା । କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ଓ ବାହୁ ମଧ୍ୟରୁ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ପ୍ରତିପାଦିତ ସମ୍ପର୍କର ସାହାଯ୍ୟ ନେଇ ଅନ୍ୟଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିରୂପଣ କରାଯାଇପାରେ ।

ସମାହିତ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ

ଉଦାହରଣ – 1:

ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 16 ସେ.ମି. ଓ 12 ସେ.ମି. । ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ x କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳ

$= \frac{1}{2} \times 16 \times 12$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. = 96 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ।

ରମ୍ବସ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= \frac{1}{2}\sqrt{d_1^{\,2} + d_2^{\,2}} = \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + 12^2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4^2(4^2 + 3^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 \times 5^2}$$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$ ସେ.ମି.

ରମ୍ବସ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା = $\dfrac{\text{କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\text{ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \dfrac{96}{10}$ ସେ.ମି.= 9.6 ସେ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 2:

ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 13 ମିଟର ଏବଂ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 24 ମିଟର ହେଲେ, ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏବଂ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

ରମ୍ବସ୍‌ର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $(d_1) = 24$ ମିଟର

ମନେକର ରମ୍ବସ୍‌ର ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $(d_2) = 2x$ ମିଟର

ରମ୍ବସ୍‌ର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{24}{2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{2}\right)^2} = \sqrt{(12)^2 + (x)^2}$

$\Rightarrow$ (ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ)$^2 = (12)^2 + (x)^2 \Rightarrow (13)^2 = (12)^2 + (x)^2$

$\Rightarrow 169 = 144 + x^2 \Rightarrow 144 + x^2 = 169$

$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$

ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= 2 \times 5$ ମିଟର $= 10$ ମିଟର

ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2} \times$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳ $= \frac{1}{2} \times 24 \times 10 = 120$ ବ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ – 5 (f)

1. ନିମ୍ନରେ ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି । ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ଥଳରେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

(i) 16 ସେ.ମି. ଓ 20 ସେ.ମି. (ii) 20 ମି. ଓ 15.4 ମି. (iii) $8\sqrt{2}$ ମି. ଓ $4\sqrt{2}$ ମି.

2. ନିମ୍ନରେ ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି । ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ଥଳରେ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 40ସେ.ମି. ଓ 30 ସେ.ମି. (ii) 14 ମି. ଓ 48 ମି. ।

(iii) 1.6 ସେ.ମି. ଓ 3 ସେ.ମି. (iv) 1.8 ମି. ଓ 2.4 ମି. ।

3. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 840 ବର୍ଗ ମିଟର । ଏହାର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 42 ମିଟର । ଏହାର ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏବଂ ପରିସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଏକ ରମ୍ବସ୍‌ର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟର 3 ଗୁଣ ଏବଂ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1944 ବର୍ଗ ମିଟର ହେଲେ, କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $648\sqrt{3}$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. ଓ ଏହାର ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ 60^0 ହେଲେ, ଏହାର କ୍ଷୁଦ୍ରତର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ତାହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନ । ରମ୍ବସ୍‌ର ପରିସୀମା 48 ସେ.ମି. ହେଲେ, ତାହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର ପରିସୀମା 16 ମିଟର । ଏହାର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 6 ମିଟର ହେଲେ, ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5.5 ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ :

ସଂଜ୍ଞା : ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଏକଯୋଡ଼ା ବିପରୀତ ବାହୁ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର, ସେହି ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍ (Trapezium) କୁହାଯାଏ ।

ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଜ୍ୟାମିତିକ ତଥ୍ୟ :

ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ, ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟ ସହ ସମାନ୍ତର ଏବଂ ଏହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟିର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ସଙ୍ଗେ ସମାନ ।

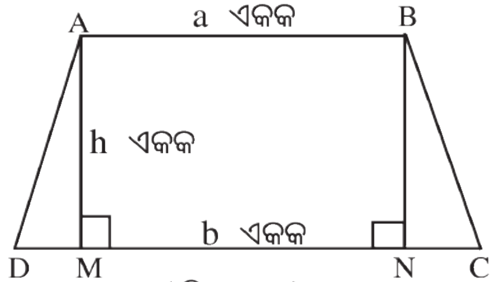
(ପ୍ରମାଣ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିବ ।)

ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜାକାର କ୍ଷେତ୍ରର ଏକଯୋଡ଼ା ବିପରୀତ ବାହୁ ସମାନ୍ତର ତାହା ଏକ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ର । ଟ୍ରାପିଜିଅମ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳକୁ, ଆମେ ସଂକ୍ଷେପରେ, ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବୋଲି କହିବା ।

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{AB}$ ଓ $\overline{DC}$ ବାହୁଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର । ତେଣୁ ଏହା ଏକ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍ ।

ମନେକର AB = a ଏକକ ଏବଂ DC = b ଏକକ

$\overline{AM}$ ଓ $\overline{BN}$ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{DC}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ । ଉଭୟ $\overline{AM}$ ଓ $\overline{BN}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ଓ ସେଦ୍ୱୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା (h) ଅଟନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 5.30)

ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ :

ABCD ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= ΔAMD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + ΔBNC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + AMNB ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$$= \frac{1}{2} \times DM \times AM + \frac{1}{2} \times CN \times BN + MN \times AM$$

$= \frac{1}{2} DM \times h + \frac{1}{2} NC \times h + MN \times h$ ($\because$ AM = BN = h ଏକକ)

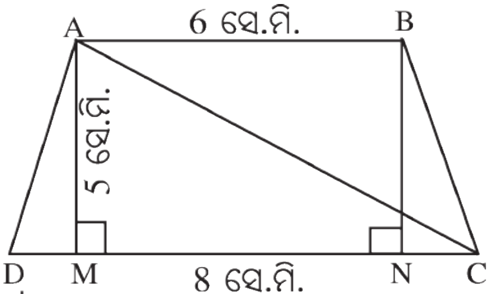
$$= \frac{1}{2} h(DM + NC + 2MN) = \frac{1}{2} h(DM + MN + NC + MN) = \frac{1}{2} h(DC + MN)$$

$= \frac{1}{2}(DC + AB) \times h$ ($\because$ MN = AB)

$= \frac{1}{2}(AB + DC) \times h = \frac{1}{2}(a+b) \times h$ ବର୍ଗ ଏକକ

ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ x ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି x ଉଚ୍ଚତା (ବା)
= ସମାନ୍ତର ବାହୁ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ବାହୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ଉଚ୍ଚତା

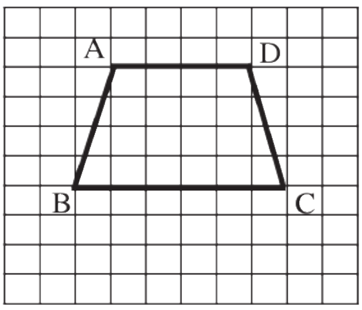
ନିଜେ କର



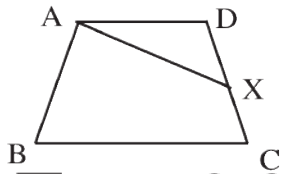
(ଚିତ୍ର 5.31)

1. ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AM} \perp \overline{DC}$ ଏବଂ $\overline{BN} \perp \overline{DC}$
   (i) ΔADC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।
   (ii) ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।
   (iii) ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।
   (iv) ΔADM ଓ ΔBNC ଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି ସ୍ଥିର କର ।
   (v) AMNB ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।
   (vi) ସେପାାନ (iv) ଓ (v) ରେ ସ୍ଥିର କରିଥିବା ଉତ୍ତରରୁ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।
   (vii) ସୋପାନ (iii) ଓ ସୋପାନ (vi) ରୁ ମିଳୁଥିବା ଉତ୍ତରକୁ ମିଳାଇ ଦେଖ । କ'ଣ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରୁଛ ?
2. ଉପରିସ୍ଥ ଚିତ୍ର (ଚିତ୍ର 5.31)ରେ
   (i) $\overline{AD}$ ସହ ସମାନ୍ତର କରି $\overline{BL}$ ଅଙ୍କନ କର ଯାହା $\overline{DC}$ କୁ L ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ।
   (ii) ଉତ୍ପନ୍ନ ABLD ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ହେବ ?
   (iii) ଉତ୍ପନ୍ନ LBC Δ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।
   (iii) ତତ୍ପରେ ABCD ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

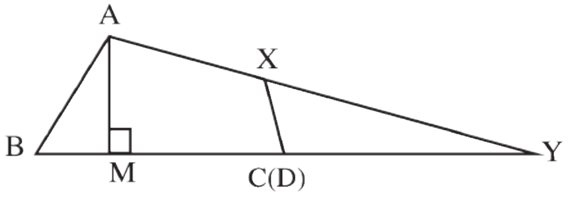
ତୁମ ପାଇଁ କାମ



1. ଗୋଟିଏ ବର୍ଗକାଗଜ ବା ଗ୍ରାଫ୍ କାଗଜରେ ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍ ଅଙ୍କନ କର । ତତ୍ପରେ ଗ୍ରାଫ୍ କାଗଜରୁ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌କୁ କାଟି ବାହାର କର ।



2. ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍ କାଗଜକୁ ଭାଙ୍ଗି $\overline{DC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ବାହାର କରି ତାକୁ 'X' ନାମରେ ନାମିତ କର ।
3. $\overline{AX}$ ଧାର ଦେଇ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌କୁ କାଟି ଦୁଇଖଣ୍ଡ କର ।
   ΔADX କୁ ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରରେ ଦେଖାଯିବା ଭଳି ରଖ ଯେପରିକି $\overline{XD}$ ଧାର, $\overline{CX}$ ଧାରକୁ ଲାଗି ରହିବ ।



4. ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା ABY ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ଦତ୍ତ ABCD ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହ ସମାନ ହେବ କି ? ଯଦି ହଁ, ତେବେ କାହିଁକି ?
5. ସୋପାନ (1) ରୁ ବର୍ଗ କାଗଜରେ ଅଙ୍କିତ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ଏବଂ ତତ୍ପରେ ସୋପାନ (4)ରେ ବାହାରିଥିବା କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହ ମିଳାଅ । କ'ଣ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରୁଛ ?

ଉଦାହରଣ - 1: ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 50 ସେ.ମି. ଓ 38 ସେ.ମି. ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା 15 ସେ.ମି. । ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $a = 50$ ସେ.ମି., $b = 38$ ସେ.ମି. ଓ ଉଚ୍ଚତା $h = 15$ ସେ.ମି.

$\therefore$ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2}(a+b) \times h = \frac{1}{2}(50+38) \times 15$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. $= 660$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. ।(ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 2 : ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 810 ବ.ମି. ଏବଂ ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 37 ମି. ଓ 17 ମି. ହେଲେ, ଏହାର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a = 37$ ମି., $b = 17$ମି., ଉଚ୍ଚତା $= h$ ମି. ହେଲେ,

ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2}(a+b) \times h$ ବ.ମି.

$\Rightarrow \frac{1}{2}(37+17) \times h = 810 \Rightarrow \frac{1}{2}(54h) = 810 \Rightarrow 27h = 810 \Rightarrow h = \frac{810}{27} = 30$

$\therefore$ ଉଚ୍ଚତା $= 30$ ମିଟର । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 3 : ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 48 ବ.ମି. ଏବଂ ସମାନ୍ତର ବାହୁ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ବାହୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 12 ମିଟର ହେଲେ, ଉକ୍ତ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ସମାନ୍ତର ବାହୁ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ବାହୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $\times$ ଉଚ୍ଚତା

$=$ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $\Rightarrow 12 \times h = 48 \Rightarrow h = \frac{48}{12} = 4$

$\therefore$ ଉଚ୍ଚତା $= 4$ ମିଟର । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 4 : ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 16 ମି. ଓ 30 ମି. ଏବଂ ଅନ୍ୟ-ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 13 ମି. ଓ 15 ମି. ହେଲେ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ABCD ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ରେ $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

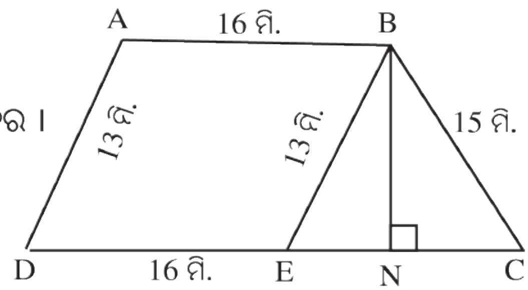
$AB = 16$ ମି., $DC = 30$ ମି. ।

$BC = 15$ ମି. ଓ $AD = 13$ ମି. । $\overline{BE} \parallel \overline{AD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ABED ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ।

$\Rightarrow BE = AD = 13$ ମି. । $DE = AB = 16$ ମି.

$EC = DC - DE = (30 - 16)$ ମି. $= 14$ ମି.



(ଚିତ୍ର 5.32)

Δ BEC ର ଅର୍ଦ୍ଧପରିସୀମା $= s = \frac{15+14+13}{2}$ ସେ.ମି. $= 21$ ମି.

Δ BEC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)}$ ବ.ସେ.ମି.

$= \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8}$ ବ.ସେ.ମି.$= 84$ ବ.ସେ.ମି.

Δ BEC ର ଉଚ୍ଚତା BN = $\dfrac{2 \times \text{କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\text{ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \dfrac{2 \times 84}{14}$ ମି. = 12 ମି.

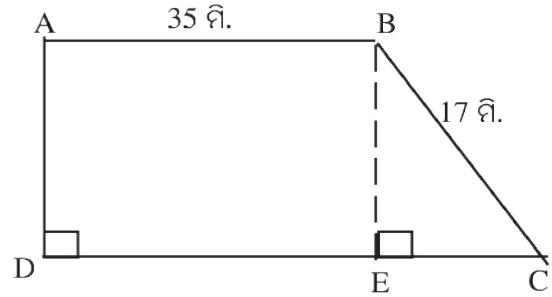
$\therefore$ ABCD ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା = BN = 12 ମି.

$\therefore$ ABCD ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2}$(AB+DC) BN $= \frac{1}{2}$ (16+30) x 12 ବ.ମି.

$= \frac{1}{2}$ x 46 x 12 ବ.ମି. = 276 ବ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 5:

ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 35 ମିଟର ଓ 50 ମିଟର । ଏହାର ଅନ୍ୟ ବାହୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ, ସମାନ୍ତର ବାହୁ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଏବଂ ଅନ୍ୟଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 17 ମିଟର ହେଲେ, ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର 5.33)

ସମାଧାନ :

ABCD ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ଏବଂ $\overline{AD} \perp \overline{DC}$ । $\overline{BE} \perp \overline{DC}$ ଅଙ୍କନ କର । ବର୍ତ୍ତମାନ ABED ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର । DE = AB = 35 ମି. EC = DC – DE

= (50 – 35) ମି. = 15 ମି.

BEC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ, BE = $\sqrt{BC^2 - EC^2} = \sqrt{17^2 - 15^2}$ ମି.

$= \sqrt{(17+15)(17-15)} = \sqrt{32 \times 2} = 8$ ମି. ।

$\therefore$ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା = h = 8 ମି.

a = 35 ମି. ଓ b = 50 ମି. (ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ)

ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2}$ (a + b)h $= \frac{1}{2}$ (35 + 50) x 8 ବ.ମି.

$= \frac{1}{2}$ x 85 x 8 ବ.ମି. = 340 ବ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ – 5 (g)

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ଗୁଡ଼ିକର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଯେଉଁ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର

(i) ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 35 ମି. ଓ 45 ମି. ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା = 18 ମି.

(ii) ସମାନ୍ତର ବାହୁ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ବାହୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 27 ମି. ଏବଂ ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନ 16 ମିଟର ।

(iii) ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଯୋଗଫଳ 75 ସେ.ମି. ଏବଂ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା = 24 ସେ.ମି. ।

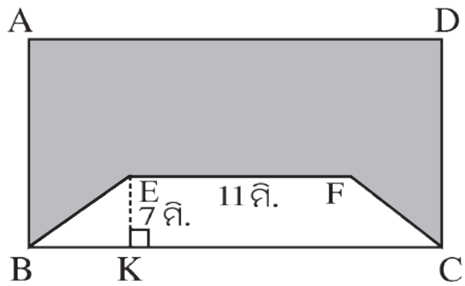
2. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 150 ବ.ମି. ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା 5 ମି. । ଏହାର ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନ୍ତର 6 ମି. ହେଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନ୍ତର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 3840 ବର୍ଗମିଟର । ଏହାର ଉଚ୍ଚତା 48 ମି. । ଏହାର ସମାନ୍ତର ବାହୁ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ବାହୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଦୁଇଟିକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 41 ସେ.ମି. ଓ 57 ସେ.ମି. । ଏହାର ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ଅସମାନ୍ତର ବାହୁ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ, ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଏବଂ ଅନ୍ୟଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 20 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 24 ମି. ଓ 80 ମି. । ଏହାର ଅନ୍ୟ ବାହୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 36 ମି. ହେଲେ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ABCD ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର । $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$, $\overline{EK} \perp \overline{BC}$, AD = 15 ମି., EK = 7 ମି., EF = 11 ମି. ଓ ଛାୟାଙ୍କିତ ଅଂଶର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 89 ବ.ମି. ହେଲେ $\overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



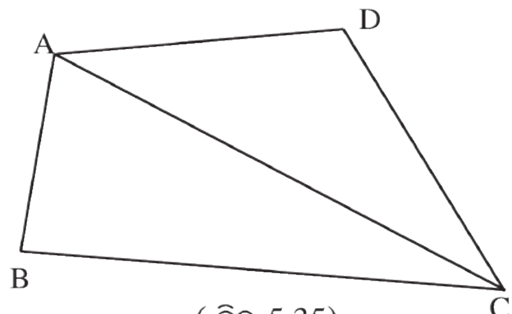
(ଚିତ୍ର 5.34)

7. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର ପରିସୀମା 82 ମି. । ଏହାର ସମାନ୍ତର ବାହୁ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ବାହୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 20 ମି. । ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା 7 ମି. ହେଲେ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5.6 ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ :

ସାଧାରଣ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ପାଇଁ କୌଣସି ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସୂତ୍ର ନାହିଁ । ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜ ତାହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱାରା ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜରେ ପରିଣତ ହୁଏ, ସେହି ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସଙ୍ଗେ ସମାନ ।

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ABCD ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜ । ଏହାର ଏକ କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$, ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ ΔABC ଓ ΔADC ରେ ବିଭକ୍ତ କରେ । ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଅଟେ ।



(ଚିତ୍ର 5.35)

(A) ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏବଂ ସେହି କର୍ଣ୍ଣ ପ୍ରତି ତାହାର ସମ୍ମୁଖୀନ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣ ପ୍ରତି ଏହାର ସମ୍ମୁଖୀନ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁ A ଓ C ରୁ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AE}$ ଓ $\overline{CF}$ ଲମ୍ବ ।

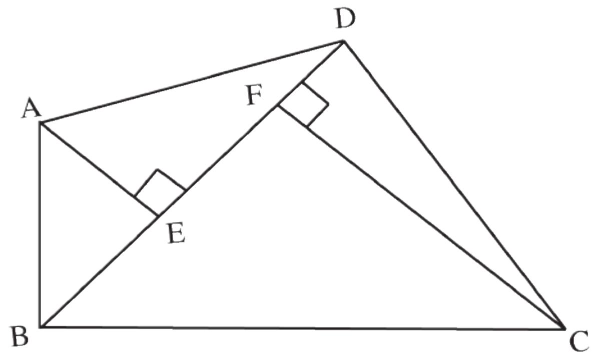
$\therefore$ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= Δ ABD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + Δ BCD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= \frac{1}{2} \times BD \times AE + \frac{1}{2} \times BD \times CF$

$= \frac{1}{2} BD (AE + CF)$

ଅର୍ଥାତ୍,



(ଚିତ୍ର 5.36)

ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ x ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ଉକ୍ତ କର୍ଣ୍ଣର ସମ୍ମୁଖୀନ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟରୁ ସେହି କର୍ଣ୍ଣ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ।

(B) ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୋଇଥିବା କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ଚିତ୍ର 5.37 ରେ ଥିବା ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ରେ କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ । ସେ ଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ।

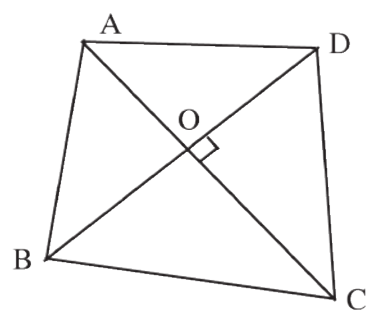
ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ =

ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + ΔADC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= \frac{1}{2} \times AC \times BO + \frac{1}{2} \times AC \times DO$

$= \frac{1}{2} AC (BO + DO) = \frac{1}{2} AC \times BD$

ଅର୍ଥାତ୍

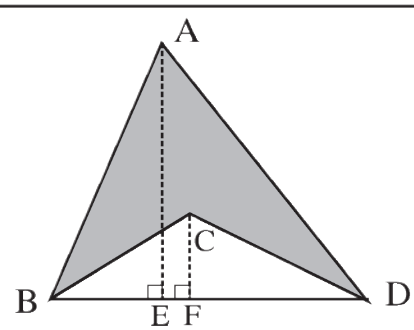


(ଚିତ୍ର 5.37)

କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୋଇଥିଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ x କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳ ।

(C) ଏକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରକାର ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ଚିତ୍ର 5.38 ରେ ଥିବା ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣର କୌଣସି ଅଂଶ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ନୁହେଁ । ତେଣୁ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି ନାହିଁ । ଚିତ୍ରରୁ ଜଣାପଡ଼େ ଯେ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ΔABD ଓ ΔBCD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନ୍ତର ଅଟେ । A ଓ C ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{BD}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AE}$ ଓ $\overline{CF}$ ।



(ଚିତ୍ର 5.38)

ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ΔABD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ – ΔBCD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$$= \frac{1}{2} \times BD \times AE - \frac{1}{2} \times BD \times CF$$

$$= \frac{1}{2} \times BD\,(AE - CF)$$

ଅର୍ଥାତ୍,

> **ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ ବହିଃସ୍ଥ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ଉକ୍ତ କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ସେହି କର୍ଣ୍ଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବିୟୋଗଫଳ ।**

ସମାହିତ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ

ଉଦାହରଣ – 1 : ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 12 ମି. ଏବଂ ଏହି କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ବହିଃସ୍ଥ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 6 ମି. ଓ 7 ମି. ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ଲମ୍ବ ଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି

= $\frac{1}{2}$ x 12 x (6 + 7) ବ.ମି. = 6 x 13 ବ.ମି. = 78 ବ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 2 : କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରଛେଦୀ ହୋଇ ନ ଥିବା ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 35 ସେ.ମି. ଏବଂ ଉକ୍ତ କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ଏହାର ସମ୍ମୁଖୀନ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 18 ସେ.ମି. ଓ 8 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଚତୁର୍ଭୁଜର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣ କ୍ଷେତ୍ରର ବହିଃସ୍ଥ ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= $\frac{1}{2}$ x ବହିଃସ୍ଥ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ଏହା ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନ୍ତରଫଳ ।

= $\frac{1}{2}$ x 35 x (18 – 8) ବର୍ଗ ସେ.ମି. = $\frac{1}{2}$ x 35 x 10 ବର୍ଗ ସେ.ମି. = 175 ବର୍ଗ ସେ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 3 : ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 75 ସେ.ମି. । ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 900 ବର୍ଗ ସେ.ମି. । ଏହି କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ଏହାର ସମ୍ମୁଖୀନ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟର 3 ଗୁଣ ହେଲେ, ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = x ସେ.ମି.

$\therefore$ ବୃହତ୍ତର ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 3x ସେ.ମି.

ଦତ୍ତ ଅଛି ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 75 ସେ.ମି.

$\therefore$ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ x କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ଉକ୍ତ କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି

$= \frac{1}{2}$ x 75 x (x+3x) ବ.ସେ.ମି.

$= \frac{1}{2}$ x 75 x 4x ବ.ସେ.ମି. = 150x ବ.ସେ.ମି.

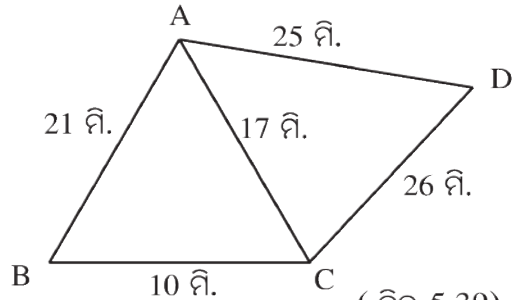
ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ, $150x = 900 \Rightarrow x = 6$

$\therefore$ ଗୋଟିଏ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 6 ସେ.ମି.

ଅନ୍ୟ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 6 x 3 ସେ.ମି. = 18 ସେ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 4 :

ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 17 ମି., AB = 21 ମି, BC = 10 ମି., CD = 26 ମି. ଏବଂ DA = 25 ମି. । ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର 5.39)

ସମାଧାନ : Δ ABC ର ଅର୍ଦ୍ଧପରିସୀମା $= s = \frac{10+17+21}{2}$ ମି. = 24 ମି.

Δ ABCର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)}$ ବ.ସେ.ମି.

$= \sqrt{24 \times 14 \times 7 \times 3}$ ବ.ସେ.ମି.= $\sqrt{3 \times 4 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 3}$ ବ.ମି.

= (3 x 2 x 2 x 7) ବ.ମି. = 84 ବ.ମି. ।

Δ ACD ର ଅର୍ଦ୍ଧପରିସୀମା $= s = \frac{17+25+26}{2}$ ମି. = 34 ମି.

Δ ACD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{34(34-17)(34-25)(34-26)}$ ବ.ସେ.ମି.

$= \sqrt{34 \times 17 \times 9 \times 8}$ ବ.ସେ.ମି.= $\sqrt{17 \times 2 \times 17 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2}$ ବ.ମି.

= (17 x 2 x 3 x 2) ବ.ମି. = 204 ବ.ମି. ।

$\therefore$ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + Δ ACD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= (84 + 204) ବ.ମି.= 288 ବ.ମି. ।

ଉଦାହରଣ – 5 : ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 36 ଡେସି.ମି. ଓ 21 ଡେସି.ମି. । କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $\because$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରନ୍ତି,

$\therefore$ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ x କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳ

$= \frac{1}{2}$ x 36 x 21 ବର୍ଗ ସେ.ମି. = 378 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ।

ଅନୁଶୀଳନୀ – 5 (h)

1. ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 78 ସେ.ମି. ଏବଂ ଏହି କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ଏହାର ସମ୍ମୁଖୀନ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 23 ସେ.ମି. ଓ 42 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରଚ୍ଛେଦୀ ହୋଇନଥିବା ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 43 ସେ.ମି. ଏବଂ ଉକ୍ତ କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ଏହା ସମ୍ମୁଖୀନ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 19 ସେ.ମି. ଓ 9 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 40 ଡେସି.ମି. ଓ 45 ଡେସି.ମି. ହେଲେ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି 50 ମିଟର ଓ ସେମାନଙ୍କ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ସମକୋଣ । ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟର 4 ଗୁଣ ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

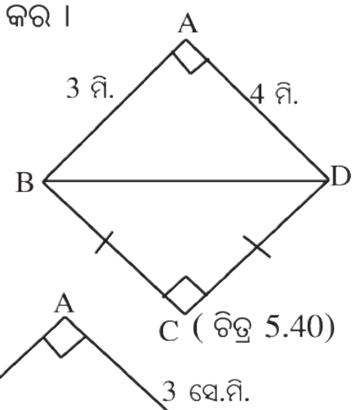
5. ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁଗୁଡ଼ିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 16 ସେ.ମି., 30 ସେ.ମି, 50 ସେ.ମି. ଓ 52 ସେ.ମି. ଏବଂ ପ୍ରଥମ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣଟି ସମକୋଣ । ଚତୁର୍ଭୁଜଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜର ଗୋଟିଏ କୋଣ ସମକୋଣ । ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 12 ମି. ଓ 16ମି. ଏବଂ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନ୍ୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପ୍ରତ୍ୟେକେ 26 ମି. ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର AB = 75 ସେ.ମି., BC = 78 ସେ.ମି., CD = 63 ସେ.ମି., DA = 30 ସେ.ମି. ଏବଂ AC = 51 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

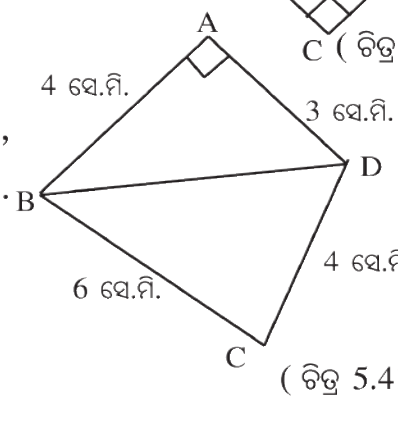
8. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର AB = 21 ସେ.ମି., BC = 16 ସେ.ମି., AD = 20 ସେ.ମି. ଓ $m\angle BAD = m\angle CBD = 90^0$ ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

9. ଚିତ୍ର 5.40 ରେ ABCD ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜ । BC = CD ହେଲେ, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CD}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏବଂ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର 5.40)

10. ଚିତ୍ର 5.41 ରେ ∠BAD ଏକ ସମକୋଣ । AB = 4 ସେ.ମି., AD = 3 ସେ.ମି., DC = 4 ସେ.ମି. ଏବଂ BC = 6 ସେ.ମି. ହେଲେ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର 5.41)

5.7 ଘନପଦାର୍ଥ ଏବଂ ଏହାର ଆକୃତି (Solid and its shape) :

ତୁମେ ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରୁ କିଛି ସାମତଳିକ ଚିତ୍ର; ଯଥା– ତ୍ରିଭୁଜ, ଆୟତଚିତ୍ର, ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର, ବୃତ୍ତ ଆଦି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଜାଣିଛ । ଏହି ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ଏକ ସମତଳରେ ଅଙ୍କିତ ହୋଇପାରନ୍ତି । ତେଣୁ ସେଗୁଡ଼ିକ 2-D ବା ଦ୍ୱି–ମାତ୍ରିକ (Two - Dimentional) ଚିତ୍ର କୁହାଯାଏ । ଅନ୍ୟପକ୍ଷରେ ସମଘନ, ଆୟତଘନ, ପ୍ରିଜିମ୍, ସିଲିଣ୍ଡର, କୋନ୍, ଗୋଲକ ଆଦି ବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକୁ ଏକ ସମତଳରେ ସୀମିତ ନଥାନ୍ତି ଅର୍ଥାତ୍ ଏଗୁଡ଼ିକୁ ଏକ ସମତଳରେ ରଖିଲେ ଏହାର କେବଳ ଗୋଟିଏ ଅଂଶ ସମତଳରେ ରହି ଅବଶିଷ୍ଟ ଅଂଶ ସମତଳର ବାହାରେ ରହେ । ଏ ବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକୁ ତ୍ରି–ମାତ୍ରିକ (Three- Dimentional) ବା 3-D ବସ୍ତୁ କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକୁ 'ଘନପଦାର୍ଥ' (Solid) ର ଆଖ୍ୟା ଦିଆଯାଇଥାଏ ।

ପରବର୍ତ୍ତୀ ଅନୁଚ୍ଛେଦଗୁଡ଼ିକରେ ଆମେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ତ୍ରି–ମାତ୍ରିକ ବସ୍ତୁ ବା ଘନବସ୍ତୁର ଚିତ୍ରକୁ ଏକ ସମତଳରେ ଆଙ୍କି ଶିଖିବା ସହ ଘନବସ୍ତୁର ଶୀର୍ଷ (Vertex), ଧାର (Edge) ଏବଂ ପାର୍ଶ୍ୱ (Face) ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଜାଣିବା । ଘନବସ୍ତୁ (ସମତଳ ପାର୍ଶ୍ୱବିଶିଷ୍ଟ)ର ଶୀର୍ଷ, ଧାର ଏବଂ ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟାକୁ ନେଇ **ଇଉଲର୍‌ଙ୍କ ସୂତ୍ର (Euler's Formula)**ର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କିପରି ହୋଇପାରିବ ସେ ବିଷୟରେ ମଧ୍ୟ ଅବଗତ ହେବା ।

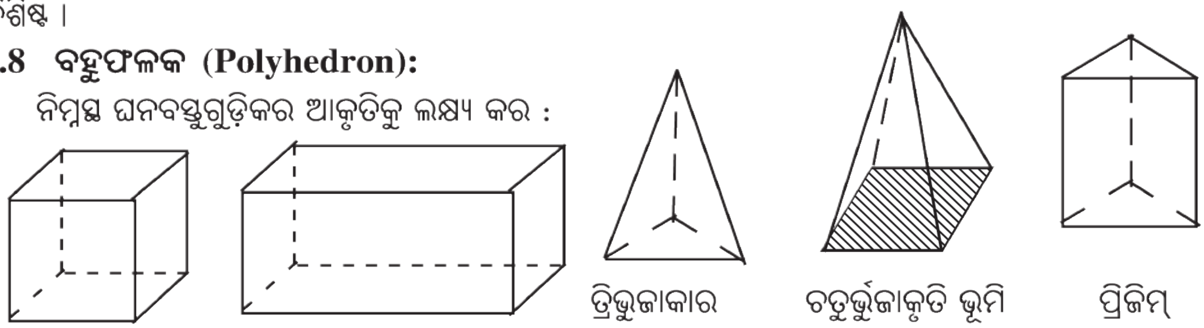
ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ଘନ ବସ୍ତୁର ବର୍ଗୀକରଣ

ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ଘନ : (a) ବହୁଫଳକ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ପୃଷ୍ଠ ସମତଳ) (b) ଅଣବହୁଫଳକ (ସମସ୍ତ ପୃଷ୍ଠ ସମତଳ ନୁହେଁ)

ବହୁଫଳକ : (a) ପ୍ରିଜମ୍ (ଭୂମି ଓ ଉପରପୃଷ୍ଠ ସର୍ବସମ କ୍ଷେତ୍ର) (b) ପିରାମିଡ୍ (ଭୂମି ବହୁଭୁଜ, ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠ ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ।

5.8 ବହୁଫଳକ (Polyhedron):

ନିମ୍ନସ୍ଥ ଘନବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକର ଆକୃତିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର :



(ଚିତ୍ର 5.42)

ଏହିସବୁ ତ୍ରି–ମାତ୍ରିକ (ଘନ) ବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକର ଚିତ୍ରକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଦେଖିବା ଯେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ବସ୍ତୁର କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବହୁଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ପୃଷ୍ଠ ରହିଛି ଯାହାକୁ ଆମେ ଘନ ବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକର ପାର୍ଶ୍ୱ (Face) ବୋଲି କହୁ । ଦୁଇଟି ପାର୍ଶ୍ୱର ମିଳନରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ଘନବସ୍ତୁର ଧାର (Edge) କୁହାଯାଏ । ପୁନଶ୍ଚ ଦୁଇ ବା ତତୋଽଧିକ ଧାରଗୁଡ଼ିକ ମିଳିତ ହୋଇ ଘନପଦାର୍ଥର ଶୀର୍ଷ (Vertex) ସୃଷ୍ଟି କରିଥା'ନ୍ତି । ଏହିପରି ଘନବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକୁ **ବହୁଫଳକ (Polyhedron)** କୁହାଯାଏ ।

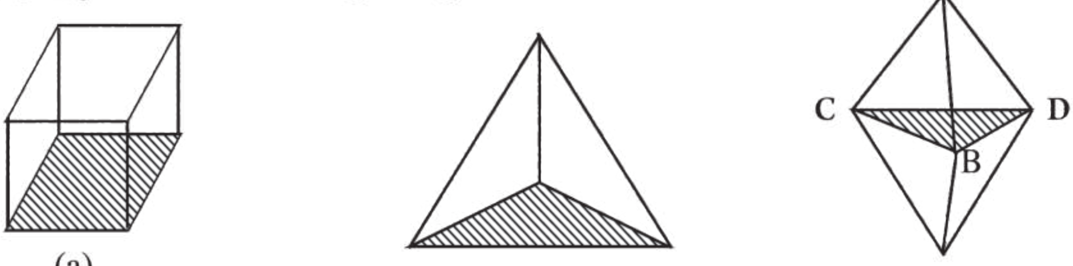
କିନ୍ତୁ ନିମ୍ନସ୍ଥ ଘନବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକର ଚିତ୍ରରୁ ଜଣାପଡ଼େ ଯେ ଏଗୁଡ଼ିକ ସମତଳ ଏବଂ ବକ୍ରତଳ ପୃଷ୍ଠବିଶିଷ୍ଟ ଘନବସ୍ତୁ ।

(ଚିତ୍ର 5.43)

ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରରେ କହିବାକୁ ଗଲେ ଏହି ଆକୃତିବିଶିଷ୍ଟ ଘନବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକର ସମସ୍ତ ପାର୍ଶ୍ୱ ସମତଳ ପୃଷ୍ଠବିଶିଷ୍ଟ ନୁହନ୍ତି । ତେଣୁ ଏଗୁଡ଼ିକୁ ବହୁଫଳକ (Polyhedron) କୁହାଯିବ ନାହିଁ ।

ଯଦି ଏକ ବହୁଫଳକର ପାର୍ଶ୍ୱଗୁଡ଼ିକ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ହୋଇଥାଏ ଏବଂ ସମାନ ସଂଖ୍ୟକ ପାର୍ଶ୍ୱ ମିଳିତ ହୋଇ ଘନବସ୍ତୁଟିର ଶୀର୍ଷ ସୃଷ୍ଟି କରୁଥା'ନ୍ତି ତେବେ ଉକ୍ତ ବହୁଫଳକକୁ **ସୁଷମ ବହୁଫଳକ** କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, **ସମଘନ** ଏବଂ **ଟେଟ୍ରାହେଡ୍ରନ୍** (ତ୍ରିଭୁଜାକାର ପିରାମିଡ୍, ଯାହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପାର୍ଶ୍ୱ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ) ପ୍ରଭୃତି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଫଳକ ।



(a) (b) (c)

(ଚିତ୍ର 5.44)

ଚିତ୍ର 5.44 (a) ଓ (b) ରେ ଘନବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକ ସମସ୍ତ ପାର୍ଶ୍ୱ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜ ଏବଂ ସମାନ ସଂଖ୍ୟକ ପାର୍ଶ୍ୱ ମଳିତ ହୋଇ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଶୀର୍ଷ ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଛି ।

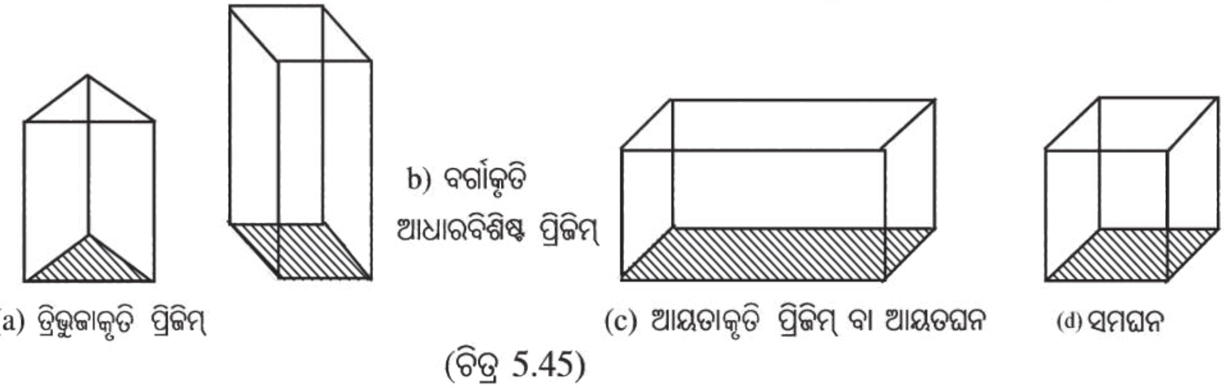
ଚିତ୍ର 5.44 (c) ରେ ଘନ ପଦାର୍ଥଟିର ସମସ୍ତ ପାର୍ଶ୍ୱ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜ; କିନ୍ତୁ A ଶୀର୍ଷ ତିନୋଟି ପାର୍ଶ୍ୱ ମିଳିତ ହୋଇ ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଥିବା ବେଳେ, ଚାରିଗୋଟି ପାର୍ଶ୍ୱ ମିଳିତ ହୋଇ B ଶୀର୍ଷ ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଛି ।

5.8.2 ବହୁଫଳକର ପ୍ରକାରଭେଦ :

ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ଯେତେଗୁଡ଼ିଏ ଘନପଦାର୍ଥ କଥା ଆଲୋଚନା କରିଥିଲେ ସେଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ କେତେକ ସମତଳ ପୃଷ୍ଠବିଶିଷ୍ଟ ଏବଂ କେତେକ ସମତଳ ଓ ବକ୍ରତଳ ଉଭୟ ପୃଷ୍ଠବିଶିଷ୍ଟ । ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ଘନବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକୁ ମୁଖ୍ୟତଃ ଦୁଇ ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କରିବା । ସେଗୁଡ଼ିକ ହେବ (i) ବହୁଫଳକ ଏବଂ (ii) ଅଣ-ବହୁଫଳକ ।

ଯେଉଁ ଘନବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକର ପାର୍ଶ୍ୱଗୁଡ଼ିକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବହୁଭୁଜ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ବହୁଫଳକ କୁହାଯାଏ, କିନ୍ତୁ ଯେଉଁ ଘନବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକର ସମସ୍ତ ପାର୍ଶ୍ୱ ବହୁଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ନୁହଁନ୍ତି, ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଅଣ-ବହୁଫଳକ ଘନବସ୍ତୁ କୁହାଯାଏ ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରରେ କହିଲେ ଅଣ-ବହୁଫଳକ ଘନବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକର ସମସ୍ତ ପାର୍ଶ୍ୱ ସମତଳ ପୃଷ୍ଠବିଶିଷ୍ଟ ନୁହନ୍ତି । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, କୋନ୍, ସିଲିଣ୍ଡର ଏବଂ ଗୋଲକ । ବହୁଫଳକର ଭୂମି ଏବଂ ପାର୍ଶ୍ୱଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରକାର ଭେଦରେ ବହୁଫଳକଗୁଡ଼ିକୁ ମୁଖ୍ୟତଃ ଦୁଇ ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କରାଯାଇଛି, ଯଥା- (1) ପ୍ରିଜିମ୍ (2) ପିରାମିଡ୍ ।

(1) ପ୍ରିଜିମ୍ (Prism) : ପ୍ରିଜିମ୍ ଏକ ବହୁଫଳକ, ଯାହାର ଭୂମି ଓ ଉପର ପାର୍ଶ୍ୱଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ (ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ) ବହୁଭୁଜ ଏବଂ ଅନ୍ୟପାର୍ଶ୍ୱଗୁଡ଼ିକ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ରବିଶିଷ୍ଟ । ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମି ବା ଆଧାର ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ

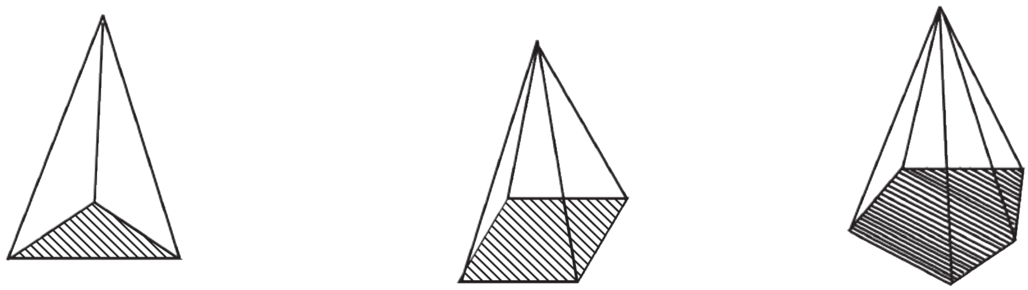


(a) ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି ପ୍ରିଜିମ୍ (c) ଆୟତାକୃତି ପ୍ରିଜିମ୍ ବା ଆୟତଘନ (d) ସମଘନ

(ଚିତ୍ର 5.45)

ଚତୁର୍ଭୁଜାକୃତି , ପଞ୍ଚଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ଆଦି ହୋଇପାରେ । ଆଧାର ଅନୁଯାୟୀ ପ୍ରିଜିମ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ନାମକରଣ କରାଯାଇଥାଏ ।

(2) ପିରାମିଡ୍ (Pyramid) : ପିରାମିଡ୍ ଏକ ବହୁଫଳକ ଯାହାର ଭୂମି ଏକ ବହୁଭୁଜ ଏବଂ ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠ (Lateral surfaces) ଗୁଡ଼ିକ ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ଓ ଏକ ସାଧାରଣ ଶୀର୍ଷ (Vertex) ବିଶଷ୍ଟ ହୋଇଥାଏ ।



(a) ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ପିରାମିଡ୍ (b) ଚତୁର୍ଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ପିରାମିଡ୍ (c) ପଞ୍ଚଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ପିରାମିଡ୍

(ଚିତ୍ର 5.46)

ମନେରଖ : ଏକ ପ୍ରିଜିମ୍ କିମ୍ବା ଏକ ପିରାମିଡ୍‌ର ବିଶେଷ ନାମକରଣ ଏହାର ଭୂମିକୁ ଆଧାର କରି ହୋଇଥାଏ ।

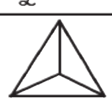
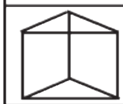
ବି.ଦ୍ର.: 1. ଯେଉଁ ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ପିରାମିଡ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପାର୍ଶ୍ୱ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ,ତାହାକୁ ଟେଟ୍ରାହେଡ୍ରନ୍ (Tetrahedron) କୁହାଯାଏ ।

2. ଯେଉଁ ବର୍ଗାକୃତି ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପାର୍ଶ୍ୱ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର, ତାହାକୁ ସମଘନ (cube) କୁହାଯାଏ ।

5.9 ବହୁଫଳକର ଶୀର୍ଷ, ଧାର ଏବଂ ପାର୍ଶ୍ୱ (Vertices, Faces and Edges of a polyhedron):

ପ୍ରତ୍ୟେକ ବହୁଫଳକ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବହୁଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ରକୁ ନେଇ ଗଠିତ ଯାହାକୁ ବହୁଫଳକର **ପାର୍ଶ୍ୱ (Face)** କୁହାଯାଏ । ପାର୍ଶ୍ୱଗୁଡ଼ିକର ଛେଦ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଯାହାକୁ ବହୁଫଳକର **ଧାର (Edge)** କୁହାଯାଏ ।ଦୁଇରୁ ଅଧିକ ଧାରର ଛେଦରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ, ଯାହାକୁ ବହୁଫଳକର **ଶୀଷ (Vertex)** କୁହାଯାଏ ।

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ପିରାମିଡ୍ ଏବଂ ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଶୀର୍ଷ, ପାର୍ଶ୍ୱ ଏବଂ ଧାର ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କରିବା ।

ବହୁଫଳକ	(ଶୀର୍ଷସଂଖ୍ୟା V)	(ପାର୍ଶ୍ୱସଂଖ୍ୟା F)	(ଧାରସଂଖ୍ୟା E)
 ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ପିରାମିଡ୍	4	4	6
 ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ପ୍ରିଜିମ୍	6	5	9

ସାରଣୀ - 5.2

5.9.1 ଇଉଲରଙ୍କର ସୂତ୍ର (Euler's Formula):

ସ୍ୱିସ୍ ଗଣିତଜ୍ଞ **ଲିଓନାର୍ଡ଼ ଇଉଲର୍ (Leonard Euler, 1707-1783)** ଗୋଟିଏ ବହୁଫଳକର ଶୀର୍ଷ (V), ପାର୍ଶ୍ୱ (F), ଏବଂ ଧାର (E) ସଂଖ୍ୟାକୁ ନେଇ ପ୍ରଥମ କରି ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଏକ ଥିବା ସମ୍ବନ୍ଧକୁ ସୂତ୍ର ଆକାରରେ ପ୍ରଣୟନ କରିଥିଲେ । ସେ ସୂତ୍ରଟି ହେଲା, **V+F – E = 2**

ନିମ୍ନ ସାରଣୀକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର । ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ବହୁଫଳକର ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକରୁ ବହୁଫଳକର ଶୀର୍ଷ, ପାର୍ଶ୍ୱ ଏବଂ ଧାର ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କରାଯାଇ ସାରଣୀରେ ସନ୍ନିବେଶିତ କରାଯାଇଛି । ସାରଣୀରୁ ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ **V + F – E = 2** ସୂତ୍ରର ସତ୍ୟତା ନିରୂପଣ କରାଯାଇଛି ।

ବହୁଫଳକ	ଶୀର୍ଷ ସଂଖ୍ୟା (V)	ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟା (F)	ଧାର ସଂଖ୍ୟା (E)	V+ F – E
ଟେଟ୍ରାହେଡ୍ରନ୍	4	4	6	2
ଆୟତଘନ	8	6	12	2
ପଞ୍ଚଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟପ୍ରିଜିମ୍	10	7	15	2
ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ପ୍ରିଜିମ୍	6	5	9	2
ଚତୁର୍ଭୁଜାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ପିରାମିଡ୍	5	5	8	2

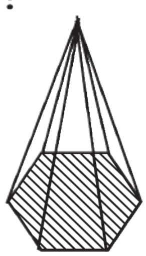
ସାରଣୀ – 5.3

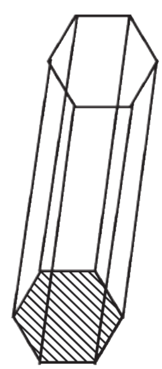
ଉପରିସ୍ଥ ସାରଣୀକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କଲେ ପାଇବା–

ମନେରଖ :
1. (i) ଗୋଟିଏ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଶୀର୍ଷସଂଖ୍ୟା, ଏହାର ଭୂମିର ବାହୁ ସଂଖ୍ୟାର ଦୁଇଗୁଣ ।
   (ii) ଗୋଟିଏ ପିରାମିଡ୍‌ର ଶୀର୍ଷସଂଖ୍ୟା, ଏହାର ଭୂମିର ବାହୁ ସଂଖ୍ୟାରୁ 1 ଅଧିକ ।
2. (i) ଗୋଟିଏ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ପାର୍ଶ୍ୱସଂଖ୍ୟା, ଏହାର ଭୂମିର ବାହୁ ସଂଖ୍ୟାଠାରୁ 2 ଅଧିକ
   (ii) ଗୋଟିଏ ପିରାମିଡ୍‌ର ପାର୍ଶ୍ୱସଂଖ୍ୟା, ଏହାର ଭୂମିର ବାହୁସଂଖ୍ୟାରୁ 1 ଅଧିକ ।

ଉଦାହରଣ -1: ନିମ୍ନଲିଖିତ ବହୁଫଳକରେ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ସଂଖ୍ୟା, ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଧାର ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କରି V + F – E = 2 ସୂତ୍ରର ସତ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ :





(i) ଷଡ଼ଭୁଜାକାର ପିରାମିଡ୍ (ଚିତ୍ର 5.47) (ii) ଷଡ଼ଭୁଜାକାର ପ୍ରିଜିମ୍

ଚିତ୍ର(i)ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ବହୁଫଳକର ଶୀର୍ଷସଂଖ୍ୟା (V) = 7, ପାର୍ଶ୍ୱସଂଖ୍ୟା (F) = 7 ଏବଂ
ଧାର ସଂଖ୍ୟା (E) = 12, $\therefore$ V + F - E = 7 + 7 – 12 = 2

ଚିତ୍ର (ii) ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ବହୁଫଳକର ଶୀର୍ଷସଂଖ୍ୟା (V) = 12

ପାର୍ଶ୍ୱସଂଖ୍ୟା (F) = 8 ଏବଂ ଧାର ସଂଖ୍ୟା (E) = 18

$\therefore$ V + F – E = 12 + 8 – 18 = 2

ବି.ଦ୍ର.: ଆବଶ୍ୟକ ବେଳେ ବହୁଫଳକର V, F ଏବଂ E ସ୍ଥିର କରିବା ସମୟ ସମୟରେ ବଡ଼ କଷ୍ଟକର ହୋଇଥାଏ । କାରଣ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବହୁଫଳକର ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରିବା କଷ୍ଟସାଧ; ଯେପରି 10 ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ ବହୁଭୁଜବିଶିଷ୍ଟ ପିରାମିଡ୍, 12 ବାହୁ ବହୁଭୁଜବିଶିଷ୍ଟ ପ୍ରିଜିମ୍ ଇତ୍ୟାଦିର ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କଷ୍ଟସାଧ । ବିନା ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନରେ ଯେକୌଣସି ବହୁଫଳକର ଶୀର୍ଷ ସଂଖ୍ୟା (V), ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟା (F) ଏବଂ ଧାର ସଂଖ୍ୟା (E) ସ୍ଥିର କରିହେବ । ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ଦେଖ ।

ଉଦାହରଣ -2: ଗୋଟିଏ ଅଷ୍ଟଭୁଜାକାର ବହୁଭୁଜବିଶିଷ୍ଟ ପିରାମିଡ୍‌ର ଶୀର୍ଷ ସଂଖ୍ୟା, ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଧାର ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।

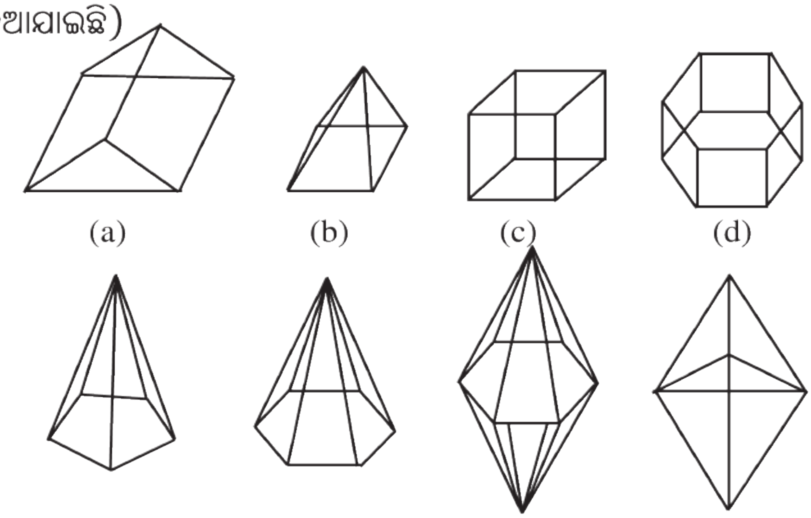
ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ବହୁଫଳକର ଶୀର୍ଷ ସଂଖ୍ୟା (V) = ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା + 1 = 8 + 1 = 9

ପାର୍ଶ୍ୱସଂଖ୍ୟା (F) = ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା + 1 = 8 + 1 = 9

ଧାର ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କରିବା ପାଇଁ V + F – E = 2 ର ସାହାଯ୍ୟ ନେବା ।

$\therefore 9 + 9 - E = 2 \Rightarrow E = 18 - 2 = 16$ $\therefore$ ବହୁଭୁଜର ଧାର ସଂଖ୍ୟା (E) = 16

ନିଜେ କର ନିମ୍ନଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରି ସାରଣୀର ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ଗୁଡ଼ିକୁ ପୂରଣ କର । (ନିମ୍ନରେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବହୁଫଳକର ଚିତ୍ର ଦିଆଯାଇଛି)



(a) (b) (c) (d)

(e) (f) (g) (h)

ବହୁଫଳକ	E	V	F	V + F – E
(a)				
(b)				
(c)				
(d)				
(e)				
(f)				

ସାରଣୀ - 5.4

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (i)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(a) ଗୋଟିଏ ଷଡ଼ଭୁଜାକାର ପିରାମିଡ୍‌ର ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟା .... ।

(b) ଟେଟ୍ରାହେଡ୍ରନ୍‌ର ଶୀର୍ଷ ସଂଖ୍ୟା ..... ।

(c) ଆଠଗୋଟି ଧାର ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ପିରାମିଡ୍‌ର ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟା .... ।

(d) ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜାକାର ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଶୀର୍ଷ ସଂଖ୍ୟା .... ।

(e) ଏକ ପଞ୍ଚଭୁଜାକାର ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଧାର ସଂଖ୍ୟା .... ।

(f) 'n' ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ ବହୁଭୁଜାକୃତି ପିରାମିଡ୍‌ର ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟା .... ।

(g) 'n' ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ ବହୁଭୁଜାକୃତି ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଶୀର୍ଷ ସଂଖ୍ୟା....... ।

(h) ଏକ ବହୁଫଳକର ଧାର ସଂଖ୍ୟା 12, ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟା 6 ହେଲେ, ଶୀର୍ଷ ସଂଖ୍ୟା........ ।

(i) ଏକ ବହୁଫଳକର ଧାର ସଂଖ୍ୟା 30 ଏବଂ ଶୀର୍ଷ ସଂଖ୍ୟା 20 ହେଲେ, ପାର୍ଶ୍ୱସଂଖ୍ୟା ....।

(j) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜାକାର ପିରାମିଡ୍‌ର ଶୀର୍ଷସଂଖ୍ୟା ...., ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟା ...., ଧାର ସଂଖ୍ୟା .... ।

2. ଗୋଟିଏ ବହୁଫଳକର ଶୀର୍ଷ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟା ଯଥାକ୍ରମେ 7 ଓ 10 ହେଲେ, ଉକ୍ତ ବହୁଫଳକର ଧାର ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

3. ଗୋଟିଏ ବହୁଫଳକର ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଧାର ସଂଖ୍ୟା ଯଥାକ୍ରମେ 6 ଓ 12 ହେଲେ ଶୀର୍ଷ ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

4. ଗୋଟିଏ ବର୍ଗାକୃତି ପ୍ରିଜିମ୍ ଏବଂ ସମଘନ ମଧ୍ୟରେ କେଉଁ ପାର୍ଥକ୍ୟ ପରିଲକ୍ଷିତ ହୁଏ, ଚିତ୍ର ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଅ ।

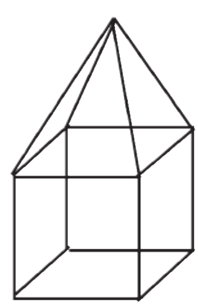
5. ବହୁଫଳକ ଯେକୌଣସି ଏକ ଉଦାହରଣ ନେଇ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଶୀର୍ଷ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି, ଧାର ସଂଖ୍ୟାଠାରୁ 2 ଅଧିକ ।

6. ଇଉଲର୍ (Euler) ଙ୍କ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗରେ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଥିବା ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନଗୁଡ଼ିକୁ ପୂରଣ କର ।

ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟା		5	20
ଶୀର୍ଷ ସଂଖ୍ୟା	6		12
ଧାର ସଂଖ୍ୟା	12	9	

ସାରଣୀ - 5.5

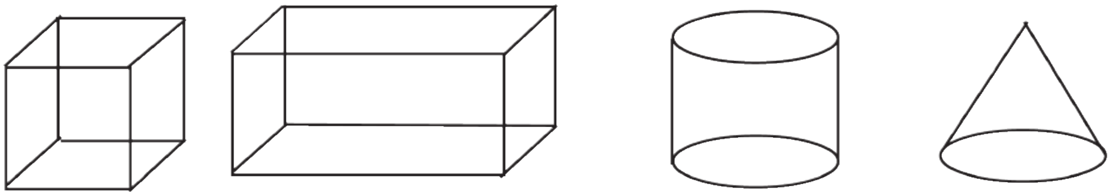
7. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରୁ ଶୀର୍ଷ, ଧାର ଏବଂ ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କରି ଇଉଲର୍ (Euler) ଙ୍କ ସୂତ୍ରର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷଣ କର ।



(ଚିତ୍ର 5.48)

5.10 ଘନବସ୍ତୁ (ବହୁଫଳକ)ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Surface Area of a Polyhedron) :

ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ଆମେ ବହୁଫଳକର ଧାରଣା ପାଇଛେ । ସମତଳ ପାର୍ଶ୍ୱବିଶିଷ୍ଟ ଏହି ବହୁଫଳକର ଆକୃତି ସହ ମଧ୍ୟ ପରିଚିତ ହୋଇସାରିଛେ । ସମଘନ, ଆୟତଘନ ପ୍ରଭୃତି ବହୁଫଳକର ପାର୍ଶ୍ୱ, ସାମତଳିକ ପୃଷ୍ଠ ହୋଇଥିବା ବେଳେ ସିଲିଣ୍ଡର, କୋନ୍ ପ୍ରଭୃତି ଘନପଦାର୍ଥ (ଅଣବହୁଫଳକ)ଗୁଡ଼ିକର ପାର୍ଶ୍ୱ ବକ୍ରତଳବିଶିଷ୍ଟ ।



(ବହୁଫଳକ) (ଚିତ୍ର 5.49) (ଅଣ ବହୁଫଳକ)

ଆୟତଘନ ଓ ସମଘନ ଭଳି ତ୍ରି–ମାତ୍ରିକ (Three-Dimensional ବା 3-D) ବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକର ସୀମାବଦ୍ଧ ତଳ ବା ପାର୍ଶ୍ୱକୁ କ୍ଷେତ୍ର କୁହାଯାଏ ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପାର୍ଶ୍ୱର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଥାଏ ।

ଯେହେତୁ ପାର୍ଶ୍ୱ, ଦ୍ୱି–ମାତ୍ରିକ (Two-Dimensional ବା 2-D) ତେଣୁ ପାର୍ଶ୍ୱର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ମାତ୍ରା (ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ) ଜାଣିବାର ଆବଶ୍ୟକତା ଥାଏ ।

5.10.1 କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ମାପ :

(i) କ୍ଷେତ୍ରକୁ ମାପିବା ପାଇଁ ପ୍ରଥମ ପର୍ଯ୍ୟାୟଟି ହେଉଛି ମାପର ଏକକ ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କରିବା । ଯେଉଁ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏକ ଏକକ, ତାହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳକୁ ଏକ ବର୍ଗ ଏକକ ଭାବେ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଏ । ଯଥା – 1 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ଅଟେ । ସେହିପରି 1 ମି. ଦୀର୍ଘ ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1 ବ.ମି. ।

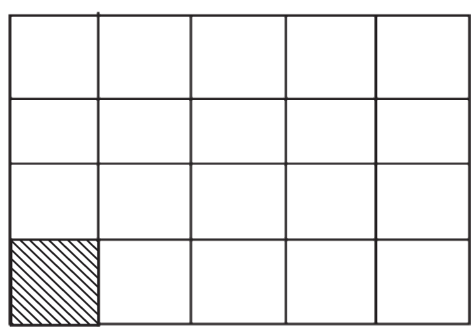
(ii) ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ମଧ୍ୟରେ 1 ଏକକ ବ୍ୟବଧାନରେ ଏହାର ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ରେଖାମାନ ଟାଣି ଏହାକୁ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ଏକକ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରରେ ପରିଣତ କରାଯାଏ । ଏହି କ୍ଷୁଦ୍ର ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରକୁ ଗଣିବା ଦ୍ୱାରା ଯେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ମିଳେ, ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥର ଗୁଣଫଳରୁ ସେହି ସଂଖ୍ୟା ମିଳେ । ଯଥା – 5 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ 4 ସେ.ମି. ପ୍ରସ୍ଥବିଶିଷ୍ଟ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ମଧ୍ୟରେ 1 ସେ.ମି. ବ୍ୟବଧାନରେ ଏହାର ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର କରି ସରଳରେଖା ଟାଣିବା ଦ୍ୱାରା ଦେଖାଯାଏ ଯେ, ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ରଟି 20 ଗୋଟି 1 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରରେ ବିଭକ୍ତ ହୋଇଛି । ଚିତ୍ରରୁ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ତ ସହ ସଂପୃକ୍ତ ସଂଖ୍ୟା 5 ଓ 4 ରୁ 20 ମିଳିଲା । ଏପରି ଅନୁଧ୍ୟାନରୁ ଆମେ ଜାଣି ପାରିବା ଯେ, ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥର ଗୁଣଫଳ ଅଟେ ।

ଅର୍ଥାତ୍ 20 ବର୍ଗସେ.ମି. = 5 ସେ.ମି. x 4 ସେ.ମି.

∴ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ

ଯଥାକ୍ରମେ l ଏକକ ଓ b ଏକକ ହେଲେ

ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = (ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ପ୍ରସ୍ଥ) ବ. ଏକକ



(ଚିତ୍ର 5.50)

$= l \times b$ ବ. ଏକକ ଓ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ a ଏକକ ହେଲେ

ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = (ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ)^2 ବ. ଏକକ = a^2 ବ. ଏକକ

ବି.ଦ୍ର.: ଉକ୍ତ ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ କେବଳ ଆୟତାକାର ଓ ବର୍ଗାକାର ପ୍ରିଜିମ୍ ଅର୍ଥାତ୍ ଆୟତଘନ ଓ ସମଘନର ପୃଷ୍ଠତଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

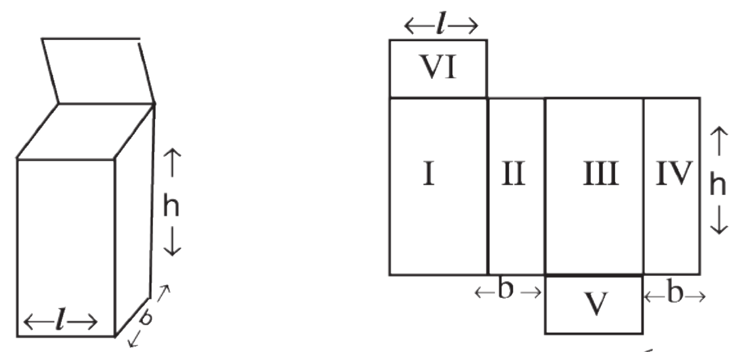
ପ୍ରକାଶ ଥାଉକି ସମଘନର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପାର୍ଶ୍ୱ ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ଏବଂ ଆୟତଘନର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପାର୍ଶ୍ୱ ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ର; କାରଣ ସମଘନ ଓ ଆୟତଘନ ଯଥାକ୍ରମେ ବର୍ଗାକୃତି ଏବଂ ଆୟତାକୃତି ପ୍ରିଜିମ୍ । ଏଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବହୁଫଳକ ।

5.10.2 ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Surface Area) :

ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନାକୃତି ଘରକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର । ଘର ଭିତକୁ ଯାଅ । ଯେଉଁଠାରେ ତୁମେ ଘରର ଛାତ, ଚଟାଣ ବ୍ୟତୀତ ଘରର ଚାରୋଟି କାନ୍ଥ ଦେଖିବ । ଘରର ଛାତ ଓ ଚଟାଣ ବ୍ୟତୀତ ଘରର ଚାରିପାର୍ଶ୍ୱ (କାନ୍ଥ)କୁ ଆମେ ଘରର ପାର୍ଶ୍ୱତଳ କହିବା ଏବଂ ଏ ସମସ୍ତର ମାପକୁ ପାର୍ଶ୍ୱତଳ ବା ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କହିବା ।

ସେହିପରି ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନାକୃତି ବାକ୍ସର ଢାଙ୍କୁଣୀ ଓ ବାକ୍ସର ତଳଭାଗକୁ ଛାଡ଼ି ଦେଲେ ବାକ୍ସର ଚାରୋଟି ପାର୍ଶ୍ୱ ତଳକୁ ଦେଖିବା । ଘରର ଚାରିକାନ୍ଥକୁ ଚୂନ ଦେବା, ବାକ୍ସର ଭିତର ପାଖକୁ ରଙ୍ଗ କରିବା ଇତ୍ୟାଦିର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡ଼େ । ସେହି ସମୟରେ ଆମେ ପାର୍ଶ୍ୱଗୁଡ଼ିକର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଜାଣିବା ଦରକାର । କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଜାଣିବା ଦ୍ୱାରା ଚୂନ ବା ରଙ୍ଗ ପରିମାଣ ଏବଂ ସେଥିପାଇଁ ଆନୁଷଂଗିକ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ କଳନା କରିବା ସହଜ ହୋଇଥାଏ ।

ଆସ ଆୟତଘନାକୃତି ବାକ୍ସଟିର ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏବଂ ଏହାର ସମସ୍ତ ପୃଷ୍ଠଗୁଡ଼ିକର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କିପରି ସ୍ଥିର କରିବା ତାକୁ ବୁଝିବା ।



h = ବାକ୍ସର ଉଚ୍ଚତା

l = ବାକ୍ସର ଦୈର୍ଘ୍ୟ

b = ବାକ୍ସର ପ୍ରସ୍ଥ

(i) ଆୟତଘନାକାର ବାକ୍ସ

(ii) ବାକ୍ସର ସମସ୍ତ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଖୋଲି ରଖାଯାଇଛି । ଯାହାକୁ ବାକ୍ସର ଏକ ଛାଞ୍ଚ ବା ନକ୍ସା (Net) କୁହାଯାଏ ।

(ଚିତ୍ର 5.51)

ବାକ୍ସର ସମୁଦାୟ ଛଅଗୋଟି ପାର୍ଶ୍ୱ ମଧ୍ୟରୁ ଦୁଇଟି ପାର୍ଶ୍ୱ (I) ଓ (III) ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ, ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟି ପାର୍ଶ୍ୱ (II) ଓ (IV) ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ଏବଂ ଭୂମି ଓ ଢାଙ୍କୁଣୀ (V) ଓ (VI)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ।

ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପାର୍ଶ୍ୱ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଆୟତଚିତ୍ର ହେତୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପାର୍ଶ୍ୱର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କରିହେବ ।

ଆୟତଘନାକାର ସମସ୍ତ ପାର୍ଶ୍ୱର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଅର୍ଥାତ୍ ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Whole surface area)

= (I) ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + (II) ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + (III) ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + (IV) ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + (V) ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + (VI)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= l \times h + b \times h + l \times h + b \times h + l \times b + l \times b$

$= 2(l \times h + b \times h + l \times b)$ .... (i)

ଏବଂ ଆୟତଘନର ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Lateral surface area)

= I ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + II ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + III ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + (IV)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= l \times h + b \times h + l \times h + b \times h$

$= 2l \times h + 2b \times h = 2h\,(l + b)$ ... (ii)

ସୂତ୍ର : ଆୟତଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 2(ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ଉଚ୍ଚତା + ପ୍ରସ୍ଥ x ଉଚ୍ଚତା + ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ପ୍ରସ୍ଥ)

ଏବଂ ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 2 x ଉଚ୍ଚତା (ଦୈର୍ଘ୍ୟ + ପ୍ରସ୍ଥ)

ଉଦାହରଣ -3 : କାଠ ବାକ୍ସଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା ଯଥାକ୍ରମେ 20 ସେ.ମି., 15 ସେ.ମି. ଏବଂ 10 ସେ.ମି. ହେଲେ, କାଠ ବାକ୍ସର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ l = 20 ସେ.ମି., b = 15 ସେ.ମି. ଏବଂ h = 10 ସେ.ମି.

ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= 2\,(lh + bh + lb)$

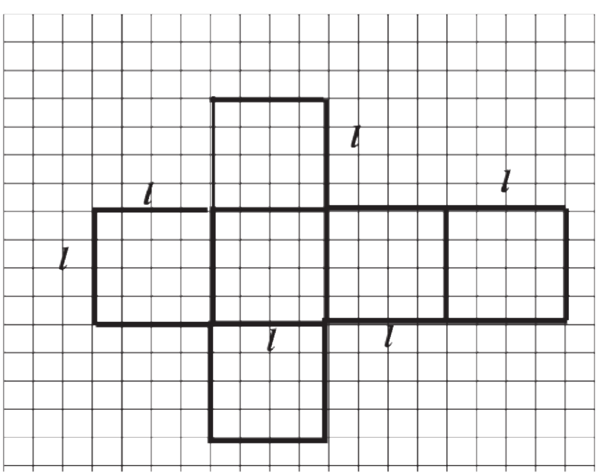
= 2(20 x10 + 15 x 10 + 20 x 15) ବ.ସେ.ମି.

= 2 (200 + 150 + 300) ବ.ସେ.ମି.

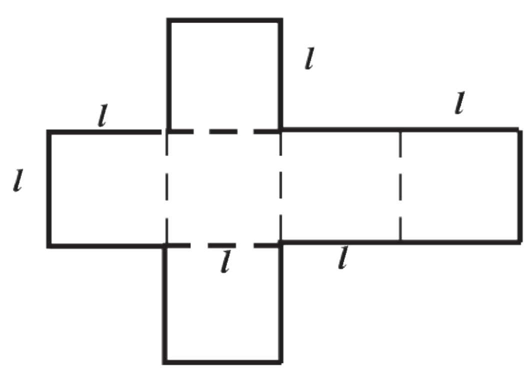
= 2 x 650 = 1300 ବ.ସେ.ମି.

ତୁମ ପାଇଁ କାମ

1. ଗୋଟିଏ ବର୍ଗକାଗଜ ବା ଗ୍ରାଫ୍ କାଗଜ ଆଣ । ଦେଖାଯାଉଥିବା ଭଳି ବର୍ଗକାଗଜରେ ଚିତ୍ର କର ଏବଂ କାଗଜରୁ ଏହାକୁ କାଟି ବାହାର କରି ଆଣ ।



(ଚିତ୍ର 5.52)

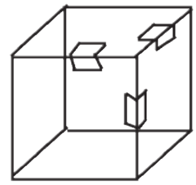


(ଚିତ୍ର 5.53)

2. ଡଟ୍ ଚିହ୍ନିତ ରେଖାଖଣ୍ଡଠାରେ କାଗଜଟିକୁ ଭାଙ୍ଗି ଗୋଟିଏ ବହୁଫଳକ ସୃଷ୍ଟି କର । ଅଠାକାଗଜ ଦ୍ୱାରା ଧାରଗୁଡ଼ିକୁ ଯୋଡ଼ି ରଖ । (ଚିତ୍ର 5.54 ଦେଖ)

3. କାଗଜଟିକୁ ଭାଙ୍ଗି ଅଠାକାଗଜରେ ଯୋଡ଼ିବା ଦ୍ୱାରା ଏହା କେଉଁ ଏକ ଘନପଦାର୍ଥରେ ପରିଣତ ହେଲା ?

(ଏକ ଫମ୍ପା ସମଘନାକୃତି ଘନପଦାର୍ଥରେ ପରିଣତ ହେଲା ।)



(ଚିତ୍ର 5.54)

4. ଦତ୍ତ ଛାଞ୍ଚ ବା ନକ୍ସା (Net) ରୁ ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା ଘନ ପଦାର୍ଥର ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପାର୍ଶ୍ୱର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

5. ସମଘନର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ l ଏକକ ହେଲେ, ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏବଂ ସମଗ୍ରପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

ବର୍ତ୍ତମାନ କହିପାରିବା କି ଏହାର ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= 4l^2$ ଏବଂ ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ$= 6l^2$?

ଉଦାହରଣ -4 : ଗୋଟିଏ ସମଘନର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 10 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଉକ୍ତ ସମଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏବଂ ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ସମଘନର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= l = 10$ ସେ.ମି.

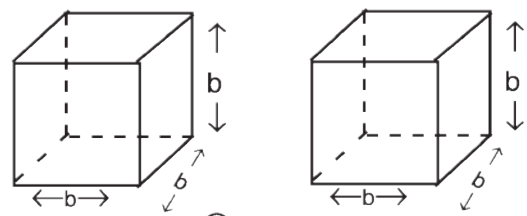
$\therefore$ $\boxed{\text{ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ} = 6l^2}$ $= 6 \times (10)^2 = 600$ ବ.ସେ.ମି.

$\boxed{\text{ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ} = 4l^2}$ $= 4(10)^2 = 400$ ବ.ସେ.ମି.

ନିଜେ କର

(1) ଦୁଇଟି ସମଘନ ନିଅ

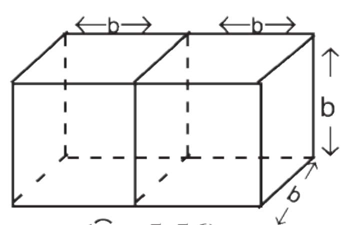
ଯାହାର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ b ଏକକ



(ଚିତ୍ର 5.55)

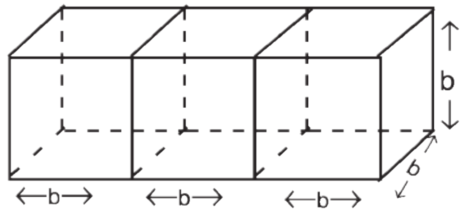
(2) ଦୁଇଟିଯାକ ସମଘନକୁ ଯୋଡ଼ି ଅନ୍ୟ ଏକ ଘନବସ୍ତୁ ସୃଷ୍ଟି କର ।

(3) ବର୍ତ୍ତମାନ ନୂତନ ଘନପଦାର୍ଥର ପୃଷ୍ଠମାନଙ୍କର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର 5.56)

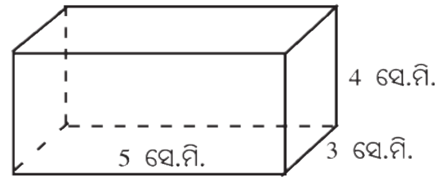
(4) ଏକାପରି ତିନୋଟି ସମଘନକୁ ଯୋଡ଼ି ଯେଉଁ ଘନପଦାର୍ଥ ସୃଷ୍ଟି ହେବ ତାହାର ମଧ୍ୟ ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର 5.57)

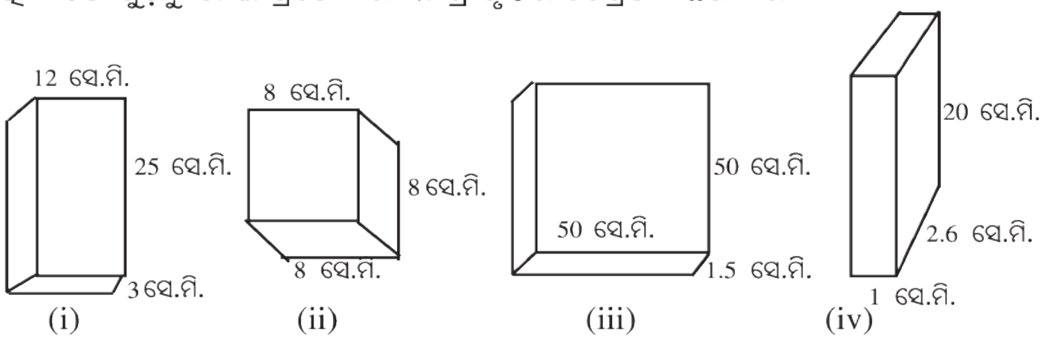
ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (j)

1. ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନର ଚିତ୍ର ପ୍ରଦର୍ଶିତ ହୋଇଛି । ଏହାର ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ନକ୍ସା (Net) ପ୍ରସ୍ତୁତ କର ।



(ଚିତ୍ର 5.58)

2. ପ୍ରଦର୍ଶିତ ଆୟତଘନ ଏବଂ ସମଘନର ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖ । ଦତ୍ତ ଥିବା ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ପ୍ରତ୍ୟେକର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର 5.59)

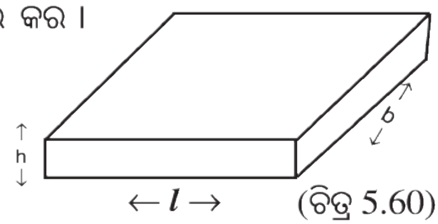
3. ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଓ ଉଚ୍ଚତା ଯଥାକ୍ରମେ 15 ସେ.ମି., 12 ସେ.ମି. ଓ 10 ସେ.ମି. ହେଲେ ଏହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

4. ଗୋଟିଏ ସମଘନାକୃତି ବାକ୍ସର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 2.5 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

5. ତିନୋଟି ସମଘନକୁ ଯୋଡ଼ି ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନରେ ପରିଣତ କରାଗଲା । ସମଘନର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 30 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଆୟତଘନର ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠଗୁଡ଼ିକର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି ସ୍ଥିର କର ।

6. କାର୍ଡ଼ବୋର୍ଡ଼ ଦ୍ୱାରା ଗୋଟିଏ ଉପର ଖୋଲା ସମଘନାକୃତି ବାକ୍ସ ତିଆରି କରାଗଲା । ବାକ୍ସର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 18 ସେ.ମି. ହେଲେ, ବାକ୍ସର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ହେବ ସ୍ଥିର କର ।

7. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଆୟତଘନର ଚିତ୍ରକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରି କୁହ –



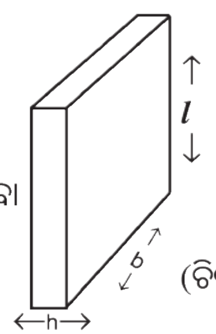
(ଚିତ୍ର 5.60)

(i) ଆୟତଘନର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ +2 x ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

ହେବା ସମ୍ଭବ କି ?

(ii) ଦତ୍ତ ଆୟତଘନାକାରକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ବସ୍ତୁର (ଚିତ୍ର 5.60 ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ) ଯଦି ଆମେ ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ଉଚ୍ଚତା ଏବଂ ଉଚ୍ଚତାକୁ ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନେବା ତେବେ ଏହାର ସମଗ୍ର ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳରେ କିଛି ପରିବର୍ତ୍ତନ ହେବ କି ?



(ଚିତ୍ର 5.61)

5.11 ଘନବସ୍ତୁ (ବହୁଫଳକ)ର ଘନଫଳ (Volume of a polyhedron) :

ପ୍ରତିଦିନ ତୁମେ ବହି, ଇଟା, ପଥରଖଣ୍ଡ, ପେଣ୍ଟୁ, ଲୁହାନଳୀ, ରୋଲ୍‌ବାଡ଼ି ଓ ବାକ୍ସ ଇତ୍ୟାଦି ପଦାର୍ଥ (ବସ୍ତୁ) ମାନଙ୍କ ସଂସ୍ପର୍ଶରେ ଆସୁଅଛ । ଯେଉଁ ପଦାର୍ଥକୁ ସମତଳ ଭୂମି ପୃଷ୍ଠରେ ରଖିଲେ ପଦାର୍ଥର କିଛି ଅଂଶ ଭୂମିକୁ ଲାଗି ରହେ ଏବଂ ଅନ୍ୟ ଭାଗଟି ଶୂନ୍ୟ, ବାୟୁ ବା ଜଳ ମଧ୍ୟରେ ସ୍ଥାନ ଅଧିକାର କରି ରହେ ସେ ପଦାର୍ଥକୁ ଘନ ପଦାର୍ଥ କୁହାଯାଏ । ଏହା ତୁମେ ଜାଣିଛ । **ପ୍ରତ୍ୟେକ ଘନ ପଦାର୍ଥ ବାୟୁରେ, ଜଳରେ ବା ଶୂନ୍ୟରେ କିଛି ସ୍ଥାନ ଅଧିକାର କରିଥାଏ । ଏହି ଅଧିକୃତ ସ୍ଥାନର ପରିମାପକୁ ଘନପଦାର୍ଥର ଆୟତନ ବା ଘନଫଳ କୁହାଯାଏ ।**

ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ, ଦୁଇଟି ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସେମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାଧ୍ୟମରେ, ଦୁଇଟି ବର୍ଗଚିତ୍ର ବା ଆୟତଚିତ୍ରକୁ ସେମାନଙ୍କର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ମାଧ୍ୟମରେ ତୁଳନା କରାଯାଇଥାଏ । ସେହିପରି ଦୁଇଟି ଘନବସ୍ତୁ ମଧ୍ୟରେ ତୁଳନା କେବଳ ସେମାନେ ବାୟୁରେ, ଜଳରେ ବା ଶୂନ୍ୟରେ ଅଧିକାର କରିଥିବା ସ୍ଥାନ ଅର୍ଥାତ୍ ସେମାନଙ୍କର ଘନଫଳ ମାଧ୍ୟମରେ ହୋଇଥାଏ ।

ଘନଫଳ (Volume) : କୌଣସି ଘନବସ୍ତୁ ବାୟୁ, ଜଳ ଅଥବା ଶୂନ୍ୟରେ ଅଧିକାର କରିଥିବା ସ୍ଥାନର ପରିମାପକୁ ଉକ୍ତ ବସ୍ତୁର ଘନଫଳ ବା ଆୟତନ କୁହାଯାଏ (Amount of space occupied by the solid is called volume) ।

5.11.1 ଘନଫଳର ଏକକ (Units of volume) :

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, ଗୋଟିଏ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ମାପ ସୂଚିତ କରିବା ପାଇଁ ଯେପରି 'ବର୍ଗ ଏକକ' ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ, ସେହିପରି ଏକ ଘନବସ୍ତୁର ଆୟତନ (ଘନଫଳ)ର ମାପକୁ ସୂଚିତ କରିବା ପାଇଁ 'ଘନ ଏକକ' ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ।

ଗୋଟିଏ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ଯେପରି ଆମକୁ ଉକ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରକୁ 1 ଏକକ ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ କେତେକ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରରେ ବିଭକ୍ତ କରିଥାଉ; ଠିକ୍ ସେଭଳି କୌଣସି ଘନ ପଦାର୍ଥର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ତାହାକୁ ଆମେ 1 ଏକକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ସମଘନରେ ବିଭକ୍ତ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

1 ଘନ ସେ.ମି. କହିଲେ ଆମେ ବୁଝିବା ଯେ, 1 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମଘନ ଦ୍ୱାରା ଅଧିକୃତ ସ୍ଥାନ । ସେହିପରି 1 ଘନ.ମି. କହିଲେ, 1 ମି. ଦୀର୍ଘ ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମଘନ ଦ୍ୱାରା ଅଧିକୃତ ସ୍ଥାନ ।

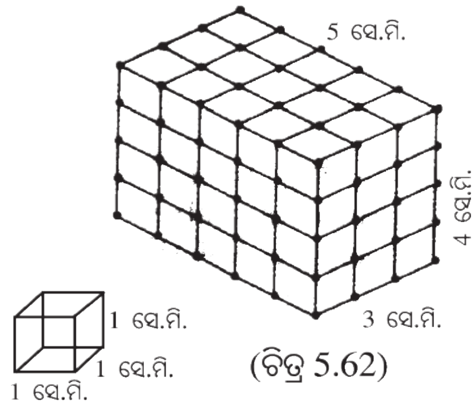
ଘନଫଳର ଏକକ :

1000 ଘନ ମିଲିମିଟର = 1 ଘନ ସେ.ମି.
1000 ଘନ ସେ.ମି. = 1 ଘନ ଡେସି.ମି.
1000 ଘନ ଡେସି.ମି. = 1 ଘନ ମି.
1000 ଘନ ମି. = 1 ଘନ ଡେକା.ମି.
1000 ଘନ ଡେକା.ମି. = 1 ଘନ ହେକ୍ଟୋ.ମି.
1000 ଘନ ହେକ୍ଟୋ.ମି. = 1 ଘନ କି.ମି.

ବି.ଦ୍ର. : ଆମେ ଏଠାରେ କେବଳ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ବା ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଭୂମିବିଶିଷ୍ଟ ପ୍ରିଜିମ୍ ଅର୍ଥାତ୍ ସମଘନ ଓ ଆୟତଘନର ଘନଫଳ ସ୍ଥିର କରିବାର ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

5.11.2 ଆୟତଘନ ଓ ସମଘନର ଘନଫଳ (Volume of a Cuboid and a Cube) :

1. ଆୟତଘନର ଘନଫଳ :



(ଚିତ୍ର 5.62)

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରକୁ ଦେଖ ।

ଏହା ଏକ ଆୟତଘନର ଚିତ୍ର, ଯାହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା ଯଥାକ୍ରମେ 5 ସେ.ମି., 3 ସେ.ମି. ଓ 4 ସେ.ମି. ।

ଉକ୍ତ ଆୟତଘନକୁ 1 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ସମଘନରେ ପରିଣତ କରାଯାଇଛି ।

ଆୟତଘନଟି ସମୁଦାୟ 60ଟି 1 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ ସମଘନରେ ପରିଣତ ହୋଇଛି ।

ଆମେ ଜାଣିଛେ 1 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମଘନର ଘନଫଳ 1 ଘନ ସେ.ମି.

$\therefore$ ଦତ୍ତ ଆୟତଘନର ଘନଫଳ = 60 ଘ. ସେ.ମି.

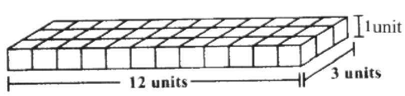
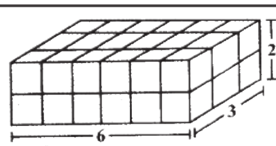
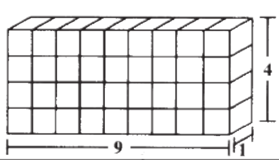
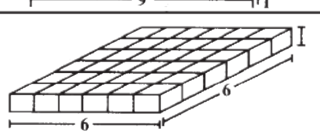
= 5 ସେ.ମି. x 4 ସେ.ମି. x 3 ସେ.ମି.

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ହେଲା ଯେ,

ଆୟତଘନର ଘନଫଳ	**=**	**ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ପ୍ରସ୍ଥ x ଉଚ୍ଚତା**
ଅଥବା,		**ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ x ଉଚ୍ଚତା**

(ତୁମ ପାଇଁ କାମ) ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟବିଶିଷ୍ଟ 36 ଟି ସମଘନ ନିଅ । ବିଭିନ୍ନ ଉପାୟରେ ଏହି ସମାନ ଘନଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ସମଘନଗୁଡ଼ିକୁ ସଜାଇ ରଖ । ଭିନ୍ନ ଉପାୟଗୁଡ଼ିକୁ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

	ଆୟତଘନ	ଦୈର୍ଘ୍ୟ	ପ୍ରସ୍ଥ	ଉଚ୍ଚତା	l x b x h
(i)		12	3	1	12x3x1=36 ଘନଏକକ
(ii)					
(iii)					
(iv)					

ସାରଣୀ - 5.6

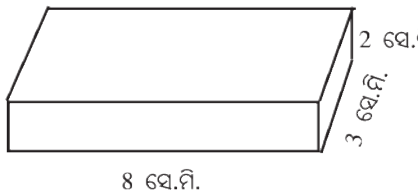
ଏଥିରୁ କ'ଣ ବୁଝିଲ ?

ଯେହେତୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଆୟତଘନ 36 ଟି ସମଘନକୁ ନେଇ ତିଆରି ହୋଇଛି, ତେଣୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଆୟତଘନର ଘନଫଳ 36 ଘନ ଏକକ । ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ହେଲା ଯେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ

ଆୟତଘନର ଘନଫଳ = ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ପ୍ରସ୍ଥ x ଉଚ୍ଚତା ଏବଂ

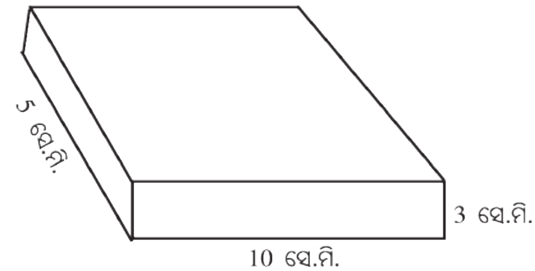
ଆୟତଘନର ଘନଫଳ = ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ x ଉଚ୍ଚତା

ନିଜେ କର ଚିତ୍ରରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଆୟତଘନଗୁଡ଼ିକର ଘନଫଳ ସ୍ଥିର କର ।



(i)

(ଚିତ୍ର 5.63)



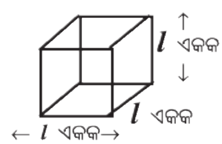
(ii)

2. ସମଘନର ଘନଫଳ :

ସମଘନ ହେଉଛି ଏକ ଆୟତଘନ, ଯାହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା ସମାନ ଅଥବା ଯେଉଁ ଆୟତଘନର ସମସ୍ତ ପାର୍ଶ୍ୱ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବର୍ଗଚିତ୍ର ତାହା ସମଘନ ଅଟେ ।

ଆମେ ଜାଣିଛେ ଆୟତଘନର ଘନଫଳ = ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ପ୍ରସ୍ଥ x ଉଚ୍ଚତା

$\therefore$ ସମଘନର ଘନଫଳ = l ଏକକ x l ଏକକ x l ଏକକ = l^3 ଘନ ଏକକ



(ଚିତ୍ର 5.64)

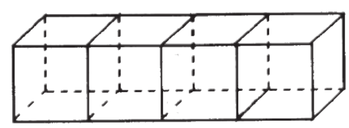
ନିଜେ କର ନିମ୍ନ ସମଘନଗୁଡ଼ିକର ଘନଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

(a) ସମଘନର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4 ସେ.ମି.

(b) ସମଘନର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 1.5 ମି.

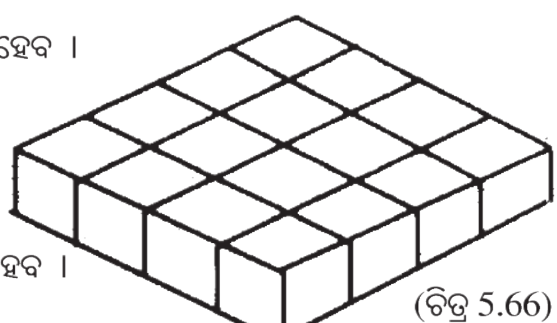
ତୁମ ପାଇଁ କାମ

1. 64 ଗୋଟି ସମଘନଫଳ (1 ଘନ ସେ.ମି.) ବିଶିଷ୍ଟ ସମଘନ ନିଅ ।

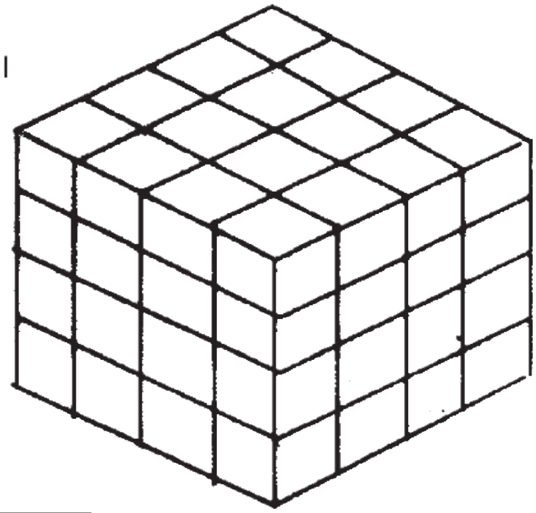

(ଚିତ୍ର 5.65)

2. 4 ଗୋଟି ସମଘନକୁ ଯୋଡ଼ି ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନ ପ୍ରସ୍ତୁତ କର । ଯାହାର ମାପ 4 ସେ.ମି. x 1 ସେ.ମି. x 1 ସେ.ମି. ହେବ ।

3. ଏଭଳି ଚାରିଗୋଟି ଆୟତଘନକୁ ପାଖାପାଖି ରଖି ଗୋଟିଏ ନୂତନ ଆୟତଘନ ପ୍ରସ୍ତୁତ କର । ଯାହାର ମାପ 4 ସେ.ମି. x 4 ସେ.ମି. x 1 ସେ.ମି. ହେବ ।


(ଚିତ୍ର 5.66)

4. ସୋପାନ -3 ଦ୍ୱାରା ପ୍ରସ୍ତୁତ ଏପରି ଚାରିଗୋଟି ଆୟତଘନକୁ ଉପରକୁ ଉପର ରଖି ପୁନଶ୍ଚ ଏକ ନୂତନ ଆୟତଘନ ତିଆରି କର,



ଯାହାର ମାପ 4 ସେ.ମି. x 4 ସେ.ମି. x 4 ସେ.ମି. ହେବ ।
ଏହି ଆୟତଘନ 64 ଗୋଟି ସମଘନକୁ ନେଇ ତିଆରି ହୋଇଥିବାରୁ ଏହାର ଘନଫଳ 64 ଘ.ସେ.ମି.
ଅର୍ଥାତ୍ ଆୟତଘନର ଘନଫଳ
= 4 ସେ.ମି. x 4 ସେ.ମି. x 4 ସେ.ମି.
= ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ପ୍ରସ୍ଥ x ଉଚ୍ଚତା
ଏଠାରେ ଆୟତଘନର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = ପ୍ରସ୍ଥ = ଉଚ୍ଚତା ହୋଇଥିବାରୁ ଉକ୍ତ ଆୟତଘନଟି ଏକ ସମଘନ ।
ଏହାର ଘନଫଳ = $(4)^3$ ଘ.ସେ.ମି.

∴ **ସମଘନର ଘନଫଳ = (ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ)^3 ଘନ ଏକକ**

(ଚିତ୍ର 5.67)

ଉଦାହରଣ - 5 : ଗୋଟିଏ ପାଣିଟାଙ୍କିର ଭିତର ପାଖର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଓ ଉଚ୍ଚତା ଯଥାକ୍ରମେ 75 ସେ.ମି., 60 ସେ.ମି. ଓ 46 ସେ.ମି. । ତେବେ କୁଣ୍ଡଟିରେ କେତେ ଘନ ସେ.ମି. ଜଳ ରହିବ ଏବଂ ଏହାକୁ ଲିଟରରେ ପ୍ରକାଶ କର । (1000 ଘ. ସେ.ମି. = 1 ଲିଟର)

ସମାଧାନ : ପାଣିଟାଙ୍କିର ଭିତର ପାଖର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 75 ସେ.ମି., ପ୍ରସ୍ଥ = 60 ସେ.ମି. ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା = 46 ସେ.ମି.

∴ ଜଳର ଆୟତନ = ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ପ୍ରସ୍ଥ x ଉଚ୍ଚତା = (75 x 60 x 46) ଘ. ସେ.ମି.
= 207000 ଘ. ସେ.ମି. = 207000 ÷ 1000 = 207 ଲିଟର

ଉଦାହରଣ - 6 : 15 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ କେତେଗୋଟି ସମଘନାକୃତି ଧାତବ ପଦାର୍ଥ, 1.5 ମି. x 90 ସେ.ମି. x 75 ସେ.ମି. ମାପବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଆୟତଘନାକାର ବାକ୍ସରେ ସଜାଡ଼ି ରଖି ହେବ ?

ସମାଧାନ : ସମଘନର ଆୟତନ $(15)^3$ = 3375 ଘ ସେ ମି

ବାକ୍ସର ଆୟତନ = 1.5 ମି. x 90 ସେ.ମି. x 75 ସେ.ମି.
= 150 ସେ.ମି. x 90 ସେ.ମି. x 75 ସେ.ମି. = 1012500 ଘ. ସେ.ମି.

∴ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମଘନ ସଂଖ୍ୟା $= \frac{1012500}{3375} = 300$

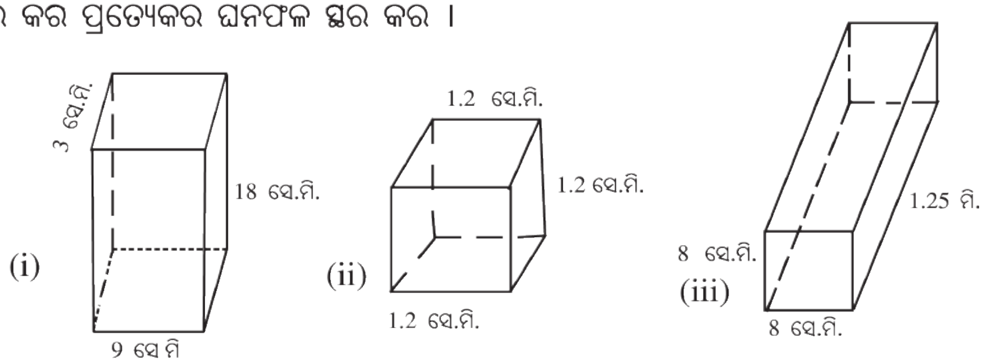
ଅଥବା, ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମଘନ ସଂଖ୍ୟା $= \frac{150 \times 90 \times 75}{15 \times 15 \times 15} = 300$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (k)

1. 75 ମି.ମି. ଦୀର୍ଘ ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମଘନ କେତେ ଘ.ସେ.ମି. ସ୍ଥାନ ଅଧିକାର କରିବ ?

2. ଗୋଟିଏ ସ୍କୁଲ୍‌ର ଅଡ଼ିଟୋରିଅମ୍‌ର ମାପ 45 ମି. x 20 ମି.x 16 ମି. ଯଦି କୌଣସି ଛାତ୍ର 64 ଘ.ମି. ବାୟୁ ଆବଶ୍ୟକ କରୁଥା'ନ୍ତି ତେବେ ଅଡ଼ିଟୋରିଅମ୍‌ଟି ସର୍ବାଧିକ କେତେଜଣ ଛାତ୍ରଙ୍କ ପାଇଁ ଯଥେଷ୍ଟ ହେବ ?

3. ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ଆୟତଘନ ଓ ସମଘନଗୁଡ଼ିକର ମାତ୍ରାଗୁଡ଼ିକୁ ଦିଆଯାଇଛି । ଏହି ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟବହାର କର ପ୍ରତ୍ୟେକର ଘନଫଳ ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର 5.68)

4. ଯଦି 12 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଧାତବ ସମଘନକୁ ତରଳାଇ 18 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏବଂ 15 ସେ.ମି. ପ୍ରସ୍ଥ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଆୟତଘନ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରାଯାଏ, ତେବେ ଆୟତଘନର ଉଚ୍ଚତା କେତେ ହେବ ?

5. ଗୋଟିଏ ସମଘନର ଘନଫଳ 8000 ଘ.ସେ.ମି. । ଏହାର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।

6. ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନର ଉଚ୍ଚତା ସ୍ଥିର କର ଯେତେବେଳେ ଏହାର ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 180 ବ.ସେ.ମି. ଏବଂ ଆୟତନ 900 ଘ.ସେ.ମି. ହୋଇଥିବ ।

7. ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ବାକ୍ସର ଭିତରପାଖର ମାପ 60 ସେ.ମି.x 54 ସେ.ମି. x 30 ସେ.ମି. । 6 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ ବାହୁବିଶିଷ୍ଟ କେତୋଟି ସମଘନ ଉକ୍ତବାକ୍ସ ମଧ୍ୟରେ ରହିପାରିବ ?

ଉତ୍ତରମାଳା

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(a)

1. (i) ଅସଂଖ୍ୟ, (i) ଦୁଇଟି (iii) ଗୋଟିଏ (iv) ଗୋଟିଏ, **2.** (✓): (ii), (iii), (vi), (vii); (✘): (i) (iv) (v)
3. (a) 6ଟି (b) 4ଟି, **4.** A-C-B, **5.** ତିନି ଯୋଡ଼ା

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(b)

1. (a) ଗୋଟିଏ (b) ଶୀର୍ଷ (c) ସନ୍ନିହିତ (d) $\angle APQ$, $\angle BPQ$ (e) ସନ୍ନିହିତ (e) $\angle BOD$, $\angle AOD$, **2.**(a) 180^0 (b) 60, (c) 60, (d) 3.1415, (e) $(90-x)^0$, (f) $(180-x)^0$, (g) $(180-x)^0$, **3.** କୋଣ, କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଏବଂ କୋଣର ବହିର୍ଦେଶ, **4.**(a) 45^0 (b) 55^0, (c) 90^0, (d) 130^0, **5.**(i) $\angle F$, (ii) $\angle C$, (iii) $\angle B$, (iv) $\angle E$, **6.**(i) 60^0, (ii) 29^0, (iii) 39^0, 78^0, 78^0, **9.**(i) 36, (ii) 42, **10.** 18

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2

1. (c), (d), (e), (f), (k) - ଠିକ୍ ଉକ୍ତି; ଅବଶିଷ୍ଟ ଭୁଲ୍ ଉକ୍ତି । **2.**(a), (b), (c), (d), (e) ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉତ୍ତର 3
4. $m\angle A = 68^0$, $m\angle CBD = 127^0$, $m\angle C = 59^0$, $m\angle ACE = 121^0$ **5.** $m\angle C = 72^0$, ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ,
6. $m\angle C = 50^0$, $m\angle B = 60^0$, $m\angle A = 70^0$ **7.** (i) 90^0, (ii) 45^0, (iii) 60^0, (iv) 90^0, (v) AB = BC,
8. 75^0, 15^0, **9.** (a) B (b) 132^0 (c) 70^0 (d) 158^0 **10.** $m\angle 1 = 45^0$, $m\angle 2 = 45^0$, $m\angle 3 = 48^0$ **12.** 50^0,
14. 90^0, **15.** (i) 65^0, (ii) 50^0, (iii) 70^0; **16.** 40^0, 60^0, 80^0, **17.** 58^0, 67^0, 55^0, **18.** 90^0, 60^0, 30^0
20. $m\angle A = 90^0$, $m\angle B = 60^0$, $m\angle C = 30^0$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(a)

1. (✓): a, e, g, h, i (✘): b, c, d, f, j; **2.**(a) ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, (b) ଚତୁର୍ଭୁଜର (c) ରମ୍ବସ୍ (d) ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (e) ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍, (f) ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର, (g) ଉଚ୍ଚତା, (h) ଆୟତଚିତ୍ର, **3.** (✓): a, b, c, e (✘): d, f, g

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(b)

1. (a) ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର, (b) ରମ୍ବସ୍, (c) ବର୍ଗଚିତ୍ର, (d) ଆୟତଚିତ୍ର, (e) ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର, (f) 180^0, (g) 180^0,
2. (✓): a, b, d, g (✘): c, e, f **3.** a, c, d, e, f (T) ଅବଶିଷ୍ଟ ଭୁଲ୍ ଉକ୍ତି (F), **4.** $m\angle B = 110^0$, $m\angle C = 70^0$,

$m\angle D = 110^0$ **5.** 72^0, 108^0, 72^0, 108^0, **6.** 18^0, 54^0, 126^0, 162^0, **7.** ବର୍ଗଚିତ୍ର **9.** 110^0, **10.** $m\angle A = m\angle C = 110^0$, $m\angle B = m\angle D = 80^0$ **11.** $m\angle M = 70^0$, $m\angle MNB = 110^0$, **12.** 45^0, 135^0, 45^0, 135^0, **13.** $m\angle C = m\angle Q = m\angle T = m\angle A$, $m\angle A = m\angle T = m\angle C$, $m\angle A = m\angle C = 110^0$, $m\angle B = m\angle D = 70^0$, **14.** 2, 7 ଏକକ, **15.** $x = 12$, $y = 5$, $z = 13$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(a)

1. (i) 5 ମି. (ii) 13 ସେ.ମି., (iii) 25 ସେ.ମି., (iv) 17 ମି., (v) 2.5 ସେ.ମି., (vi) 26 ସେ.ମି. । **2.** (i) 0.7 ସେ.ମି. (ii) 0.9 ମି., (iii) 7.5 ସେ.ମି., (iv) 75 ମି., (v) 115 ମି. **4.** (i) $\angle B$ (ii) $\angle A$ (iii) $\angle C$ (iv) $\angle B$ (v) $\angle B$ **5.** 130 ମି., **6.** 16 ମି., **7.** 6 ମି., **8.** 52 ଡେସି. ମି., **9.** 4 ମି., **10.** 68 ସେ.ମି.

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(b)

1. (i) 12 ସେ.ମି. (ii) 80 ସେ.ମି., (iii) 25 ସେ.ମି., (iv) 13 ସେ.ମି., **2.** (i) $8\sqrt{2}$ ସେ.ମି., (ii) $7\sqrt{2}$ ସେ.ମି., (iii) $20\sqrt{2}$ ସେ.ମି., (iv) $\frac{25}{\sqrt{2}}$ ସେ.ମି., **3.** (i) $7\sqrt{2}$ ସେ.ମି., (ii) $9\sqrt{2}$ ସେ.ମି., (iii)88 ସେ.ମି., (iv) $2\sqrt{2}$ ସେ.ମି. **4.** (i) 85 ମି. (ii) 50 ମି. **5.** (i) $4\sqrt{3}$ ସେ.ମି. **6.** 90 ଡେସି. ମି. **7.** 48 ସେ.ମି., **8.** 50 ସେ.ମି., 196 ସେ.ମି **9.** $4\sqrt{2}$ ମି., **10.** 20 ସେ.ମି. ଏବଂ $5\sqrt{2}$ ସେ.ମି.

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(c)

1. 120 ମି. **2.** 40 ମି., 20 ମି., **3.** 22440 ଟଙ୍କା, **4.** (i) 116 ବ.ମି., ଟ. 278.40ପ. **5.** 50, **6.** (i) 0, (ii) 4 ବ.ମି., **7.** 482 ବ.ମି. **8.** 236 ବ. ମି. ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(d)

1. 86.7 ବ.ଡେସି.ମି. **2.** 16560 ବ.ମି., **3.** (i) $98\sqrt{3}$ ବ.ସେ.ମି., (ii) $96\sqrt{3}$ ବ.ସେ.ମି., **4.** (i) $48\sqrt{3}$ ବ.ଡେସି.ମି., (ii) $1296\sqrt{3}$ ବ.ମି., **5.** (i) 588 ବ.ସେ.ମି. (ii) 660 ବ.ମି., (iii) $\frac{x}{2}\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$ ବ.ସେ.ମି., **6.** $21\frac{3}{7}$ ସେ.ମି., **7.** 6:1, **8.** 72000 ବ.ଡେସି.ମି., **9.** 44 ମି., **10.** (i) 84 ବ.ସେ.ମି. (ii) 204 ବ.ସେ.ମି., (iii) 756 ବ.ମି., **11.** 84 ବ.ସେ.ମି., 8 ସେ.ମି., **12.** 64 ବ.ସେ.ମି., **13.** 726 ବ.ମି., **14.** 28 ସେ.ମି., **15.** $48\sqrt{2}$ ସେ.ମି.

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(e)

1. (i) 720 ବ.ସେ.ମି., (ii) 26520 ବ.ସେ.ମି., (iii) 48 ବ.ମି., **2.** 672 ବ.ମି., **3.** 12096 ବ.ସେ.ମି., **4.** $31\frac{5}{13}$ ସେ.ମି., **5.** 16 ସେ.ମି., **6.** 12 ବ.ମି., **7.** 27 ମି.

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(f)

1. (i) 160 ବ.ସେ.ମି., (ii) 154 ବ.ମି., (iii) 32 ବ.ମି., **2.** (i) 25 ସେ.ମି.,(ii) 25 ମି., (iii) 1.7 ସେ.ମି., (iv) 1.5 ମି., **3.** (i) 40 ମି., (ii) 116 ମି., **4.** 36 ମି. ଓ 108 ମି., **5.** 36 ସେ.ମି., **6.** $72\sqrt{3}$ ବ.ସେ.ମି., **7.** $2\sqrt{7}$ ମି. ଓ $6\sqrt{7}$ ବ.ମି. ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(g)

1. (i) 720 ବ.ମି., (ii) 432 ବ.ମି., (iii) 900 ବ.ଡେ.ମି., **2.** 27 ମି. ଓ 33 ମି., **3.** 80 ମି., **4.** 588 ବ.ସେ.ମି., **5.** 1092 ବ.ମି., **6.** 12 ମି., **7.** 147 ବ.ମି. ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(h)

1. 2535 ବ.ସେ.ମି., **2.** 215 ବ.ସେ.ମି., **3.** 900 ବ.ଡେ.ମି., **4.** 200 ବ.ମି. **5.** 1056 ବ.ସେ.ମି., **6.** 336 ବ.ମି., **7.** 2592 ବ.ସେ.ମି., **8.** 442 ବ.ସେ.ମି., **9.** $5\frac{\sqrt{2}}{2}$ ମି., 12.25 ବ.ମି., **10.** 15.92 ବ.ସେ.ମି. ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(i)

1. (a) 7, (b) 4, (c) 9, (d) 8, (e) 10, (f) n+1, (g) 2n, (h) 8, (i) 12, (j) 4, 4, 6; **2.** 15, **3.** 8, **6.** 8, 5, 30

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(j)

2. (i) 822 ବ.ସେ.ମି., (b) 384 ବ.ସେ.ମି., (iii) 5300 ବ.ସେ.ମି., (iv) 149.2 ବ.ସେ.ମି. **3.** 900 ବ.ସେ.ମି., 540 ବ.ସେ.ମି., **4.** 37.50 ବ.ସେ.ମି., 25 ବ.ସେ.ମି., **5.** 12600 ବ.ସେ.ମି., **6.** 1620 ବ.ସେ.ମି.

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(k)

1. (i) 486 ଘ.ସେ.ମି., (ii) 1.728 ଘ.ସେ.ମି., (iii) 8000 ଘ.ସେ.ମି., **2.** 421.88ଘ.ସେ.ମି., **3.** 225 ଜଣ, **4.** 6.4 ସେ.ମି., **5.** 20 ସେ.ମି., **6.** 5 ସେ.ମି., **7.** 450

*****